

ELECTRÓNICA DE POTENCIA:

Aspectos Generales y Convertidores Electrónicos

Alexander Bueno Montilla
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Departamento de Conversión y
Transporte de Energía

Febrero, 2012

Índice general

Índice general	III
I Conceptos Básicos	1
1. Análisis de los Circuitos Mediante Series de Fourier.	3
1.1. Serie de Fourier	3
1.2. Expresiones de la Serie de Fourier	4
1.3. Serie de Fourier forma compleja	5
1.4. Transformada Rápida de Fourier (<i>FFT</i>)	5
1.5. Simetría de la Función $g(t)$	6
1.5.1. Función Par	6
1.5.2. Función Impar	6
1.5.3. Simetría de Media Onda	7
1.6. Coeficientes de Fourier de Ondas Simétricas	7
1.6.1. Funciones Pares	8
1.6.2. Funciones Impares	8
1.6.3. Funciones con Simetría de Media Onda	8
1.7. Valor Efectivo o Eficaz	9
1.8. Valor Medio	10
1.9. Factor de Distorsión Armónica Total	10
1.10. Factor de Rizado	10
1.11. Factor de Forma	10

1.12. Análisis de Circuitos Eléctricos	11
1.13. Cálculo de Potencia Para Formas de Onda Periódicas No Sinusoidales	12
1.13.1. Potencia Media	12
1.13.2. Potencia Aparente	13
1.13.3. Factor de Potencia	13
1.14. Potencia de Distorsión	13
1.15. Ejemplo de Aplicación	15
1.16. Ejercicios	17
2. Calidad de Servicio Eléctrico	19
2.1. Transitorios	19
2.1.1. Impulso	19
2.1.2. Oscilaciones	20
2.2. Variaciones de Tensión de Corta Duración	21
2.2.1. Hueco o Sag	21
2.2.2. Oleaje o Swell	22
2.2.3. Interrupción	22
2.3. Variaciones de Tensión de Larga Duración	23
2.4. Desbalance de tensión	24
2.5. Parpadeo de tensión	25
2.6. Desbalance de corriente	25
2.7. Distorsión en la Forma de Onda	26
2.8. Característica y Clasificación de los fenómenos Electromagnéticos	29
3. Circuitos con Interruptores	31
3.1. Definiciones:	31
3.2. Circuito Resistivo:	31
3.3. Circuito Resistivo Capacitivo	33
3.3.1. Resolución de la Ecuación Diferencial en Corriente	34
3.3.2. Solución de la Ecuación Diferencial Utilizando Transformada de Laplace	35

3.3.3. Formas de Onda	36
3.4. Circuito Resistivo Inductivo	37
3.4.1. Resolución de la Ecuación Diferencial en Corriente:	38
3.4.2. Resolución de la Ecuación Diferencial por Transformada de Laplace	38
3.4.3. Formas de Onda	39
3.5. Ejemplo	39
3.5.1. Solución Homogénea	40
3.5.2. Solución Particular Fuente Constante	40
3.5.3. Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)	40
3.5.4. Solución Total	41
3.5.4.1. Solución Particular por el Método Clásico.	41
3.5.5. Formas de Onda	42
3.6. Ejercicios	43
 II Aspectos Generales y Dispositivos	 45
 4. Introducción	 47
4.1. Reseña Histórica	47
4.2. Funciones Básicas de los Convertidores Electrónicos de Potencia	48
4.3. Aplicaciones	49
4.3.1. Residencial:	49
4.3.2. Comercial:	50
4.3.3. Industrial:	50
4.3.4. Transporte:	51
4.3.5. Transmisión y Otras Utilidades:	51
4.4. Dispositivos Semiconductores de Potencia	51
4.4.1. Diodo	51
4.4.2. Tiristor	53
4.4.3. Triac	56

4.4.4. Tiristores Auto Desactivables	57
4.4.5. Transistores BJT	59
4.4.6. MOSFET	61
4.4.7. IGBT	63
4.4.8. SIT	64
4.5. Clasificación de los Semiconductores de Potencia.	65
4.6. Selección de Semiconductores de Potencia	67
4.7. Ventajas y Desventajas de la Electrónica de Potencia	67

III Puentes AC - DC 69

5. Rectificadores de Media Onda No Controlado 71

5.1. Aspectos Generales	71
5.2. Rectificador con Carga Resistiva	72
5.2.1. Tensión Media	74
5.2.2. Corriente Media	75
5.2.3. Tensión Efectiva	75
5.2.4. Corriente Efectiva	75
5.2.5. Factor de Rizado	76
5.3. Rectificador con Carga Resistiva Inductiva	76
5.3.1. Tensión Media	80
5.3.2. Corriente Media	80
5.3.3. Tensión Efectiva	80
5.3.4. Corriente Efectiva	80
5.3.5. Factor de Rizado en Tensión	81
5.3.6. Simulación	81
5.4. Rectificador con Carga Inductiva	84
5.4.1. Tensión Media	86
5.4.2. Corriente Media	86

5.4.3.	Tensión Efectiva	87
5.4.4.	Corriente Efectiva	87
5.4.5.	Simulación	87
5.5.	Rectificador con Diodo de Descarga Libre	89
5.5.1.	Régimen transitorio	91
5.5.2.	Estado Estacionario.	91
5.5.2.1.	Tensión Media	95
5.5.2.2.	Tensión Efectiva	95
5.5.2.3.	Corriente Media	95
5.5.2.4.	Corriente Efectiva	96
5.5.3.	Simulación	96
5.6.	Rectificador con Carga Activa	98
5.6.1.	Solución Homogénea	99
5.6.2.	Solución Particular Fuente Constante:	100
5.6.3.	Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)	100
5.6.4.	Solución Total:	100
5.6.5.	Tensión Media	102
5.6.6.	Corriente Media	102
5.6.7.	Tensión Efectiva	103
5.6.8.	Corriente Efectiva	103
5.6.9.	Simulación	103
5.7.	Ejemplo:	105
5.7.1.	Rectificador con Carga RC	105
5.7.1.1.	Simulación	108
5.8.	Ejercicios	110
6.	Rectificador de Media Onda Controlado	115
6.1.	Aspectos Generales	115
6.2.	Rectificador con Carga Resistiva	116

6.2.1.	Tensión Media	118
6.2.2.	Corriente Media	118
6.2.3.	Tensión Efectiva	118
6.2.4.	Corriente Efectiva	119
6.2.5.	Factor de Rizado	119
6.3.	Rectificador con Carga Resistiva Inductiva	119
6.3.1.	La corriente para $t_\alpha \leq t \leq t_\beta$ es:	120
6.3.1.1.	Solución Homogénea.	120
6.3.1.2.	Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)	120
6.3.1.3.	Solución Total	120
6.3.2.	Tensión Media	123
6.3.3.	Corriente Media	123
6.3.4.	Tensión Efectiva	123
6.3.5.	Corriente Efectiva	123
6.3.6.	Factor de Rizado en Tensión	124
6.3.7.	Simulación	124
6.4.	Rectificador con Carga Inductiva	126
6.4.1.	Tensión Media	128
6.4.2.	Corriente Media	128
6.4.3.	Tensión Efectiva	129
6.4.4.	Corriente Efectiva	129
6.4.5.	Simulación	129
6.5.	Rectificador con Carga Activa	131
6.5.1.	Cálculo del límite de controlabilidad	132
6.5.2.	Solución Homogénea	133
6.5.3.	Solución Particular Fuente Constante:	133
6.5.4.	Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)	133
6.5.5.	Solución Total:	134
6.5.6.	Tensión Media	136

6.5.7. Corriente Media	136
6.5.8. Tensión Efectiva	136
6.5.9. Corriente Efectiva	136
6.5.10. Simulación	137
6.6. Ejercicios	139
7. Rectificador Monofásico	141
7.1. Aspectos Generales	141
7.2. Aplicaciones	141
7.3. Esquema del Rectificador de Onda Completo Monofásico	142
7.4. Operación del Puente Rectificador	142
7.5. Circuito Equivalente del Puente Rectificador Monofásico	146
7.6. Análisis de la Condición No Continuada de Corriente	147
7.6.1. Cálculo del Límite de Controlabilidad	148
7.6.2. Corriente en la carga:	149
7.6.3. Tensión Media	149
7.6.4. Corriente Media	150
7.6.5. Tensión Efectiva	150
7.6.6. Corriente Efectiva	150
7.7. Análisis de la Condición Continuada de Corriente	150
7.7.1. Cálculo del Límite de Controlabilidad	151
7.7.2. Solución Homogénea.	151
7.7.3. Solución Particular Fuente Constante:	152
7.7.4. Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)	152
7.7.5. Solución Total:	152
7.7.6. Tensión Media	154
7.7.7. Corriente Media	154
7.7.8. Tensión Efectiva	155
7.7.9. Corriente Efectiva	155

7.7.10. Análisis en Series de Fourier de la Tensión en la Carga	155
7.7.10.1. Cálculo de los términos c_n :	156
7.7.10.2. Resumen	157
7.8. Simulación	157
7.9. Puente Semicontrolado	161
7.9.1. Corriente	163
7.9.1.1. Corriente para el intervalo $\alpha \leq \omega t \leq \pi$	164
7.9.1.2. Corriente para el intervalo $\pi \leq \omega t \leq \pi + \alpha$	164
7.9.1.3. Condición continuada de corriente	165
7.9.2. Tensión media	165
7.9.3. Tensión efectiva	165
7.9.4. Corriente media	165
7.9.5. Simulación	165
7.10. Ejemplos	169
7.10.1. Puente Rectificador de Diodos con Carga Resistiva	169
7.10.2. Puente Rectificador de Diodos con Carga RL	171
7.10.3. Puente Rectificador de Diodos con Carga RC	174
7.10.3.1. Simulación	177
7.10.4. Puente Rectificador de Diodos con filtro LC y Carga RL	180
7.10.4.1. Simulación	183
7.11. Ejercicios	187
8. Rectificador Trifásico	191
8.1. Aspectos Generales	191
8.2. Aplicaciones	191
8.3. Esquema del Rectificador Trifásico	192
8.4. Operación del Puente Rectificador	192
8.5. Análisis de la Operación del Puente	199
8.5.1. Cálculo del Límite de Controlabilidad	199

8.5.2.	Solución Homogénea.	200
8.5.3.	Solución Particular Fuente Constante:	200
8.5.4.	Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)	200
8.5.5.	Solución Total:	200
8.5.6.	Tensión Media	202
8.5.7.	Corriente Media	203
8.5.8.	Tensión Efectiva	203
8.5.9.	Corriente Efectiva	203
8.5.10.	Simulación	203
8.6.	Manejador de Disparo de los SCR	206
8.7.	Ejemplos	207
8.7.1.	Puente Rectificador de Diodos con Carga RL	207
8.7.2.	Puente Rectificador de Diodos con Carga RC	208
8.7.2.1.	Simulación	211
8.7.3.	Puente Rectificador de Diodos con filtro LC y Carga RL	213
8.7.3.1.	Simulación	216
8.8.	Ejercicios	221
9.	Efecto de la Inductancia del Generador en los Rectificadores	223
9.1.	Aspectos Generales	223
9.2.	Rectificador de Media Onda	224
9.2.1.	Análisis del proceso de conmutación	225
9.2.2.	Corriente en la carga	227
9.2.3.	Simulación	228
9.3.	Rectificador Monofásico	230
9.3.1.	Análisis del Proceso de Conmutación	231
9.3.2.	Simulación	232
9.4.	Rectificador Trifásico	237
9.4.1.	Análisis del Proceso de Conmutación	237

9.5. Impacto del Rectificador sobre el Sistema Alterno	240
9.5.1. Puente Monofásico Controlado	240
9.5.2. Puente Trifásico Controlado	242
9.6. Regulación Internacional	243
9.7. Ejercicios	244
10. Efecto de los Rectificadores de Diodos sobre el Sistema de Potencia	247
10.1. Aspectos Generales	247
10.2. Rectificador de media onda con diodo de descarga libre	247
10.3. Rectificador de media onda bifásico	250
10.4. Rectificador monofásico	252
10.5. Rectificador trifásico de media onda	254
10.6. Rectificador trifásico	258
10.7. Rectificador hexafásico de media onda	262
10.8. Rectificador hexafásico	265
10.9. Rectificador Dodecafásico o de 12 pulsos	267
10.10. Límites de distorsión de corriente	269
10.11. Ejercicios	270
IV Puentes AC - AC	271
11. Controlador AC - AC	273
11.1. Aspectos Generales	273
11.2. Aplicaciones	273
11.3. Puente Semicontrolado Monofásico	274
11.3.1. Formas de onda	274
11.3.2. Expresión de Corriente $\alpha \leq \omega t \leq \beta$	275
11.3.3. Ángulo de Apagado (β)	276
11.3.4. Límite de Controlabilidad	276
11.3.5. Tensión Efectiva	276

11.3.6. Corriente Efectiva	276
11.3.7. Simulación	276
11.4. Puente Controlado Monofásico	279
11.4.1. Forma de onda	279
11.4.2. Expresión de Corriente	280
11.4.3. Ángulo de Apagado (β)	281
11.4.4. Límite de Controlabilidad	281
11.4.5. Tensión Efectiva	282
11.4.6. Corriente Efectiva	282
11.4.7. Configuraciones Adicionales	283
11.4.8. Simulación	283
11.5. Puente Controlado Trifásico	285
11.5.1. Configuraciones en Delta	289
11.5.2. Simulación	291
11.6. Controlador por Modulación de Ancho de Pulso	294
11.6.1. Simulación	299
11.7. Compensador Estático de Reactivos	305
11.8. Ejercicios	305
 V Puentes DC - DC	 307
 12. Controlador DC - DC	 309
12.1. Aspectos Generales	309
12.2. Aplicaciones	310
12.3. Tipos de Convertidores DC - DC	310
12.3.1. Chopper Reductor o Tipo "A"	311
12.3.2. Chopper Elevador o Tipo "B"	311
12.3.3. Chopper Tipo "C"	312
12.3.4. Chopper Tipo "D"	312

12.3.5. Chopper Tipo "E"	313
12.3.6. Chopper a Transistores	314
12.4. Análisis del Chopper Reductor	315
12.4.1. Condición No Continuada	315
12.4.1.1. Expresión de Corriente Condición No Continuada.	316
12.4.2. Condición Continuada	318
12.4.3. Expresión de Corriente Condición Continuada.	319
12.4.3.1. Primer ciclo de operación	320
12.4.3.2. Segundo ciclo de operación	320
12.4.3.3. Régimen Permanente	321
12.4.3.4. Tensión Media	323
12.4.4. Simulación	323
12.5. Chopper Elevador con carga LE	325
12.5.1. Expresión de corriente	327
12.6. Chopper elevador con carga activa RLE	329
12.6.1. Etapa de acumulación de energía $0 \leq t \leq t_{on}$	329
12.6.2. Etapa de devolución de energía a la fuente $t_{on} \leq t \leq T$	330
12.6.3. Rizado de corriente	330
12.6.4. Potencia promedio de devuelta a la red	331
12.6.5. Simulación	331
12.7. Convertidor Buck	334
12.7.1. Simulación	336
12.7.2. Análisis aproximado	337
12.8. Convertidor Boost	339
12.8.1. Simulación	342
12.8.2. Análisis aproximado	344
12.9. Convertidor Buck/Boost	346
12.10 Frenado Eléctrico	346
12.10.1. Frenado Regenerativo	347

12.10.2.Frenado Reostático	348
12.10.3.Frenado Combinado	348
12.11Ejercicios	349

VI Puentes DC - AC 351

13. Inversores 353

13.1. Aspectos Generales	353
13.2. Principio de Funcionamiento	353
13.3. Inversor Monofásico	358
13.3.1. Expresión de Corriente en Régimen Permanente	359
13.3.2. Tensión Efectiva	361
13.3.3. Expresión en Series de Fourier	361
13.3.3.1. Tensión	361
13.3.3.2. Corriente	362
13.3.4. Factor de Distorsión Armónica (<i>THD</i>)	362
13.3.5. Potencia Activa de 1 ^{ra} Armónica	362
13.4. Inversor Trifásico	362
13.4.1. Tensión en Series de Fourier	366
13.4.2. Tensión Efectiva	366
13.4.3. Factor de Distorsión Armónica Total	367
13.4.4. Modelo en Vectores Espaciales	367
13.4.4.1. Inversor	368
13.4.4.2. Carga	371
13.5. Modulación por Ancho de Pulso (<i>PWM</i>)	374
13.5.1. Índice de Modulación de Frecuencia	376
13.5.2. Índice de Modulación de Amplitud	376
13.5.3. Contenido Armónico	377
13.6. Modulación de Ancho de Pulso Modificada <i>SPWM</i>	378

13.7. Técnicas Avanzadas de Modulación.	380
13.7.1. Trapezoidal	380
13.7.2. Por Inyección de Armónicas	382
13.7.3. Escalera	384
13.7.4. Por Pasos	389
13.7.5. Resumen	391
13.8. Modulación Delta de Corriente	392
13.9. Instalación de Inversores	394
13.10 Simulación	395
13.10.1. Inversor monofásico con carga resistiva inductiva.	395
13.10.2. Modelo en vectores espaciales del inversor trifásico con carga RL	396
13.10.3. Modulación delta	398
13.11 Ejercicios	399

VII Especificaciones y Protección de Dispositivos Electrónicos de Potencia **403**

14. Especificaciones de Componentes de Potencia **405**

14.1. Aspectos Generales	405
14.2. Tensión	405
14.3. Corriente	406
14.4. Frecuencia de Interrupción	406
14.5. Capacidad de Variación de Corriente (di/dt)	406
14.6. Capacidad de Variación de Tensión (dv/dt)	406
14.7. Requisitos de Activación y Apagado de Compuerta	406
14.8. Protección con Fusible I^2t	407
14.9. Temperatura	407
14.10 Pérdidas en Diodos y Tiristores	407
14.10.1. Pérdidas de Conducción	407
14.10.2. Modelo Térmico.	408

14.11 Pérdidas en Transistores	410
14.11.1. Pérdidas de Bloqueo	410
14.11.2. Pérdidas de Conducción	410
14.11.3. Pérdidas de Conmutación	411
14.11.3.1. Modelo 1	411
14.11.3.2. Modelo 2	412
14.11.3.3. Modelo 3	413
14.11.4. Pérdidas Totales	413
15. Protección de Sobrecorriente en Semiconductores	415
15.1. Aspectos generales	415
15.2. Fusibles ultra rápidos	415
15.3. Protección termo-magnética	418
15.4. Protección activa de transistores	420
16. Barra de Corriente Continua	423
16.1. Aspecto Generales	423
16.2. Filtros	423
16.3. Manejador de frenado dinámico y regenerativo	426
16.3.1. Frenado dinámico	426
16.3.2. Frenado regenerativo	428
VIII Accionamientos de Máquinas Eléctricas Rotativas	429
17. Introducción a los Sistemas con Accionamiento Eléctrico.	431
17.1. Aspectos Generales	431
17.2. Accionamiento para Máquinas Eléctricas	432
18. Sistemas Mecánicos	437
18.1. Aspectos Generales	437
18.2. Par de Fricción o Rozamiento	440

18.3. Par de Torsión	441
18.4. Conversión Entre Sistemas Lineales y Rotatorios	443
18.5. Caja de Cambio o Engranajes	444
18.6. Características Mecánicas de Operación de un Accionamiento Eléctrico	446
18.6.1. Par acelerante	446
18.6.2. Cuadrantes de Operación de un Accionamiento	446
18.6.3. Par Resistente	448
19. Máquina de Corriente Continua	451
19.1. Principio de Funcionamiento	451
19.2. Modelo de la Máquina de Corriente Continua	453
19.3. Determinación de los Parámetros del Modelo de la Máquina de Corriente Continua	456
19.4. Tipos de Conexión de la Máquina de Corriente Continua	458
19.4.1. Conexión Independiente	458
19.4.2. Conexión Paralelo	461
19.4.3. Conexión Serie	463
19.5. Accionamiento de las Máquinas de Corriente Continua	465
19.6. Ejercicios	469
20. Máquina de Inducción	473
20.1. Modelo en Vectores Espaciales	473
20.2. Modelo en Régimen Sinusoidal Permanente	479
20.2.1. Equivalente Thévening	482
20.2.2. Característica Par Deslizamiento	484
20.2.3. Par Eléctrico Aproximado	485
20.3. Parámetros del Modelo	487
20.4. Estudio en régimen permanente de la máquina de inducción	488
20.4.1. Comportamiento de la máquina de inducción ante variaciones de la tensión de alimentación.	489
20.4.2. Comportamiento de la máquina de inducción ante variaciones de la fre- cuencia de alimentación.	492

20.4.3. Comportamiento de la máquina de inducción ante variaciones de la tensión y frecuencia de alimentación constantes.	494
20.4.4. Comportamiento de la máquina de inducción ante variaciones de la resistencia de rotor	497
20.5. Clasificación NEMA	498
20.6. Arranque de la Máquina de Inducción	499
20.6.1. El arrancador estrella-delta:	500
20.6.2. El arrancador por autotransformador:	501
20.6.2.1. Arranque por conexión de bobinas serie-paralelo:	501
20.7. Accionamientos de la Máquina de Inducción	501
20.7.1. Control Escalar	502
20.7.1.1. Arranca Suaves	502
20.7.1.2. Tensión - Frecuencia Constante	503
20.7.1.3. Accionamiento a Deslizamiento Constante	512
20.7.2. Control Vectorial por Campo Orientado	512
20.7.3. Control Vectorial Directo de Par y Flujo	521
20.7.3.1. Expresión vectorial de par eléctrico y del enlace de flujo en el estator	521
20.7.3.2. Estrategia de control directo de par	522
20.8. Ejercicios	529
21. La Máquina Síncrona	531
21.1. Introducción	531
21.2. Descripción de la máquina síncrona	532
21.3. Modelo de la máquina síncrona	535
21.4. Transformación a vectores espaciales	539
21.5. Transformación a coordenadas rotóricas	540
21.6. Transformación de Park	541
21.7. Régimen permanente	543
21.8. Circuito equivalente de la máquina síncrona	544

21.9. Máquinas de imán permanente	545
21.9.1. Ecuaciones de la máquina sincrónica de imán permanente referidas al rotor	548
21.10. Accionamiento de la máquina sincrónica	548
21.10.1. Control tensión frecuencia constante	548
21.10.2. Control vectorial	550
21.10.3. Control Directo de Par	557

IX Técnicas Modernas de Control 559

22. Rectificador por Modulación de Ancho de Pulso 561

22.1. Rectificadores bidireccionales de potencia	562
22.1.1. Rectificador <i>VSR</i>	562
22.1.2. Rectificador <i>CSR</i>	567
22.2. Rectificadores Unidireccionales de Potencia	568
22.2.1. Rectificador <i>PWM</i> Boost	568
22.2.2. Rectificador Vienna	570
22.3. Esquemas de Control para Rectificadores <i>PWM</i>	571
22.3.1. Control de potencia instantánea	571
22.3.2. Control de Corriente	575

23. Modulación de Vectores Espaciales 579

23.1. Aspectos Generales	579
23.2. Modulación de Vectores Espaciales	580
23.2.1. Modulación Generalizada en coordenadas vectoriales (x,y)	582
23.2.2. Modulación Generalizada en coordenadas naturales (a,b,c)	586
23.2.3. Relación de uso del vector nulo δ en <i>SVPWM</i>	586
23.2.4. Método de Modulación Generalizado utilizando δ	588
23.2.5. Ejemplos de secuencias de disparo del inversor	590
23.3. Resultados Experimentales	591
23.4. Convertidores Multinivel	594
23.4.1. MODULACIÓN DE VECTORES ESPACIALES EN CONVERTIDORES MULTI-NIVEL	598

X Bibliografía	599
Bibliografía	601
XI Apéndices	609
A. Vectores Espaciales	611
A.1. Definición	611
A.2. Potencia Activa y Reactiva Instantánea	613
A.2.1. Operación Balanceada y Desbalanceada:	614
A.2.2. Operación Armónica:	615
A.2.3. Operación Transitoria:	617
A.2.4. Interpretación Física:	618
B. Circuitos de Primer y Segundo Orden	621
B.1. Circuito de Primer Orden	621
B.2. Circuito de Segundo Orden	622
C. Modelo de Sistemas Lineales en Espacio de Estados	625
C.1. Descripción general	625
C.2. Ejemplo	626
D. Fundamentos de Electricidad	627
D.1. Aspectos Generales	627
D.2. Potencia Instantánea	628
D.3. Valor Medio	628
D.4. Valor Efectivo	628
D.5. Fasor	630
D.6. Impedancia	630
D.6.1. Reactancia Inductiva	630
D.6.2. Reactancia Capacitiva	631

D.7. Leyes de Kirchhoff Fasoriales	631
D.8. Régimen Sinusoidal Permanente	632
D.9. Potencia Aparente, Activa y Reactiva en Sistemas Sinusoidales	633
D.10. Método de Mallas en Forma Matricial	635
D.11. Método de Nodos en Forma Matricial	635
D.12. Teorema de Thévening y Norton	637
D.13. Teorema de Máxima Transferencia de Potencia	638
D.14. Sistemas Eléctricos Trifásicos	639
D.14.1. Conexión Estrella	640
D.14.2. Conexión Delta	641
D.14.3. Equivalente Delta Estrella	642
D.14.4. Potencia Trifásica	642
E. Circuitos Magnéticos	645
E.1. Aspectos Generales	645
E.2. Materiales Magnéticos	646
E.3. Leyes de los Circuitos Magnéticos	647
E.4. Excitación Sinusoidal	651
E.4.1. Ejemplo	651
E.5. Transformador Ideal	655
F. Funciones Trigonométricas	657
F.1. Funciones Seno	657
F.2. Funciones Coseno	658
F.3. Integrales	659
G. Transformada de Laplace	661
G.1. Definición	661
G.2. Tabla de Transformada de Laplace	661
H. Rutina de Integración Numérica de Paso Fijo (Ode1)	663

Parte I

Conceptos Básicos

Análisis de los Circuitos Mediante Series de Fourier.

1.1. Serie de Fourier

Es una representación a través de expresiones trigonométricas de una función periódica. Para esta representación se utiliza una suma infinita de funciones sinusoidales y cosenoidales de distintas frecuencias, mutuamente ortogonales entre si.

Una función se denomina periódica si cumple:

$$g(t) = g(t + T) \quad (1.1)$$

Donde:

T es el tiempo en un periodo de la señal.

Si conocemos la frecuencia (f) en Hertz de la señal, se puede escribir la frecuencia eléctrica como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1.2)$$

Sustituyendo de ecuación (1.2) en la ecuación (1.1), se puede escribir la condición de periodicidad de una señal de la siguiente forma:

$$g(\omega t) = g(\omega t + 2\pi) \quad (1.3)$$

El teorema de Fourier indica que la función periódica $g(t)$ se puede escribir como el valor medio de la función más una serie infinita de términos sinusoidales en senos y coseno de frecuencia angular

$n\omega$, donde n es un entero positivo y se denomina armónica. Por lo tanto $g(t)$ se puede escribir como:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} (a_n \cos(\omega t) + b_n \sin(\omega t)) \quad (1.4)$$

Las expresiones constantes a_0 , a_n y b_n , se pueden determinar a partir de las siguientes expresiones:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) dt \quad (1.5)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(n\omega t) dt \quad (1.6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(n\omega t) dt \quad (1.7)$$

Las condiciones suficientes que debe cumplir una función $g(t)$ para ser representada mediante Series de Fourier son:

1. La función $g(t)$ debe ser continua en el período T , o debe tener a lo sumo un número finito de discontinuidades en el intervalo de un período.
2. La función $g(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos en el periodo T .
3. La integral del valor absoluto de la función $g(t)$ en un período debe ser finita.

Las condiciones anteriores, son conocidas como CONDICIONES DE DIRICHLET y si una función $g(t)$ las cumple puede ser expresada en series de Fourier. Sin embargo, existen funciones que no cumplen todas las condiciones anteriores y admiten representación en series de Fourier.

1.2. Expresiones de la Serie de Fourier

Los senos y cosenos de la expresión de la función periódica $g(t)$ de una misma frecuencia, pueden combinarse en una sola sinusoidal originando expresiones alternativas de la serie de Fourier.

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} |c_n| \cos(n\omega t + \theta_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} |c_n| \sin(n\omega t + \zeta_n) \quad (1.8)$$

Donde:

$$|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$\varsigma_n = \theta_n - \frac{\pi}{2}$$

1.3. Serie de Fourier forma compleja

Utilizando la identidad de Euler ($e^{j\vartheta} = \cos(\vartheta) + j\sin(\vartheta)$), se puede expresar la Serie de Fourier de forma compleja como:

$$g(t) = \frac{D_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n e^{jn\omega t} + D_n^* e^{-jn\omega t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega t} \quad (1.9)$$

Donde:

$$D_n = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (1.10)$$

La relación entre a_n , b_n , c_n y D_n es:

$$\begin{aligned} a_n &= 2\Re_e(D_n) \quad \forall \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= 2\Im_m(D_n) \quad \forall \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$c_n = a_n + jb_n = 2D_n \quad (1.12)$$

Sustituyendo la expresión (1.12) en la ecuación (1.10), se obtiene:

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) e^{jn\omega t} dt \quad (1.13)$$

1.4. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Se define como la transformada rápida de Fourier de una señal $g(t)$ periódica y discretizada en “ N ” muestras en un periodo T a intervalos regulares “ t_s ”, como:

$$\mathcal{F}\{g(t)\}_n = FFT\{g(t)\}_n = \sum_{k=0}^{N-1} g(k \cdot t_s) \cdot e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \quad (1.14)$$

Donde:

$$T = N \cdot t_s \quad (1.15)$$

Se puede calcular los coeficientes de la serie de Fourier en forma compleja (D_n) a partir de la expresión (1.14) como:

$$\begin{aligned} D_n &\approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} g(k \cdot t_s) \cdot e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \cdot t_s \\ D_n &\approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(k \cdot t_s) \cdot e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \\ D_n &\approx \frac{1}{N} \mathcal{F}\{g(t)\}_n \end{aligned} \quad (1.16)$$

Sustituyendo la expresión (1.16) en (1.12), se puede calcular los coeficientes de la serie de Fourier (c_n) a partir de los coeficientes de la transformada rápida de Fourier como:

$$c_n = a_n + jb_n \approx \frac{2}{N} \mathcal{F}\{g(t)\}_n \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.17)$$

1.5. Simetría de la Función $g(t)$

Cuando la función periódica $g(t)$ presenta ciertas simetrías, se simplifica enormemente el cálculo de los coeficientes de Fourier. Las simetrías más importantes a considerar son:

1.5.1. Función Par

Se dice que la función $g(t)$ es una función par, cuando se cumple la igualdad:

$$g(-t) = g(t) \quad (1.18)$$

1.5.2. Función Impar

Se dice que la función $g(t)$ es una función impar, cuando se cumple la igualdad:

$$g(-t) = -g(t) \quad (1.19)$$

1.5.3. Simetría de Media Onda

Se dice que una función $g(t)$ tiene una simetría de media onda, cuando cumple la condición:

$$g(t) = -g\left(t + \frac{T}{2}\right) \quad (1.20)$$

1.6. Coeficientes de Fourier de Ondas Simétricas

Las propiedades de simetría anteriormente presentadas, permiten simplificar el cálculo de los coeficientes de Fourier. Si calculamos la integral en un periodo completo de las funciones que presentan simetría par o impar, tenemos:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt = \begin{cases} 2 \int_{t_0+\frac{T}{2}}^{t_0+T} g(t) dt & \forall g(t) \text{ par} \\ 0 & \forall g(t) \text{ impar} \end{cases} \quad (1.21)$$

Para evaluar los coeficientes de Fourier de las expresiones (1.6) y (1.7), es necesario evaluar la simetría de las funciones:

$$h(t) = g(t) \cos(n\omega t) \quad (1.22)$$

$$k(t) = g(t) \sin(n\omega t)$$

Si la función $g(t)$ es par, se obtiene:

$$h(-t) = g(-t) \cos(-n\omega t) = g(t) \cos(n\omega t) = h(t) \quad (1.23)$$

$$k(-t) = g(-t) \sin(-n\omega t) = -g(t) \sin(n\omega t) = -k(t)$$

Si la función $g(t)$ es impar, se obtiene:

$$h(-t) = g(-t) \cos(-n\omega t) = -g(t) \cos(n\omega t) = -h(t) \quad (1.24)$$

$$k(-t) = g(-t) \sin(-n\omega t) = g(t) \sin(n\omega t) = k(t)$$

Al evaluar los coeficientes de Fourier de las ecuaciones (1.6) y (1.7), con las simetrías obtenidas en las expresiones (1.23) y (1.24) se obtiene:

1.6.1. Funciones Pares

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} g(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = 0$$
(1.25)

1.6.2. Funciones Impares

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} g(t) \sin(n\omega t) dt$$
(1.26)

1.6.3. Funciones con Simetría de Media Onda

Utilizando la simetría de la expresión (1.20) en las ecuaciones (1.6) y (1.7), se puede demostrar que su desarrollo en serie de Fourier sólo contiene armónicos impares.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 g(t) \cos(n\omega t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} g(t) \cos(n\omega t) dt \right]$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 g(t) \sin(n\omega t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} g(t) \sin(n\omega t) dt \right]$$
(1.27)

Realizando el cambio de variable $t = \tau - T/2$ en la expresión (1.27) y teniendo en cuenta la simetría de media onda, se obtiene:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} g\left(\tau - \frac{T}{2}\right) \cos n\omega \left(\tau - \frac{T}{2}\right) d\tau + \int_0^{\frac{T}{2}} g(t) \cos(n\omega t) dt \right] \\
a_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} -g(\tau) \cos n\omega \left(\tau - \frac{T}{2}\right) d\tau + \int_0^{\frac{T}{2}} g(t) \cos(n\omega t) dt \right] \\
b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} g\left(\tau - \frac{T}{2}\right) \sen n\omega \left(\tau - \frac{T}{2}\right) d\tau + \int_0^{\frac{T}{2}} g(t) \sen(n\omega t) dt \right] \\
b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} g(\tau) \sen n\omega \left(\tau - \frac{T}{2}\right) d\tau + \int_0^{\frac{T}{2}} g(t) \sen(n\omega t) dt \right]
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Evaluando la expresión (1.28), para n par e impar se obtiene:

n par:

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \\
b_n &= 0
\end{aligned} \tag{1.29}$$

n impar:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} g(t) \cos(n\omega t) dt \\
b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} g(t) \sen(n\omega t) dt
\end{aligned} \tag{1.30}$$

1.7. Valor Efectivo o Eficaz

El valor efectivo o eficaz de la función periódica $g(t)$ puede calcularse a partir de las armónicas de las series de Fourier, mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
G_{rms} &= \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} G_{rms_n}^2} = \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{c_n}{\sqrt{2}} \right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (g(t))^2 dt}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Donde:

G_{rms_n} corresponde al valor efectivo de la señal para la armónica n .

1.8. Valor Medio

El valor medio de la función periódica $g(t)$ puede calcularse a partir del termino a_0 de las series de Fourier, como:

$$G_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \quad (1.32)$$

1.9. Factor de Distorsión Armónica Total

El factor de distorsión armónica total (THD) de una señal es una medida del contenido total de armónicas de la señal respecto a una referencia, generalmente la primera armónica, y se calcula como:

$$THD = \frac{\sqrt{G_{rms}^2 - G_{rms_1}^2}}{G_{rms_1}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2,3,\dots}^{\infty} G_{rms_n}^2}}{G_{rms_1}} \quad (1.33)$$

1.10. Factor de Rizado

El factor de rizado (FR) es una medida del contenido armónico total de la señal con respecto al valor medio de la misma.

$$FR = \frac{\sqrt{G_{rms}^2 - G_0^2}}{G_0} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} G_{rms_n}^2}}{G_0} \quad (1.34)$$

1.11. Factor de Forma

El factor de forma mide la proporción entre el valor medio y efectivo de una señal.

$$FF = \frac{G_{rms}}{G_0} \quad (1.35)$$

1.12. Análisis de Circuitos Eléctricos

Si la función periódica $g(t)$, que acabamos de descomponer en serie de Fourier, alimenta en tensión un circuito eléctrico como el mostrado en la figura 1.1 ($v_f(t) = g(t)$), se puede calcular la expresión de la serie de Fourier de la corriente en la carga a través del conocimiento de la serie de la tensión aplicada a la carga.

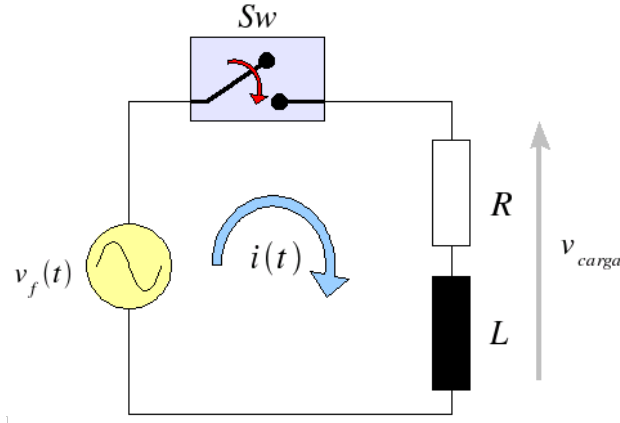


Figura 1.1: Circuito RL

Como se observa de la figura 1.1, la tensión en régimen permanente sobre la carga RL corresponde a la tensión de la fuente $v_f(t)$ posterior a la conexión del interruptor S_w . La tensión en la carga se puede expresar en Series de Fourier como:

$$v_{carga}(t) = V_0 + \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} V_n \sin(n\omega t + \zeta_n) \quad (1.36)$$

donde:

$$V_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$V_n = |c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\zeta_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) - \frac{\pi}{2}$$

La expresión de la corriente en serie de Fourier se puede obtener en función de la serie de tensión de la expresión (1.36) como:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left(\frac{V_n}{Z_n} \text{sen}(n\omega t + \varsigma_n - \varphi_n) \right) \quad (1.37)$$

donde:

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

$$Z_n = \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{n\omega L}{R}\right)$$

La expresión (1.37), se puede utilizar como respuesta particular en la solución de la ecuación diferencial que describe el comportamiento del circuito de la figura 1.1, con la finalidad de evaluar el régimen transitorio luego del cierre del interruptor S_w .

1.13. Cálculo de Potencia Para Formas de Onda Periódicas No Sinusoidales

Los circuitos de electrónica de potencia tienen, normalmente tensiones y/o corrientes que son simétricas pero no sinusoidales. En el caso general se pueden extrapolar los conceptos de potencia aparente y reactiva utilizados para formas de ondas sinusoidales. Uno de los errores comunes al calcular la potencia promedio en circuitos de potencia, es tratar de aplicar las relaciones de ondas sinusoidales para ondas que no los son.

1.13.1. Potencia Media

Las formas de onda periódica de tensión y corriente pueden ser representadas a través de su serie de Fourier como:

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \text{sen}(n\omega t + \psi_n) \quad (1.38)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \text{sen}(n\omega t + \phi_n)$$

La potencia media se puede calcular como:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (v(t)i(t)) dt \quad (1.39)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\left[V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin(n\omega t + \psi_n) \right] \left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin(n\omega t + \phi_n) \right] \right) dt$$

Recordando la identidad trigonométrica:

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \quad (1.40)$$

$$P = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{V_n I_n}{2} \right) \cos(\psi_n - \phi_n) \quad (1.41)$$

1.13.2. Potencia Aparente

La potencia aparente se calcula a partir de los valores efectivos de la tensión y corriente como:

$$S = V_{rms} I_{rms} = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (1.42)$$

1.13.3. Factor de Potencia

El factor de potencia (fp) se calcula a partir de su definición como:

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{V_n I_n}{2} \right) \cos(\psi_n - \phi_n)}{V_{rms} I_{rms}} \quad (1.43)$$

1.14. Potencia de Distorsión

En el caso particular que la tensión sólo contenga la armónica fundamental y alimente una carga no lineal se obtiene:

$$v(t) = V_1 \sin(\omega t + \psi_1) \quad (1.44)$$

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

La potencia media, se obtiene a partir de la expresión (1.39), como:

$$P = \left(\frac{V_1 I_1}{2} \right) \cos(\psi_1 - \phi_1) = V_{rms1} I_{rms1} \cos(\psi_1 - \phi_1) \quad (1.45)$$

El factor de potencia:

$$fp = \frac{V_{rms} I_{rms1} \cos(\psi_1 - \phi_1)}{V_{rms} I_{rms}} = \frac{I_{rms1}}{I_{rms}} \cos(\psi_1 - \phi_1) \quad (1.46)$$

Observe que para el caso sinusoidal permanente con armónica fundamental ($n = 1$) y carga lineal se obtiene:

$$v(t) = \sqrt{2} V_{rms1} \sin(\omega t + \psi_1) \quad (1.47)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I_{rms1} \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$fp_1 = \frac{V_{rms1} I_{rms1} \cos(\psi_1 - \phi_1)}{V_{rms1} I_{rms1}} = \cos(\psi_1 - \phi_1) \quad (1.48)$$

$$S_1 = V_{rms1} I_{rms1} (\cos(\psi_1 - \phi_1) + j \sin(\psi_1 - \phi_1)) = P_1 + jQ_1 \quad (1.49)$$

Note: que la potencia activa en ambos casos es igual.

Utilizando el resultado de la expresión (1.48), se puede reescribir la ecuación (1.46), como:

$$fp = \frac{I_{rms1}}{I_{rms}} fp_1 \quad (1.50)$$

Definiendo el *Factor de desplazamiento del factor de potencia (DPF)* como:

$$DPF \equiv fp_1 \quad (1.51)$$

Utilizando la definición (1.51), se puede escribir la ecuación (1.50) como:

$$fp = \frac{I_{rms1}}{I_{rms}} DPF \quad (1.52)$$

Se define la *potencia de de distorsión (D)* como:

$$D \equiv V_{rms1} \left(\sqrt{\sum_{n \neq 1}^{\infty} I_{rmsn}^2} \right) \quad (1.53)$$

Utilizando la definición (1.53) y la expresión (1.49), la potencia aparente en la carga no lineal, se calcula como:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2 + D^2} = \sqrt{S_1^2 + D^2} \quad (1.54)$$

1.15. Ejemplo de Aplicación

En esta sección se calcula la expansión en series de Fourier de una onda cuadrada como la mostrada en la figura 1.2. Esta onda se puede representar matemáticamente como:

$$v(t) = \begin{cases} V & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -V & \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad (1.55)$$

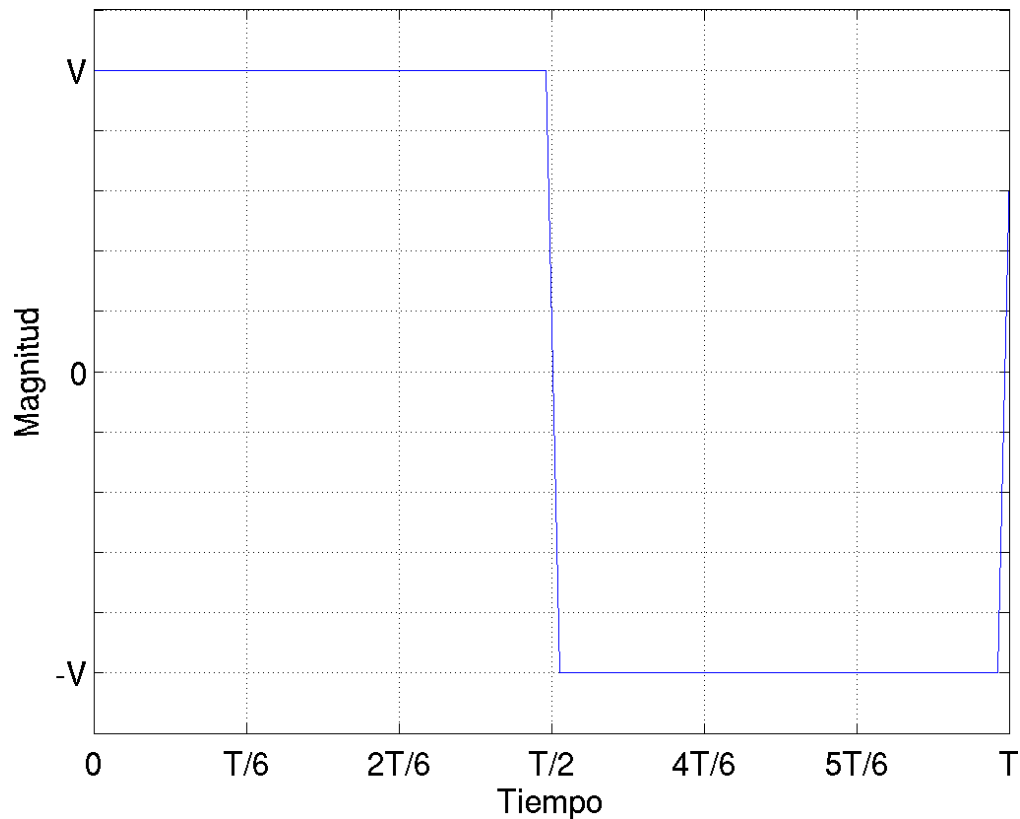


Figura 1.2: Gráfica de función $v(t)$

Aplicando la definición de la expresión (1.8) para la función $v(t)$, considerando su simetría, obtenemos:

$$v(t) = \sum_{n \text{ impares}} \left(\frac{4V}{n\pi} \right) \sin \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) \quad (1.56)$$

En la figura 1.3, se presenta la evolución de la función $v(t)$ de la expresión (1.56) al considerar las armónicas desde la fundamental hasta la 17^{ma} armónica:

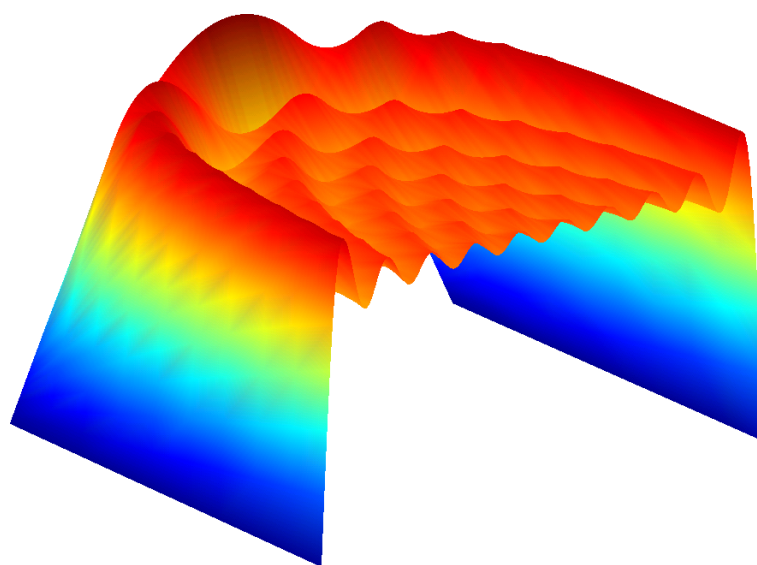
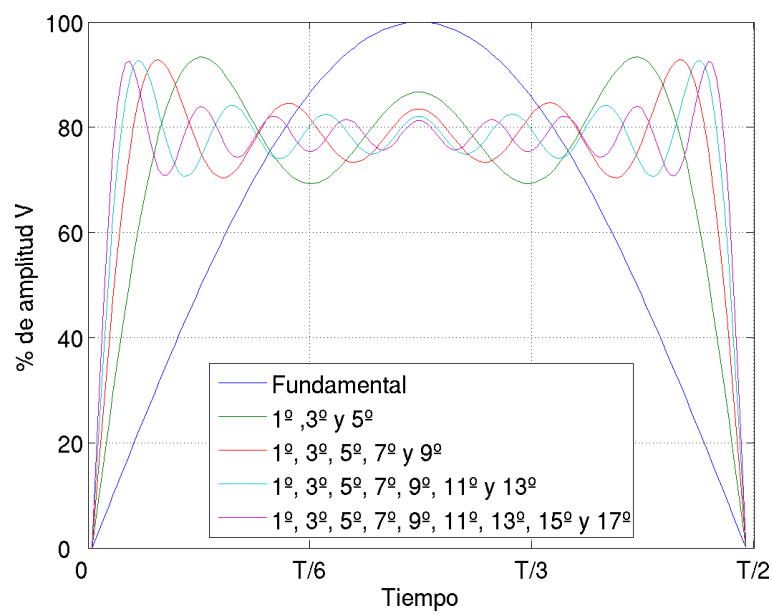


Figura 1.3: Evolución de la función $x(t)$ al considerar cada armónica.

1.16. Ejercicios

1. Determine el valor medio, efectivo y la descomposición en Series de Fourier de las siguientes formas de onda:

$$a) v(t) = |\text{sen}(\omega t)| \quad \forall t$$

$$b) v(t) = \begin{cases} \text{sen}(\omega t) & 0 \leq \omega t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} \leq \omega t \leq T \end{cases}$$

$$c) i(t) = \begin{cases} I_{\min} + (I_{\max} - I_{\min}) \frac{t}{\delta T} & 0 \leq t \leq \delta T \\ I_{\max} - (I_{\max} - I_{\min}) \left(\frac{t - \delta T}{T - \delta T} \right) & \delta T \leq t \leq T \end{cases}$$

$$d) p(t) = v(t) * i(t) \text{ donde: } v(t) = \sqrt{2}V \text{sen}(\omega t) \text{ e } i(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \frac{T}{4} \\ I & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t < \frac{3T}{4} \\ -I & \frac{3T}{4} \leq t \leq T \end{cases}$$

2. Para la forma de onda $p(t)$ del ejercicio anterior determine:

- a) Potencia activa
- b) Potencia reactiva
- c) Potencia de distorsión
- d) Factor de potencia

Calidad de Servicio Eléctrico

2.1. Transitorios

El término transitorio se ha utilizado en el análisis de las variaciones del sistema eléctrico de potencia para referirse a un evento no deseado de naturaleza momentánea y fortuita. Normalmente esta palabra se asocia a la respuesta oscilatoria amortiguada de un circuito tipo *RLC*.

Los transitorios pueden clasificarse en dos categorías:

- Impulsos
- Oscilaciones

2.1.1. Impulso

Es una inyección momentánea de energía que ocasiona cambios en las tensiones y/o corrientes en el sistema de potencia, se caracteriza por ser unidireccional y presentar tiempos de acenso y descenso en el orden de los micro segundos. La causa más común de los transitorios tipo impulso son los relámpagos o descargas atmosféricas, estas se caracterizan por presentar tiempos de cresta de $1,2\mu s$ y tiempos de cola de $50\mu s$. En la figura 2.1, se presenta la onda característica de un descarga atmosférica y su efecto sobre la tensión en el sistema de potencia.

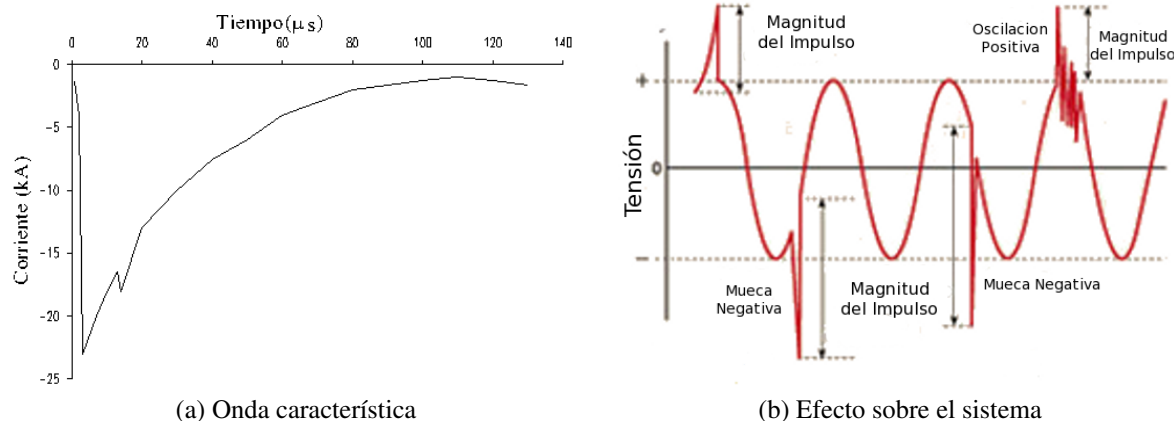


Figura 2.1: Transitorio tipo Impulso

Debido a las altas frecuencias involucradas, la forma de los transitorios impulsivos pueden cambiar rápidamente debido a los componentes del circuito y pueden tener características muy diferentes cuando se ve desde diferentes puntos del sistema de potencia. Los transitorios impulsivos pueden excitar la frecuencia natural de oscilación del sistema de potencia.

2.1.2. Oscilaciones

Son variaciones positivas y negativas entorno al valor de la tensión y/o corriente de una frecuencia superior a la del sistema de potencia. Se pueden clasificar de acuerdo a su frecuencia, duración y magnitud en:

- **Alta frecuencia:** La oscilación presenta componentes de frecuencia superiores a los 500kHz con una duración típica de micro segundos.
- **Media frecuencia:** La oscilación presenta componentes de frecuencia entre 5 y 500kHz su duración esta en el orden de las decenas de micro segundos e incluso varios ciclos a frecuencia fundamental.
- **Baja Frecuencia:** La oscilación presenta componentes de frecuencia menores a 5kHz su duración esta en el orden de 0,3 a 50ms .

En la figura 2.2, se presenta un ejemplo de oscilación de alta y baja frecuencia. Esta categoría de fenómenos se encuentran comúnmente en los sistemas de distribución y es causada por muchos tipos de eventos y maniobras. La causa más frecuente de este fenómeno es la energización de bancos de condensadores, que por lo general resulta en una tensión oscilatoria transitoria con una frecuencia primaria entre 300 y 900Hz . La magnitud máxima puede acercarse a $2,0\text{pu}$, pero suele

ser 1,3 a 1,5 en por unidad con una duración de entre 0,5 y 3 ciclos en función del sistema de amortiguación.

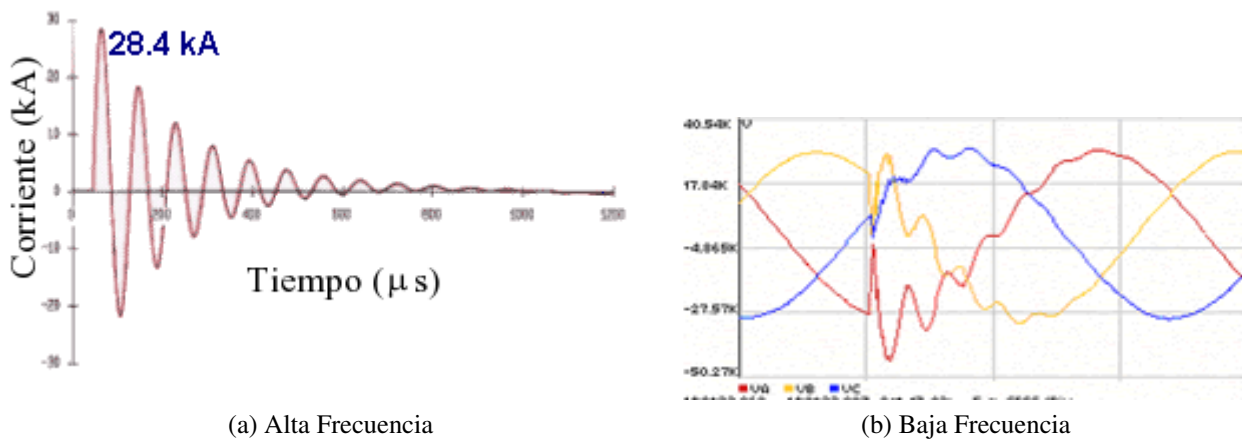


Figura 2.2: Ejemplos de oscilaciones

2.2. Variaciones de Tensión de Corta Duración

Esta clasificación abarca la categoría de la IEC de caídas de tensión e interrupciones breves. Las variaciones dependiendo su duración pueden clasificarse en: instantáneas o temporales. Las variaciones de tensión de corta duración son causadas principalmente por condiciones de falla, procesos de toma y bote de cargas de gran capacidad y conexiones sueltas en los alimentadores de un circuito. Dependiendo el tipo de evento (falla, energización o bote de carga), su localización y condiciones de operación del sistema se pueden producir tres tipos de fenómenos en la red eléctrica:

- Caída temporal de la tensión (hueco o sag).
- Aumento temporal de la tensión (oleaje o swell).
- Pérdida completa de la tensión (interrupción).

2.2.1. Hueco o Sag

Es una disminución de entre 0,1 y 0,9 en por unidad del valor efectivo de la tensión o corriente con una duración entre 0,5 ciclos y un minuto. Los huecos o sag de tensión son generalmente asociados a fallas en el sistema o a la energización de cargas de alto consumo o arranque de grandes motores. En la figura 2.3, se presenta un ejemplo de un sag en las tres fases de un sistema de potencia.

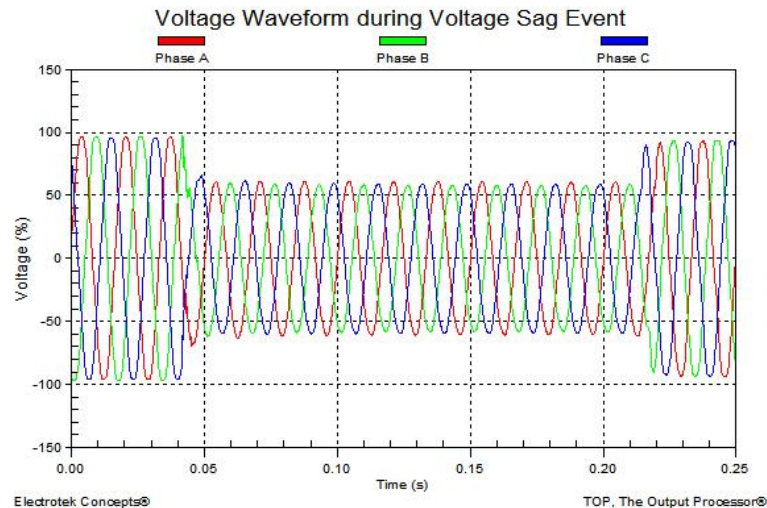


Figura 2.3: Ejemplo de Sag

2.2.2. Oleaje o Swell

Se define como un aumento entre 1,1 y 1,8 en por unidad del valor efectivo de la tensión o corriente con una duración entre 0,5 ciclos y un minuto. Son causados por los mismos fenómenos de los huecos pero su frecuencia de ocurrencia es menor. En la figura 2.4, se presenta un ejemplo de un swell en una fase del sistema de potencia.

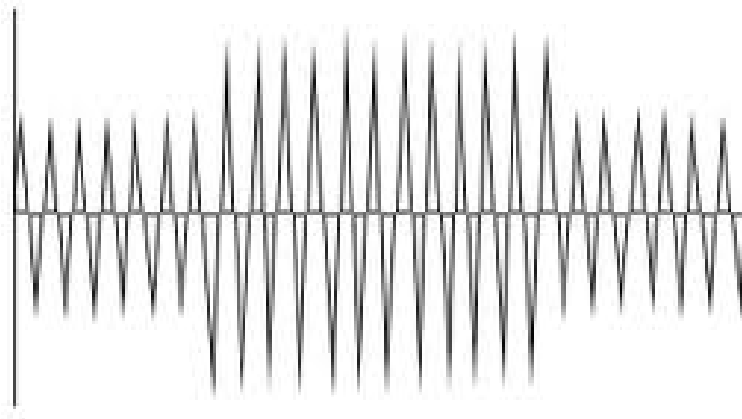


Figura 2.4: Ejemplo de Swell

El término sobre tensión momentánea es utilizado por muchos autores para referirse a los swell.

2.2.3. Interrupción

Se define como una disminución menor al 0,1 en por unidad de la tensión o corriente del sistema por un tiempo no superior a un minuto. Las interrupciones pueden ser el resultado de fallas en

equipos o sistemas de control en la red eléctrica. Las interrupciones se miden por su duración ya que la magnitud es siempre inferior al 10 % de la nominal. Generalmente las interrupciones son precedidas por sag. En la figura 2.5, se presenta un ejemplo de una interrupción en una fase del sistema de potencia.

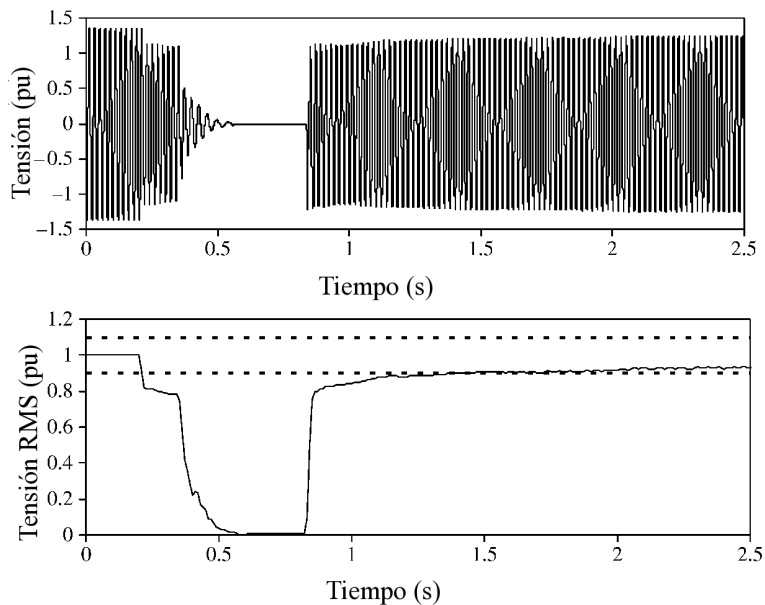


Figura 2.5: Ejemplo de interrupción

2.3. Variaciones de Tensión de Larga Duración

Las variaciones de larga duración abarcan aquellas desviaciones de los valores efectivos de tensión superiores a un minuto. La norma ANSI C84.1-2006 establece los límites de tolerancia de tensión en estado estacionario en un sistema de 60 Hz.

Las variaciones de larga duración se pueden clasificar en:

- **Interrupción sostenida:** Es la disminución superior al 90 % del valor efectivo de la tensión con una duración superior a un minuto. Generalmente requiere la intervención de un operador para poder restablecer el servicio.
- **Subtensiones:** Es una disminución del valor efectivo de la tensión a menos del 90 % del valor nominal con una duración mayor a un minuto.
- **Sobretensiones:** Es un aumento del valor efectivo de la tensión por encima del 10 % del valor nominal con una duración mayor a un minuto.

Las sobretensiones y subtensiones, generalmente son causadas por variaciones repentinas de la carga en la red de potencia o por sistemas de conexión y desconexión de equipos o carga.

2.4. Desbalance de tensión

Los desbalances de tensión en un sistema trifásico se originan por la alimentación de cargas de alto consumo monofásicas conectadas entre fase y neutro o entre línea y línea. Estos desbalances de tensión pueden ocasionar componentes de secuencia negativa y cero que afectan a las máquinas de corriente alterna conectadas al punto común de acoplamiento. La circulación de corrientes de secuencia negativa causa incrementos en el calentamiento de los devanados del convertidor electromecánico. El desbalance de tensión se puede definir como:

- Máxima desviación entre la magnitud promedio de tensión, expresada en porcentaje de la magnitud promedio de tensiones de las fases.

$$V_{desb}(\%) = 100 \cdot \frac{|V_{max} - V_{medio}|}{|V_{medio}|} \quad (2.1)$$

- Magnitud de la tensión de secuencia negativa en porcentaje de la magnitud de tensiones de secuencia positiva.

$$V_{desb}(\%) = \left| \frac{\tilde{V}_2}{\tilde{V}_1} \right| \cdot 100 \quad (2.2)$$

Un método de medición y cálculo del desbalance de tensión debe combinar ambas definiciones en términos de magnitud y duración. En la figura 2.6 se muestra un ejemplo de desequilibrio de tensión.

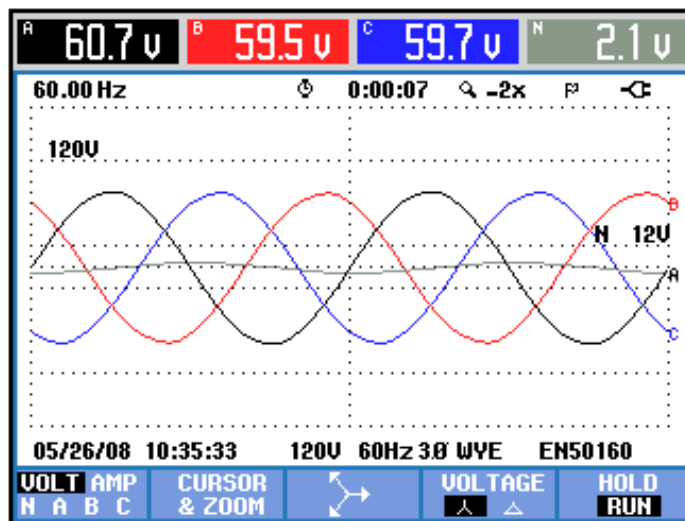


Figura 2.6: Desequilibrio de Tensión

2.5. Parpadeo de tensión

El parpadeo o *flicker* es una variación rápida de tensión debido a cambios bruscos de la demanda. Pueden ser percibido por el ojo humano y causar molestias. Evaluar el parpadeo en el punto común de acoplamiento es difícil y requiere un registro estadístico de estas fluctuaciones de tensión. Estas variaciones rápidas son ocasionadas por oscilaciones de la tensión entre un 0,9 y 1,1 en por unidad a baja frecuencia. En la figura 2.7, se presenta la forma de onda de la tensión durante la ocurrencia de un parpadeo.

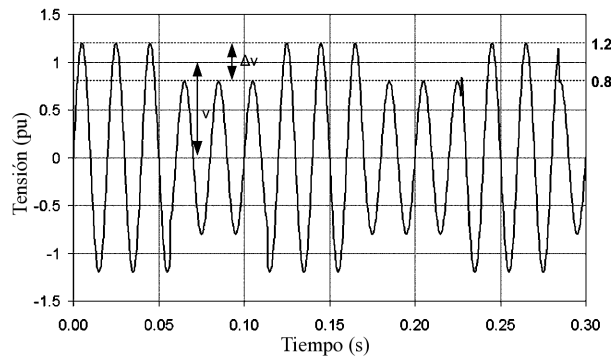


Figura 2.7: Forma de onda de un parpadeo

2.6. Desbalance de corriente

Los desequilibrios de corriente se pueden representar mediante el cociente de la componente de secuencia negativa y positiva. Las componentes de corriente de secuencia negativa producen calentamiento adicional sobre los devanados de los generadores conectados al (PCC), así como par en sentido contrario al de giro. Por diseño, los generadores permiten un máximo de 10% de corriente de secuencia negativa total en relación a la componente de secuencia positiva. La corriente de desbalance se expresa como:

$$I_{desb}(\%) = \left| \frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} \right| \cdot 100 \quad (2.3)$$

donde:

\tilde{I}_2 Fasor de la corriente de secuencia negativa.

\tilde{I}_1 Fasor de la corriente de secuencia positiva.

En la figura 2.8 se muestra un ejemplo de desequilibrio de corriente.

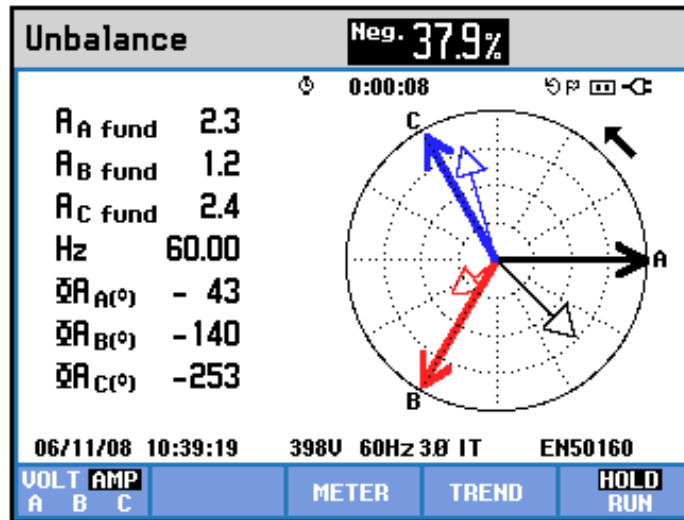


Figura 2.8: Desequilibrio de corriente

2.7. Distorsión en la Forma de Onda

La distorsión en la forma de onda se define como la desviación de esta con respecto a una onda sinusoidal. Esta desviación se evalúa principalmente por el contenido espectral de la onda.

Las principales distorsiones en la forma de onda que se analizan son:

- **Nivel DC:** Es la presencia de un valor de corriente continua en la forma de onda.
- **Armónicos:** Son componentes sinusoidales en la tensión y/o corriente con frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (50 o 60 Hz). En la figura 2.9, se presenta el contenido armónico de una señal. Para la evaluación del impacto armónico sobre el sistema de potencia en el (PCC) la IEEE Std. 519-1992 propone cuatro indicadores:
 - Distorsión armónica total de tensión (*THD*).
 - Distorsión armónica individual de tensión (*IHD_v*).
 - Factor de distorsión total de demanda (*TDD*).

$$TDD = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{50} i_n^2}}{i_{max}} \quad (2.4)$$

- Distorsión armónica individual de corriente (*IHD_i*).

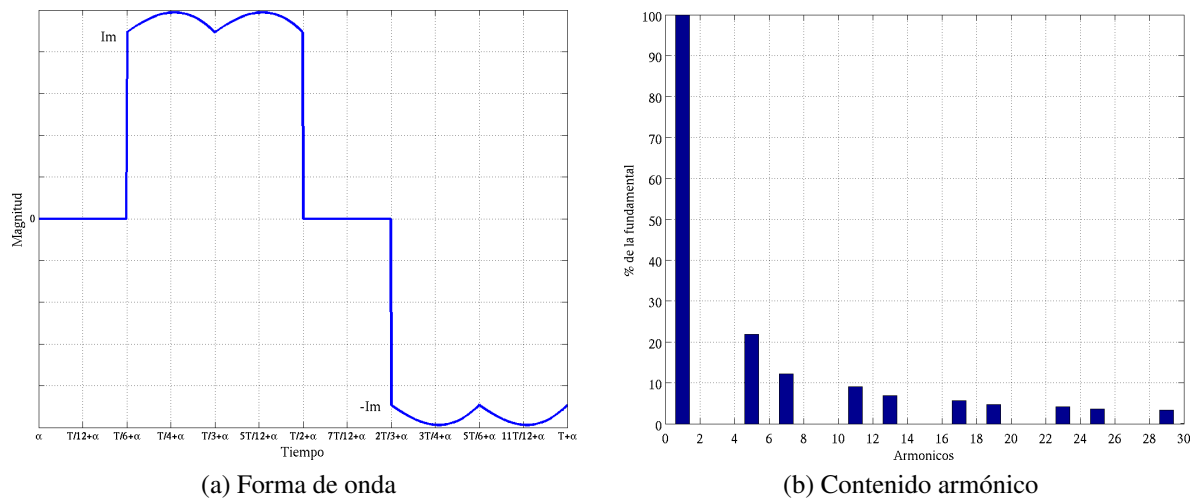


Figura 2.9: Contenido armónico de una señal

- **Interarmónicos:** Son componentes sinusoidales en la tensión y/o corriente con frecuencias que son múltiplos no enteros de la frecuencia fundamental (50 o 60 Hz). La principal fuente de distorsión interarmónica son los convertidores estáticos de frecuencia y los dispositivos de formación de arcos.
- **Mueca o line notching:** Es una perturbación periódica en la tensión producto del funcionamiento de un convertidor de electrónica de potencia cuando la corriente es conmutada de una fase a otra del sistema de potencia. En la figura 2.10 se presenta las muecas de tensión producidas por el proceso de conmutación de un puente rectificador trifásico.

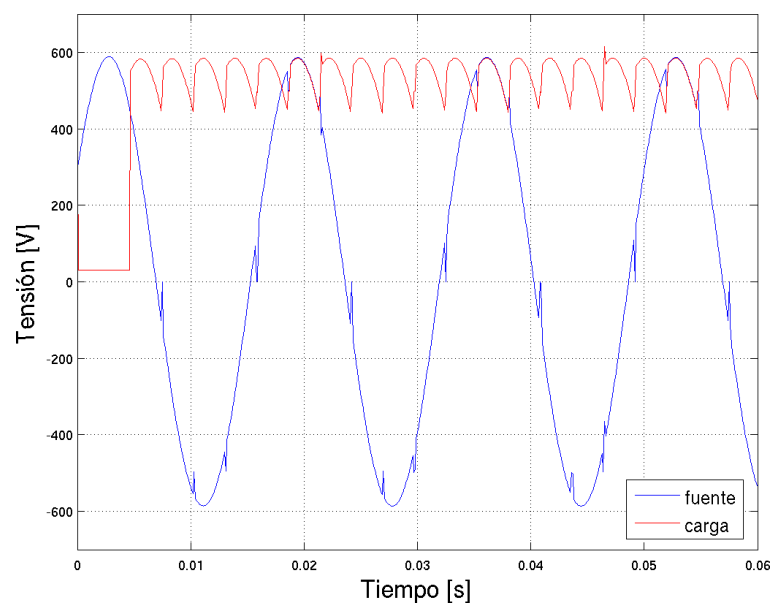


Figura 2.10: Ejemplo de mueca o line notching

- **Ruido:** Son distorsiones superpuestas a las ondas de tensión y/o corriente con un contenido espectral inferior a 200kHz . Ruidos en el sistema de potencia puede ser causados por los dispositivos electrónicos de potencia, equipos de arco eléctrico y fuentes de alimentación conmutadas. En la figura 2.11 se presenta el efecto del ruido sobre la tensión del sistema de potencia.

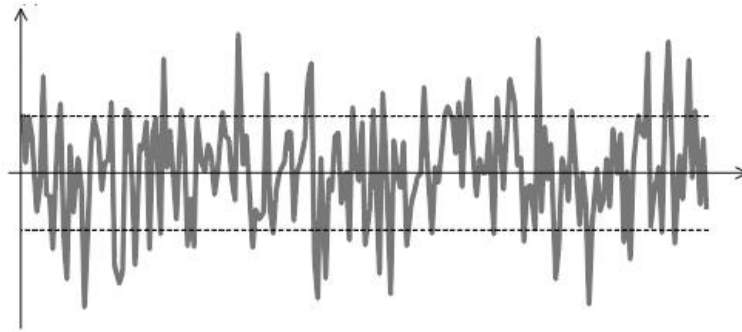


Figura 2.11: Ejemplo de ruido en el sistema de potencia

- **Variaciones de frecuencia:** Se definen como desviaciones de la frecuencia de alimentación de su valor nominal. Esta variación está estrechamente ligada con la variación en la velocidad de rotación de los generadores. En la figura 2.12 se presenta una variación de frecuencia en la tensión del sistema de potencia.

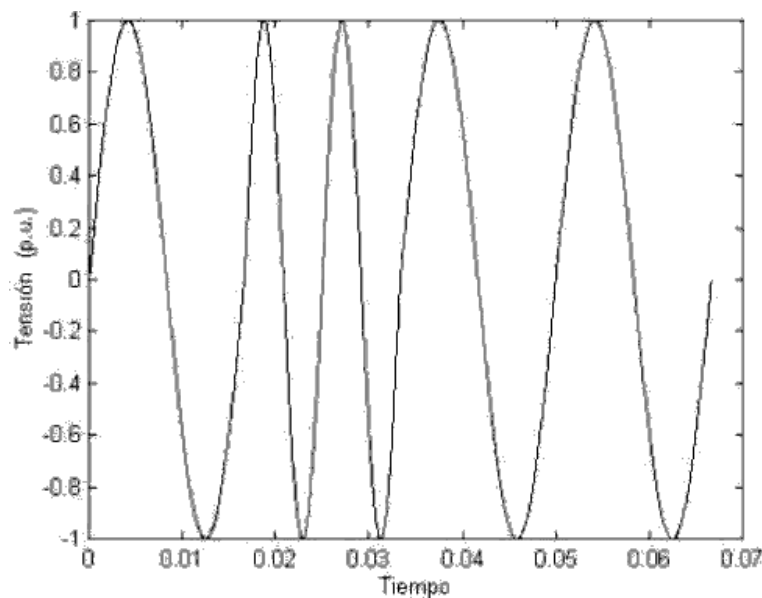


Figura 2.12: Ejemplo de variación de frecuencia

2.8. Característica y Clasificación de los fenómenos Electromagnéticos

Según la IEEE Std. 1159-1995 [1], los fenómenos electromagnéticos en los sistemas de potencia se pueden clasificar de acuerdo a su contenido espectral, su duración y magnitud de tensión como:

Tabla 2.1: Clasificación de los fenómenos electromagnéticos en sistemas de potencia

Categoría			Contenido Espectral	Duración	Magnitud
Transitorio	Impulso	Nanosegundos	$> 5\text{ ns}$	$< 50\text{ ns}$	
		Microsegundos	$> 1\text{ }\mu\text{s}$	$50\text{ ns} \rightarrow 1\text{ ms}$	
		Milisegudos	$> 0,1\text{ ms}$	$> 1\text{ ms}$	
	Oscilatorio	Baja frecuencia	$< 5\text{ kHz}$	$0,3 \rightarrow 50\text{ ms}$	$0 \rightarrow 4\text{ pu}$
		Media frecuencia	$5 \rightarrow 500\text{ kHz}$	$20\text{ }\mu\text{s}$	$0 \rightarrow 8\text{ pu}$
		Alta frecuencia	$0,5 \rightarrow 5\text{ MHz}$	$5\text{ }\mu\text{s}$	$0 \rightarrow 4\text{ pu}$
Variaciones de corta duración	Instantáneas	Sag		$0,5 \rightarrow 30\text{ ciclos}$	$0,1 \rightarrow 0,9\text{ pu}$
		Swell		$0,5 \rightarrow 30\text{ ciclos}$	$1,1 \rightarrow 1,8\text{ pu}$
	Momentáneas	Interrupciones		$0,5\text{ ciclos} \rightarrow 3\text{ s}$	$< 0,1\text{ pu}$
		Sag		$30\text{ ciclos} \rightarrow 3\text{ s}$	$0,1 \rightarrow 0,9\text{ pu}$
		Swell		$30\text{ ciclos} \rightarrow 3\text{ s}$	$1,1 \rightarrow 1,8\text{ pu}$
	Temporales	Interrupciones		$3\text{ s} \rightarrow 1\text{ min}$	$< 0,1\text{ pu}$
		Sag		$3\text{ s} \rightarrow 1\text{ min}$	$0,1 \rightarrow 0,9\text{ pu}$
		Swell		$3\text{ s} \rightarrow 1\text{ min}$	$1,1 \rightarrow 1,2\text{ pu}$
Variaciones de larga duración	Interrupción sostenida			$> 1\text{ min}$	$0,0\text{ pu}$
	Subtensiones			$> 1\text{ min}$	$0,8 \rightarrow 0,9\text{ pu}$
	Sobretensiones			$> 1\text{ min}$	$1,1 \rightarrow 1,2\text{ pu}$
Tensión	Desbalance			Estado Estacionario	$0,5 \rightarrow 2\%$
	Distorsión forma de onda	Nivel DC		Estado Estacionario	$0 \rightarrow 0,1\%$
		Armónicas	$0 \rightarrow 100^{th}$	Estado Estacionario	$0 \rightarrow 20\%$
		Interarmónicas	$0 \rightarrow 6\text{ kHz}$	Estado Estacionario	$0 \rightarrow 2\%$
		Notching		Estado Estacionario	
		Ruido	Banda ancha	Estado Estacionario	$0 \rightarrow 1\%$
	Fluctuaciones		$< 25\text{ Hz}$	Intermitentes	$0,1 \rightarrow 7\%$
Variaciones de la frecuencia industrial				$< 10\text{ s}$	

Circuitos con Interruptores

3.1. Definiciones:

Interruptor: dispositivo que permite la circulación de corriente mediante la apertura o cierre del circuito.

Carga: Conjunto de dispositivos eléctricos aguas abajo del interruptor.

3.2. Circuito Resistivo:

En la figura 3.1, se observa la configuración de un circuito resistivo, alimentado por una fuente de tensión continua. El interruptor Sw , se cierra en $t = t_1$.

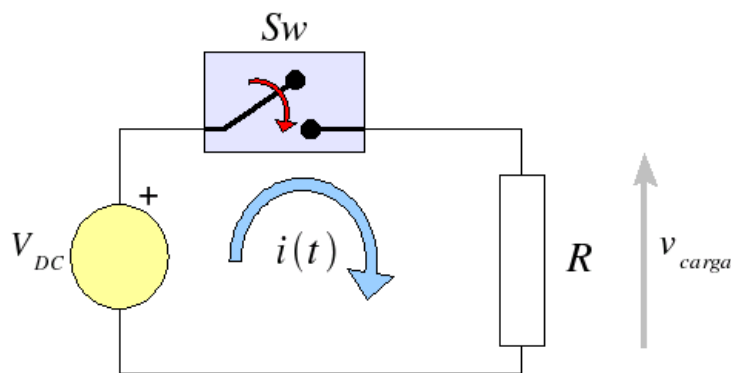


Figura 3.1: Circuito resistivo

Aplicando la ley de Kirchhoff de tensión en el circuito tenemos:

$$v_{fuente}(t) = v_{Sw}(t) + v_{carga}(t) \quad (3.1)$$

Analizando la tensión en cada una de las componentes del circuito para todo instante de tiempo se obtiene:

$$v_{fuente}(t) = V_{DC} \quad \forall \quad t \quad (3.2)$$

$$v_{Sw}(t) = \begin{cases} V_{DC} & \forall \quad t < t_1 \\ 0 & \forall \quad t \geq t_1 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$v_{carga}(t) = \begin{cases} 0 & \forall \quad t < t_1 \\ V_{DC} & \forall \quad t \geq t_1 \end{cases} \quad (3.4)$$

La corriente por el circuito posterior al cierre de interruptor para $t \geq t_1$ es:

$$i(t) = \frac{V_{DC}}{R} \quad (3.5)$$

Para observar los oscilogramas de tensión y corriente de este circuito se simuló, con una carga resistiva de 2Ω y una fuente de tensión de corriente continua de $10V$. El interruptor se cierra a los $0,1s$, permitiendo la circulación de corriente. En las figuras 3.2 y 3.3 se presentan la tensión y corriente en la carga resistiva y la tensión en el interruptor y la fuente respectivamente.

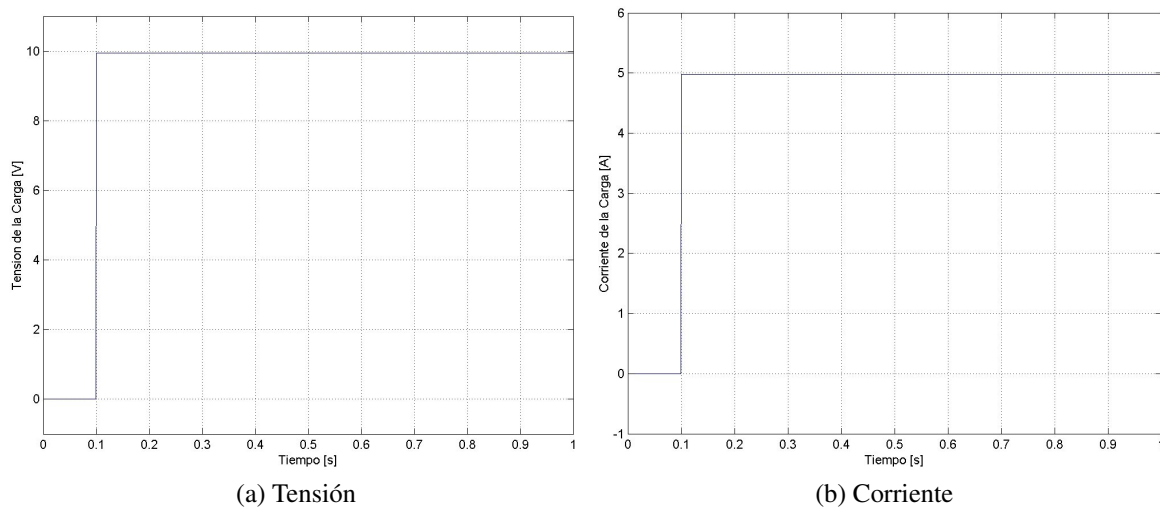


Figura 3.2: Tensión y corriente sobre la Carga Resistiva

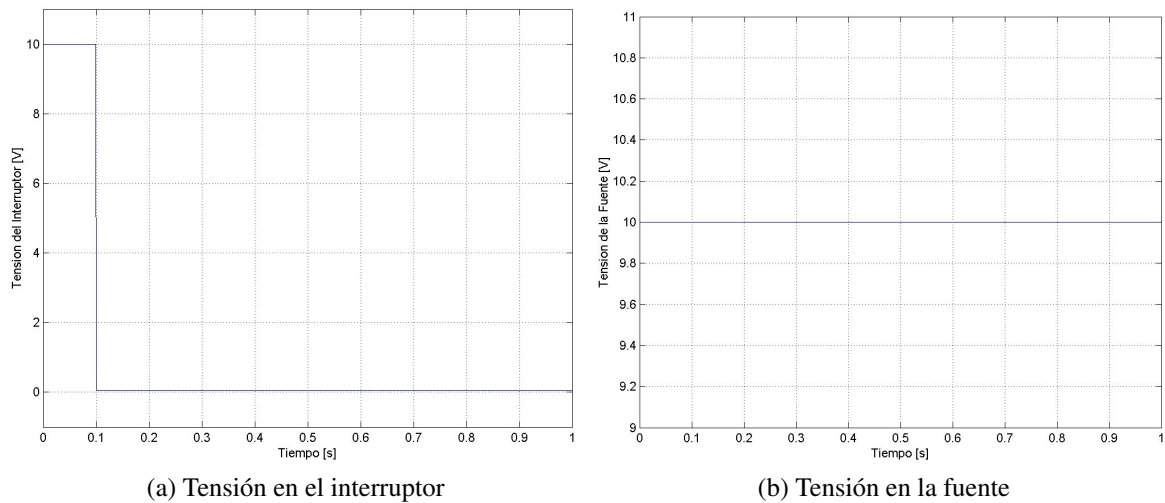


Figura 3.3: Tensión en el interruptor y la fuente para la carga resistiva

3.3. Circuito Resistivo Capacitivo

En la figura 3.4, se observa la configuración de un circuito resistivo capacitivo (RC), alimentado por una fuente de tensión continua. Aplicando el concepto de carga para este circuito, esta estaría conformada por la resistencia y el condensador en serie. El condensador se encuentra cargado a una tensión V_1 antes de la operación del interruptor en $t = t_1$.

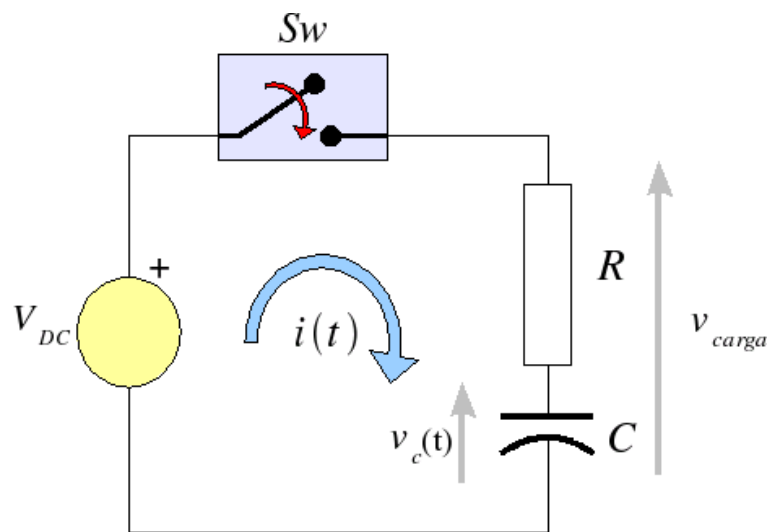


Figura 3.4: Circuito RC

Aplicando la ley de Kirchhoff de tensión en el circuito tenemos:

$$v_{fuente}(t) = v_{Sw}(t) + v_{carga}(t) \quad (3.6)$$

donde:

$$v_{carga}(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

Analizando la tensión en cada una de los elementos del circuito para todo instante de tiempo se obtiene:

$$v_{fuente}(t) = V_{DC} \quad \forall \quad t \quad (3.7)$$

$$v_{Sw}(t) = \begin{cases} V_{DC} - v_c(t) & \forall \quad t \leq t_1 \\ 0 & \forall \quad t > t_1 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$v_{carga}(t) = \begin{cases} v_c(t) & \forall \quad t \leq t_1 \\ V_{DC} & \forall \quad t > t_1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Para encontrar la corriente por el circuito posterior al cierre de interruptor $t \geq t_1$ es necesario resolver la ecuación diferencial que describe el comportamiento del circuito.

$$V_{DC} = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{t_1}^{\infty} i(\tau) d\tau + v_C(t_1) \quad (3.10)$$

$$V_{DC} = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \quad (3.11)$$

3.3.1. Resolución de la Ecuación Diferencial en Corriente

Derivando la ecuación (3.10), se obtiene una ecuación diferencial en corriente para el circuito:

$$0 = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) \quad (3.12)$$

La solución a la ecuación diferencial (3.12), se obtiene como:

$$i(t) = k e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.13)$$

Para encontrar el valor de la constante k es necesario conocer las condiciones iniciales del circuito antes del cierre del interruptor Sw en el tiempo $t = t_1$.

$$i(t_1) = \frac{V_{DC} - v_c(t_1)}{R} \quad (3.14)$$

Al sustituir la corriente en $t = t_1$ en la ecuación (3.13), se obtiene la expresión de la corriente del circuito.

$$\begin{aligned} i(t_1) &= \frac{V_{DC} - v_c(t_1)}{R} = k e^{-\frac{t_1}{RC}} \\ &\downarrow \\ k &= \frac{V_{DC} - v_c(t_1)}{R} e^{\frac{t_1}{RC}} \\ &\downarrow \\ i(t) &= \frac{V_{DC} - v_c(t_1)}{R} e^{-\frac{(t-t_1)}{RC}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Otra forma de encontrar la corriente del circuito es resolver la ecuación diferencial de tensión de la expresión (3.11):

$$\begin{aligned} V_{DC} &= RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \\ v_C(t) &= v_{C_h}(t) + v_{C_p}(t) \\ v_C(t) &= k e^{-\frac{t}{RC}} + V_{DC} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para encontrar el valor de la constante se utiliza las condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} v_C(t_1) &= v_c(t_1) = k e^{-\frac{t_1}{RC}} + V_{DC} \\ &\downarrow \\ k &= (v_c(t_1) - V_{DC}) e^{\frac{t_1}{RC}} \\ &\downarrow \\ v_C(t) &= V_{DC} + (v_c(t_1) - V_{DC}) e^{-\frac{(t-t_1)}{RC}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para encontrar la corriente es necesario multiplicar por C la tensión en el capacitor y derivarla con respecto al tiempo.

3.3.2. Solución de la Ecuación Diferencial Utilizando Transformada de Laplace

Debido a que las condiciones iniciales no están definidas para el tiempo $t = 0$ es necesario utilizar el siguiente cambio de variable:

$$t' = t - t_1 \quad (3.18)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la expresión (3.10), se obtiene:

$$\frac{V_{DC}}{s} = RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{v_c(t_1)}{s} \quad (3.19)$$

$$\frac{V_{DC} - v_c(t_1)}{s} = \left(R + \frac{1}{Cs}\right) I(s)$$

Despejando $I(s)$ de la expresión (3.19) se obtiene:

$$I(s) = \frac{V_{DC} - v_c(t_1)}{s} \cdot \frac{1}{\left(R + \frac{1}{Cs}\right)} = \frac{V_{DC} - v_c(t_1)}{R} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \quad (3.20)$$

Utilizando la anti transformada de Laplace se obtiene:

$$i(t) = \frac{V_{DC} - v_c(t_1)}{R} \cdot e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \quad (3.21)$$

Devolviendo el cambio de variable de la expresión (3.18), se obtiene la corriente por el circuito.

$$i(t) = \frac{V_{DC} - v_c(t_1)}{R} \cdot e^{-\frac{(t-t_1)}{RC}} \quad (3.22)$$

3.3.3. Formas de Onda

En la figura 3.5 se puede observar las formas de onda de tensión y corriente de este circuito, para una carga resistiva de 2Ω , capacitiva de $80mF$ y una fuente de tensión de corriente continua de $10V$. El interruptor se cierra a los $0,1s$, permitiendo la circulación de corriente. En la figura 3.6 se presentan la tensión en el interruptor y la fuente.

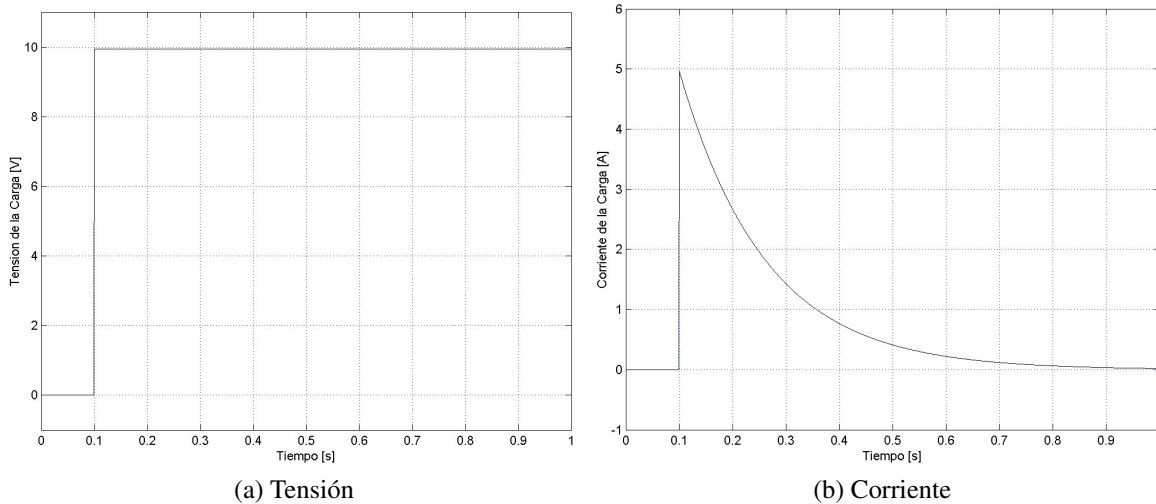


Figura 3.5: Tensión y corriente sobre la carga resistiva capacitiva

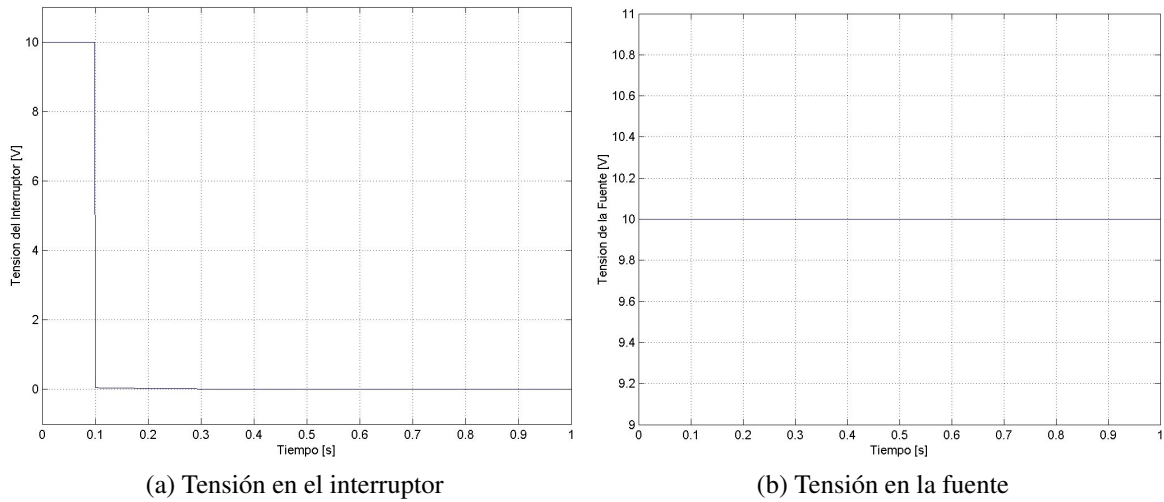


Figura 3.6: Tensión en el interruptor y la fuente para la carga resistiva capacitiva

3.4. Circuito Resistivo Inductivo

En la figura 3.7, se presenta un circuito resistivo inductivo alimentado por una fuente de corriente continua, el interruptor es accionado en $t = t_1$.

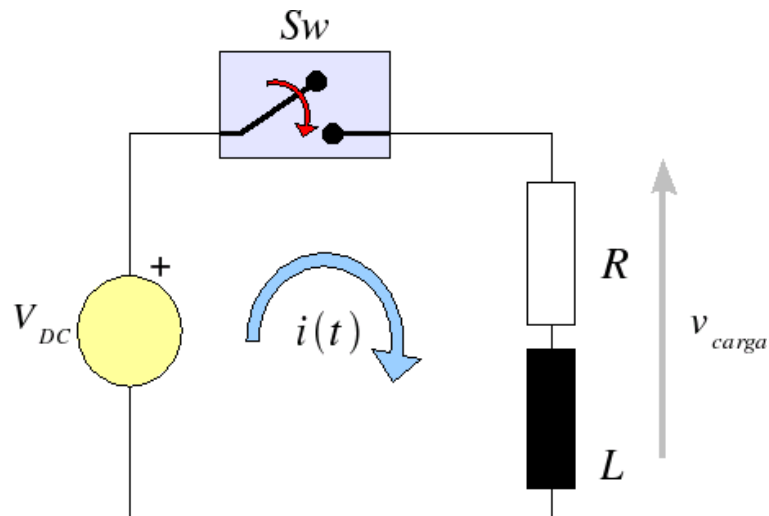


Figura 3.7: Circuito RL

Para encontrar la corriente para $t \geq t_1$, se resuelve la ecuación diferencial de primer orden que describe el circuito.

3.4.1. Resolución de la Ecuación Diferencial en Corriente:

La condición inicial al operara el interruptor de corriente es cero debido a que este se encuentra en estado abierto.

$$V_{DC} = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \quad (3.23)$$

$$i(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_{DC}}{R}$$

Sustituyendo el valor de la condición inicial se encuentra el valor de la constate k .

$$i(t_1) = ke^{-\frac{R}{L}t_1} + \frac{V_{DC}}{R}$$

$$\downarrow$$

$$k = -\frac{V_{DC}}{R} e^{\frac{R}{L}t_1} \quad (3.24)$$

$$\downarrow$$

$$i(t) = \frac{V_{DC}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)} \right)$$

3.4.2. Resolución de la Ecuación Diferencial por Transformada de Laplace

Aplicando la transformada de Laplace a la expresión (3.23) y el cambio de variable de la ecuación (3.18), se obtiene:

$$\frac{V_{DC}}{s} = RI(s) + LsI(s)$$

$$\frac{V_{DC}}{s} = (R + Ls)I(s) \quad (3.25)$$

Despejando $I(s)$ de la expresión (3.25), se obtiene:

$$I(s) = \frac{V_{DC}}{s} \cdot \frac{1}{(R + Ls)} = \frac{V_{DC}}{R} \cdot \frac{1}{\left(1 + s\frac{L}{R}\right)} = \frac{V_{DC}}{L} \cdot \frac{1}{\left(\frac{R}{L} + s\right)} \quad (3.26)$$

Aplicando fracciones parciales a la expresión (3.26), resulta:

$$I(s) = \frac{V_{DC}}{Rs} - \frac{V_{DC}}{\left(s + \frac{R}{L}\right)R} \quad (3.27)$$

Realizando la anti transformada de Laplace, de la expresión (3.27) y devolviendo el cambio de variable ($t' = t - t_1$), se obtiene:

$$i(t) = \frac{V_{DC}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t'}\right) = \frac{V_{DC}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}\right) \quad (3.28)$$

3.4.3. Formas de Onda

En la figura 3.8 se puede observar la tensión y corriente en la carga, para una carga resistiva de 2Ω , inductiva de $80mH$ y una fuente de tensión de corriente continua de $10V$. El interruptor se cierra a los $0,1s$, permitiendo la circulación de corriente.

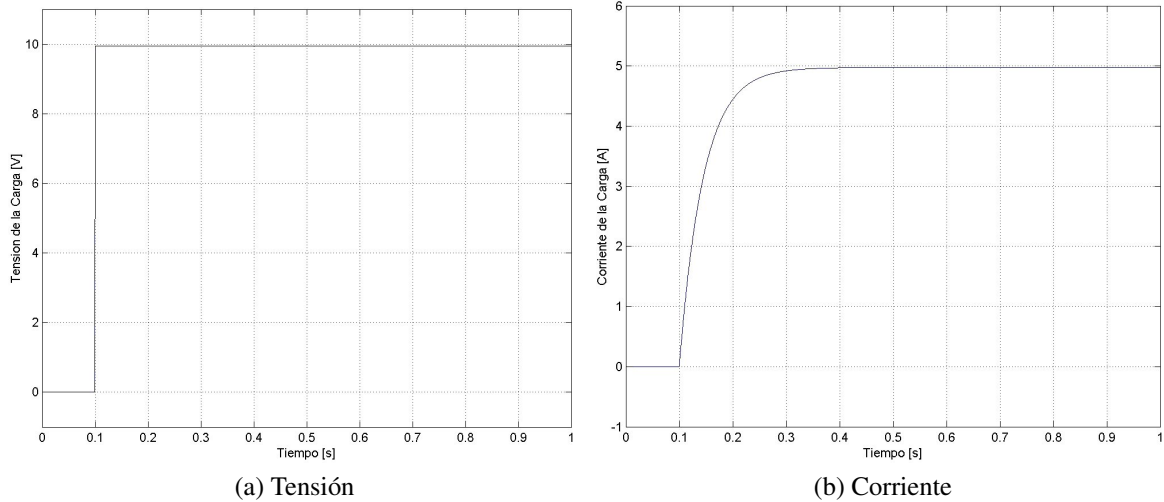


Figura 3.8: Tensión y corriente en la carga resistiva inductiva

3.5. Ejemplo

En la figura 3.9, se observa un circuito resistivo inductivo alimentado por una fuente de tensión variable en el tiempo de la forma: $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t + \nu) + V_{DC}$, se debe encontrar la corriente que circula por el circuito.

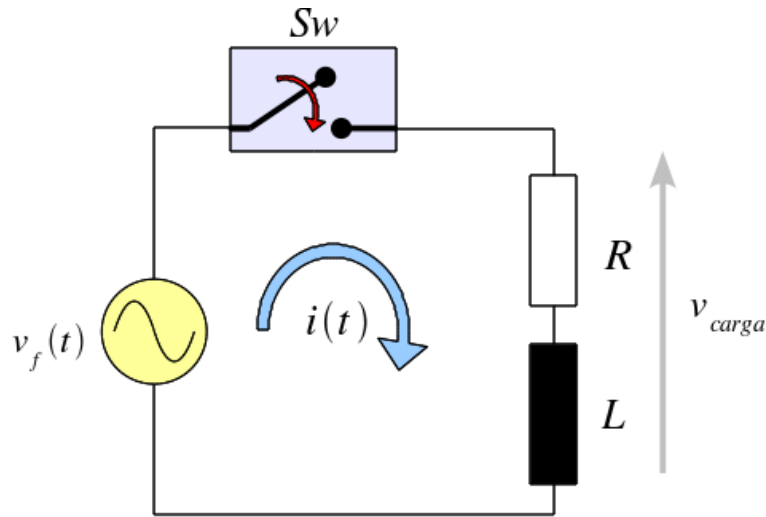


Figura 3.9: Circuito resistivo inductivo

3.5.1. Solución Homogénea

$$i_h(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.29)$$

Multiplicando el numerador y denominador de la exponencial por ω se obtiene:

$$i_h(t) = ke^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \quad (3.30)$$

donde:

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}$$

3.5.2. Solución Particular Fuente Constante

$$i_p(t) = -\frac{V_{DC}}{R} \quad (3.31)$$

3.5.3. Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)

Encontrando la corriente en régimen permanente, utilizando fasores obtenemos:

$$i_p(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t + \nu - \varphi) \quad (3.32)$$

donde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

3.5.4. Solución Total

Condición inicial de corriente en el circuito es cero, debido a que el interruptor se encuentra abierto $i(t_1) = 0$:

$$\begin{aligned} i(t_1) = 0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t_1 + \nu - \varphi) - \frac{V_{DC}}{R} + k e^{-\frac{\omega t_1}{\tan(\varphi)}} \\ &\downarrow \\ k &= \left(\frac{V_{DC}}{R} - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t_1 + \nu - \varphi) \right) e^{\frac{\omega t_1}{\tan(\varphi)}} \\ &\downarrow \\ i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t + \nu - \varphi) - \frac{V_{DC}}{R} + \left(\frac{V_{DC}}{R} - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t_1 + \nu - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \omega t_1)}{\tan(\varphi)}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Sacando factor común $\sqrt{2}V/Z$, tenemos:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left(\sin(\omega t + \nu - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\omega t_1 + \nu - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \omega t_1)}{\tan(\varphi)}} \right) \quad (3.34)$$

donde:

$$m = \frac{V_{DC}}{\sqrt{2}V}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z}$$

Este mismo ejercicio se puede aplicar diferentes métodos para encontrar la solución particular a las fuentes forzantes, como por ejemplo la solución clásica o Laplace. Estos métodos son más laboriosos que el de régimen sinusoidal permanente y se obtiene la misma respuesta.

3.5.4.1. Solución Particular por el Método Clásico.

$$i_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.35)$$

$$\frac{di_p(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

Sustituyendo la expresión de la solución particular (3.35) en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$v_f(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$v_f(t) = R(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + L(-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)) \quad (3.36)$$

$$v_f(t) = (RA + B\omega L) \cos(\omega t) + (RB - A\omega L) \sin(\omega t)$$

Igualando término a término la ecuación (3.36), resulta:

$$\sqrt{2}V \cos(\nu) \sin(\omega t) = (RB - A\omega L) \sin(\omega t) \quad (3.37)$$

$$\sqrt{2}V \sin(\nu) \cos(\omega t) = (RA + B\omega L) \cos(\omega t)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de la expresión (3.37) se obtienen el valor de A y B

$$B = \sqrt{2}V \cos(\nu - \varphi) \quad (3.38)$$

$$A = \frac{\sqrt{2}V \sin(\nu)}{R} - \frac{B\omega L}{R}$$

donde:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \quad (3.39)$$

3.5.5. Formas de Onda

En la figura 3.10 se observa la tensión y corriente en la carga con una carga resistiva de 2Ω , inductiva de $80mH$ y una fuente de tensión de $v_f(t) = 10 + 10\sin(37t)$. El interruptor se cierra a los $0,1s$, permitiendo la circulación de corriente.

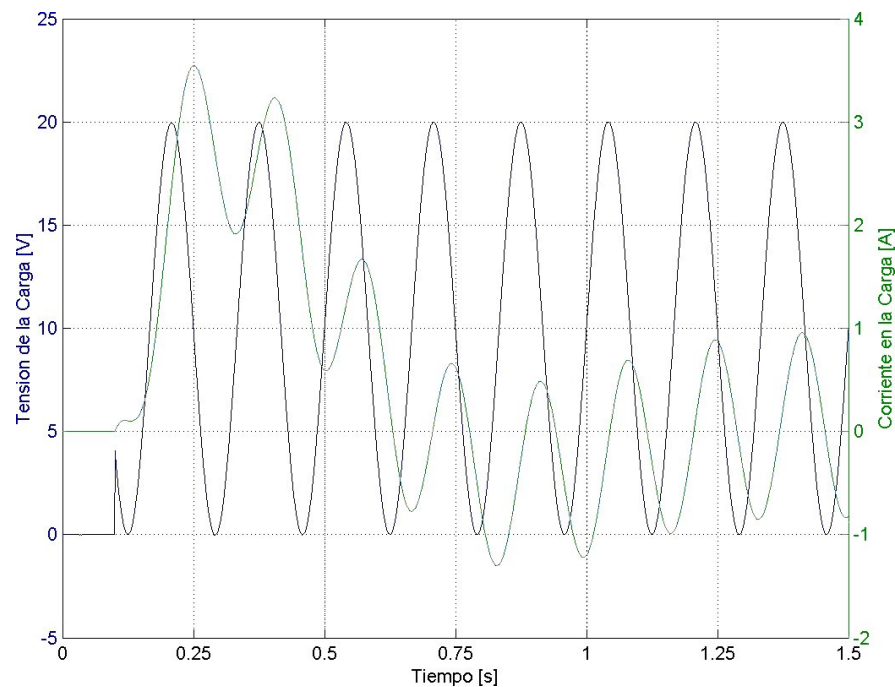


Figura 3.10: Tensión y corriente en la carga resistiva inductiva

3.6. Ejercicios

1. Determine la tensión $v_c(t)$ y la corriente $i(t)$ por el circuito de la figura 3.11 si la condición inicial de la tensión del condensador es $v_c(0) = V_1$.

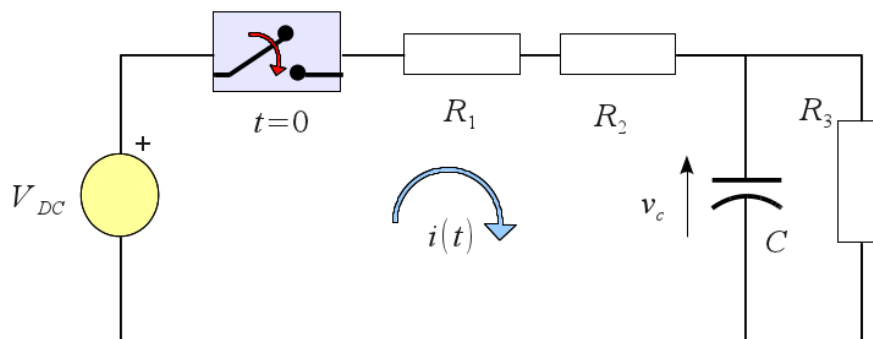


Figura 3.11: Ejercicio 1

2. Determine la expresión de la corriente $i(t)$ y de la tensión del condensador $v_c(t)$ para $t \geq 0$ para el circuito de la figura 3.12. Si $C = 0,7\text{mF}$, $L = 15\text{mH}$, $V_{DC} = 10\text{V}$ y $R = 5\Omega$.

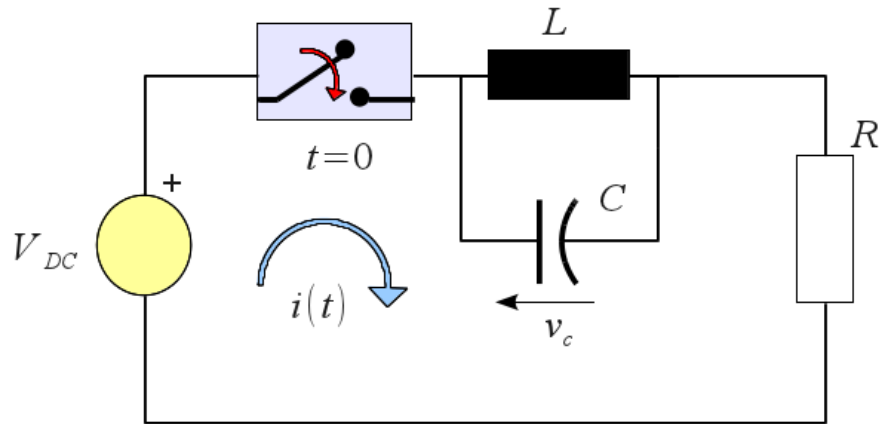


Figura 3.12: Ejercicio 2

3. Para el circuito de la figura 3.13, determine el tiempo en el cual la corriente por el interruptor S_{w_2} para por cero. Para este tiempo determine la tensión sobre el capacitor. Dibuje las formas de onda de la tensión y corriente por los elementos del circuito.

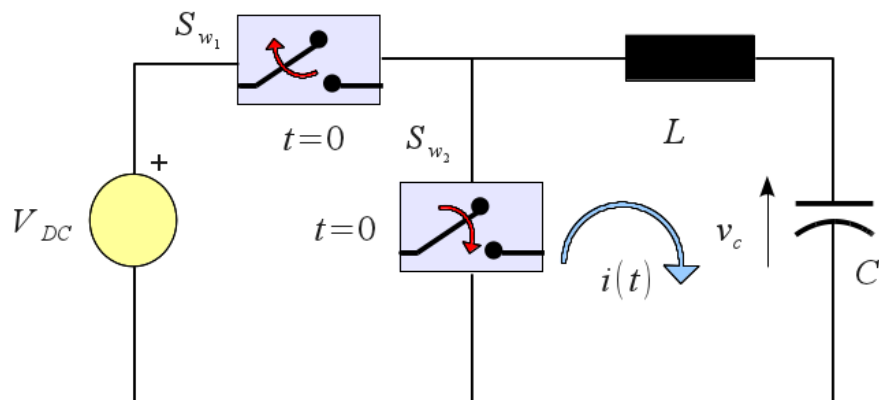


Figura 3.13: Ejercicio 3

Parte II

Aspectos Generales y Dispositivos

Introducción

4.1. Reseña Histórica

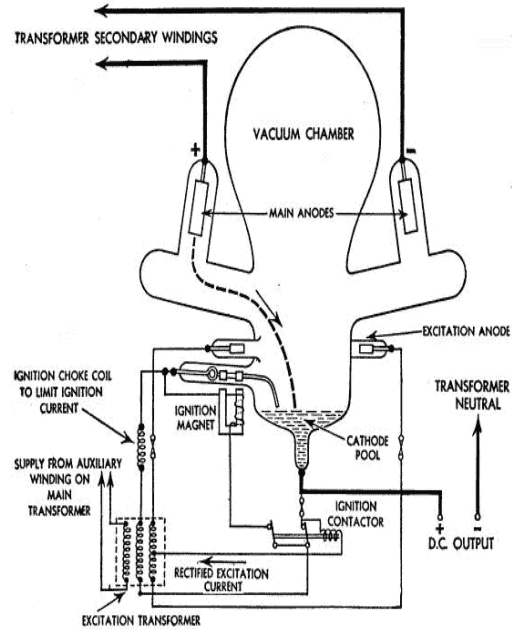
La electrónica de potencia se desarrollo en base a las técnicas de conversión de energía alterna a continua, presentes a inicios del siglo XX, con el desarrollo de los sistemas ferroviarios y masivos de pasajeros. En 1902 Cooper - Hewitt desarrollan el primera válvula de descarga parcial de gas, permitiendo funciones periódicas de conexión y desconexión. Estas válvulas podrían manejar hasta un kilo amper (1 kA) a varios kilos voltios de tensión.

Para 1914 Langmuir descubre el principio de control por rejilla de una descarga de arco, esto permite que Loulon en 1922 lo utilice para el control de la tensión mediante una válvula de mercurio con control de encendido denominada “tiratrón” . Esta componente podría soportar tensiones de hasta 15 kV y corrientes de 20 A .

Durante 1930 un gran número de instalaciones de rectificación se encontraban en operación con capacidades hasta los mega vatios, en estas se utilizaban válvulas de mercurio en el proceso de conversión de energía. Estas instalaciones se utilizaban para cargar baterías desde las redes de corriente alterna monofásicas y trifásicas, para los sistemas de transporte. Con los años, nuevas aplicaciones fueron utilizando las instalaciones rectificadoras lo que impulso aun más su desarrollo y ampliación en la conversión de altos bloques de energía. Entre las aplicaciones con mayor consumo de energía tenemos el alumbrado y el transporte masivo de personas. En la figura 4.1, se presenta una válvula de mercurio utilizada para rectificación en 1930 por parte de la empresa Philips y el esquema de un tiratrón, respectivamente.



(a) Válvula de mercurio Philips



(b) Esquema de un tiratrón

Figura 4.1: Válvulas de mercurio

Durante los finales de la década de los treinta, se empiezan a instalar estaciones rectificadoras de baja potencia a partir de diodos semiconductores de potencia. En 1950 los Lab. Bell desarrollan el primer tiratrón en base a la tecnología semiconductora y en 1958 la General Electric lo comercializa con el nombre de “Rectificador de Silicio Controlado (SCR)” lo cual inicia un nuevo impulso de la electrónica de potencia lo que trajo como consecuencia que otros dispositivos de baja potencia se fabricasen para requerimientos de alta potencia, entre estos dispositivos encontramos a los BJT, MOSFET, FET, GTO, SITH, MCT e IGBT.

4.2. Funciones Básicas de los Convertidores Electrónicos de Potencia

La electrónica de potencia se utiliza principalmente para la conversión de la energía eléctrica, mediante operaciones controladas de interrupción de tensión y/o corriente, tanto en los sistemas de corriente alterna como de corriente continua. En la figura 4.2, se presentan el esquema de las cuatro formas de conversión de energía eléctrica entre los sistemas de corriente alterna y continua

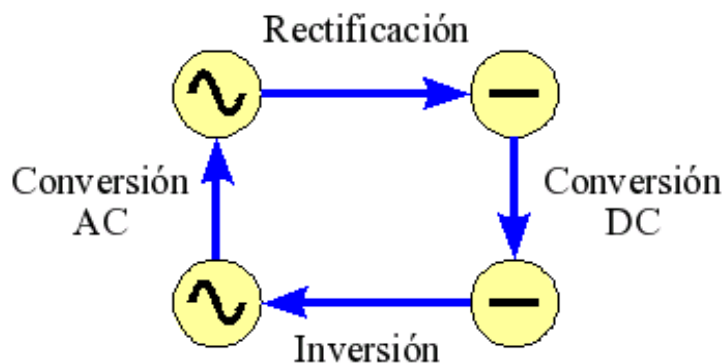


Figura 4.2: Conversión de energía eléctrica

Rectificación: es el proceso de transformación de AC a DC.

Inversión: es el proceso de transformación de DC a AC.

Conversión DC: es el proceso de transformación de DC a DC de distinto nivel.

Conversión AC: es el proceso de transformación de AC a AC de distinto nivel y/o frecuencia.

Estas cuatro formas de conversión de energía son realizada con los puentes convertidores electrónicos de la figura 4.3. Estos puentes se pueden utilizar para acoplar sistemas de corriente continua y alterna, así como para alimentar, conectar y desconectar cargas en ambos sistemas de alimentación.

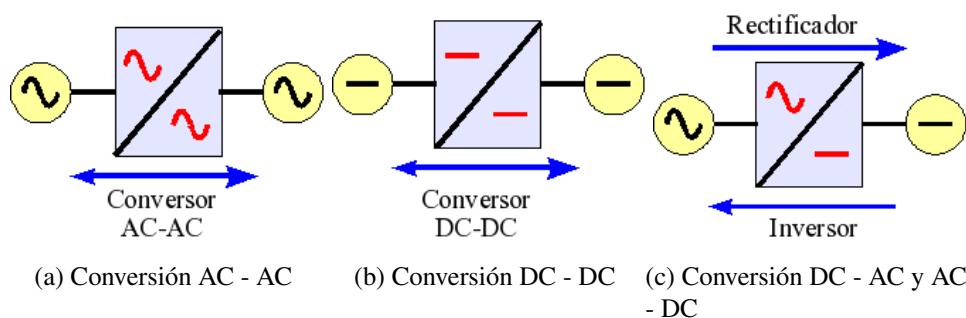


Figura 4.3: Convertidores electrónicos de potencia

4.3. Aplicaciones

La electrónica de potencia se utiliza en diversos campos, entre las aplicaciones mas importantes se encuentran:

4.3.1. Residencial:

- Refrigeradores.

- Congeladores.
- Aires acondicionados.
- Iluminación.
- Equipos electrónicos (computadores y equipos de entretenimiento).
- Puertas de estacionamiento.
- Iluminación.
- Computadores.
- Electrodomésticos.

4.3.2. Comercial:

- Aire acondicionado.
- Ventiladores.
- Calefacción.
- Iluminación.
- Equipos de oficina.
- Elevadores.
- Escaleras mecánicas.
- Fuentes ininterrumpidas de potencia (*UPS*).

4.3.3. Industrial:

- Bombas.
- Compresores.
- Control de máquinas eléctricas.
- Robótica.
- Hornos de inducción y arco.

- Láser industriales.
- Electro filtros.
- Calderas.
- Soldadoras.

4.3.4. Transporte:

- Control de vehículos eléctricos.
- Cargadores de batería.
- Locomotoras eléctricas.
- Subterráneos y Tranvías.
- Trole buses.

4.3.5. Transmisión y Otras Utilidades:

- Transmisión en corriente continua (*HVDC*).
- Compensadores de reactivos (*SVS*).
- Fuentes suplementarias de energía.
- Fuentes de poder.

4.4. Dispositivos Semiconductores de Potencia

4.4.1. Diodo

Es el dispositivo más básico de la electrónica de potencia, esta constituido por una juntura semiconductor PN su encendido se realiza cuando la tensión entre su ánodo y cátodo supera la tensión de ruptura de la componente ($v_{ak} \geq v_{to}$). Esta tensión de ruptura se encuentra en baja potencia alrededor de $0,7V$ para componentes en silicio y en $0,3V$ para germanio. En electrónica de potencia los diodos son de silicio y su tensión de ruptura esta en el rango de $1V$ a $2V$. En la figura 4.4, se presenta el símbolo eléctrico del dispositivo, su esquema como semiconductor y una foto de estas dispositivos.

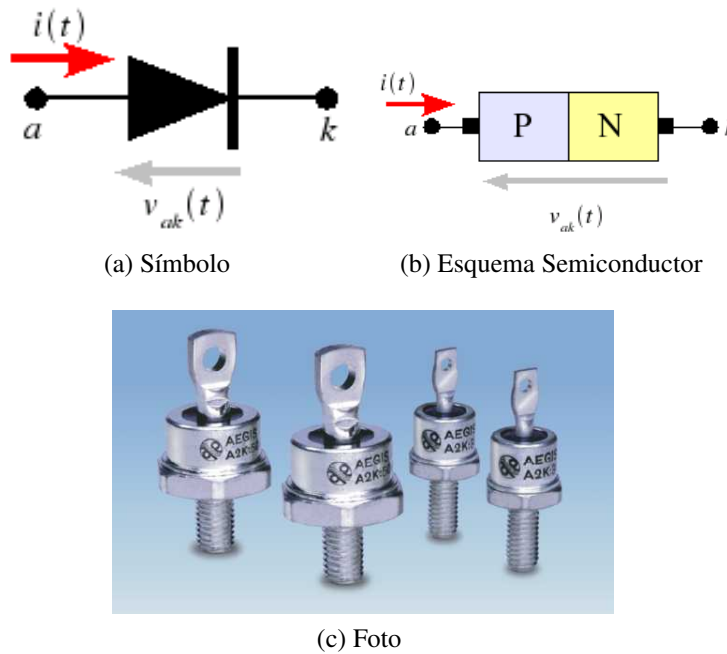


Figura 4.4: Diodo

El apagado de esta componente se realiza cuando la corriente cruce por cero ($i_D = 0$) lo cual origina la restitución de la barrera de potencial en la juntura PN. En la figura 4.5a, se presenta la curva de tensión corriente del diodo, esta característica depende de la temperatura de operación de la componente. En la gráfica se puede observar que la componentes no comienza a conducir corriente hasta que la tensión entre sus terminales no es mayor a la tensión de ruptura ($v_{ak} \geq v_{to}$), generalmente esta información así como el inverso de la pendiente de curva en la zona de conducción (R_D) son suministrados por el fabricante en la hoja de datos del dispositivo. Debido a que la tensión de ruptura de los diodo es inferior al 0,1 % de la tensión en conducción se puede idealizar la curva característica de la componente mostrada en la figura 4.5a, para los fines de análisis y consideraciones del efecto sobre la carga y red de alimentación, a la característica que se muestra en la figura 4.5b.

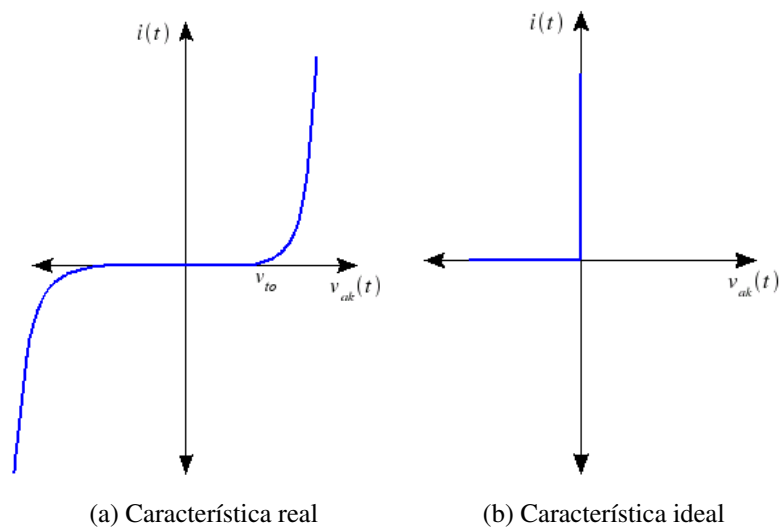


Figura 4.5: Características del diodo

En la tabla 4.1, se presentan las principales características de los diodos que existen actualmente en el mercado:

Tabla 4.1: Tipos de diodos

Tipo	Tensión (kV)	Corriente (kA)	Frecuencia (kHz)
Uso General	5.0	5.0	1.0
	6.0	3.5	1.0
	0.6	9.57	1.0
	2.8	1.7	20.0
Alta Velocidad	4.5	1.95	20.0
	6.0	1.1	20.0
	0.6	0.017	30.0
Schottky	0.15	0.08	30.0

4.4.2. Tiristor

El Tiristor o SCR esta conformado por tres junturas NP en serie, este dispositivo reemplazo al los tiratrones y posee control de encendido a través del suministro de un pulso de corriente en el orden de los 20mA en la compuerta de disparo o gate, adicionalmente requiere polarización ánodo cátodo positiva ($v_{ak} > 0$). Su apagado al igual que los diodos depende de que la corriente cruce por cero. En la figura 4.6, se presenta su simbología, terminales y esquema como semiconductor. Adicional-

mente, en la figura 4.7 se presenta la forma de construir un tiristor a partir de dos transistores BJT (PNP y NPN).

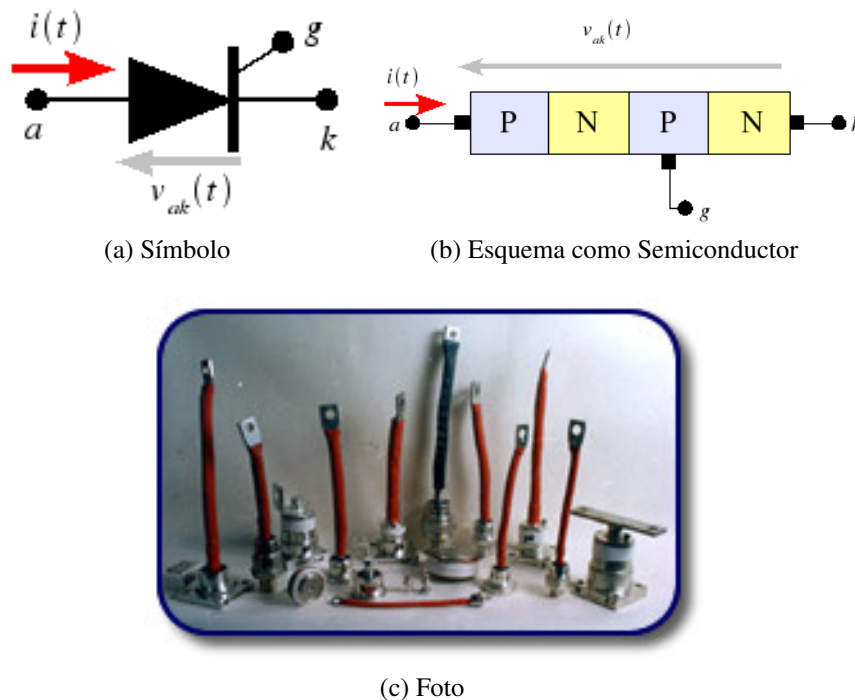


Figura 4.6: Tiristor o SCR

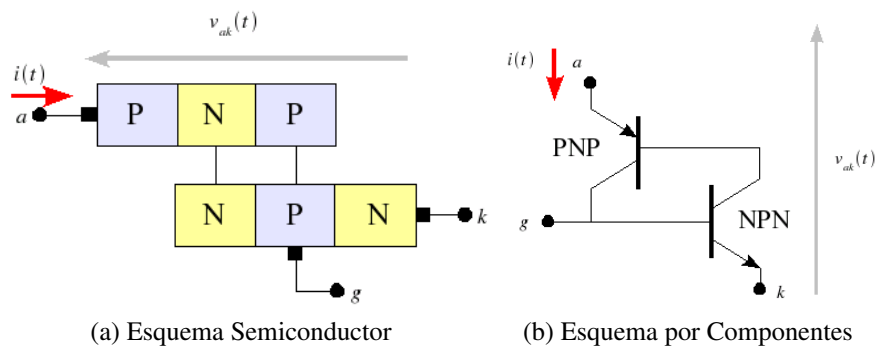


Figura 4.7: Tiristor a partir de transistores BJT

En la figura 4.8a, se presenta la característica tensión corriente del dispositivo, la tensión de ruptura de los tiristores se encuentra entre 1V y los 2V aproximadamente. Al igual que los diodos, la tensión de ruptura de los tiristores es inferior al 0,1% de la tensión en conducción, esto permite idealizar la curva característica a la mostrada en la figura 4.8b.

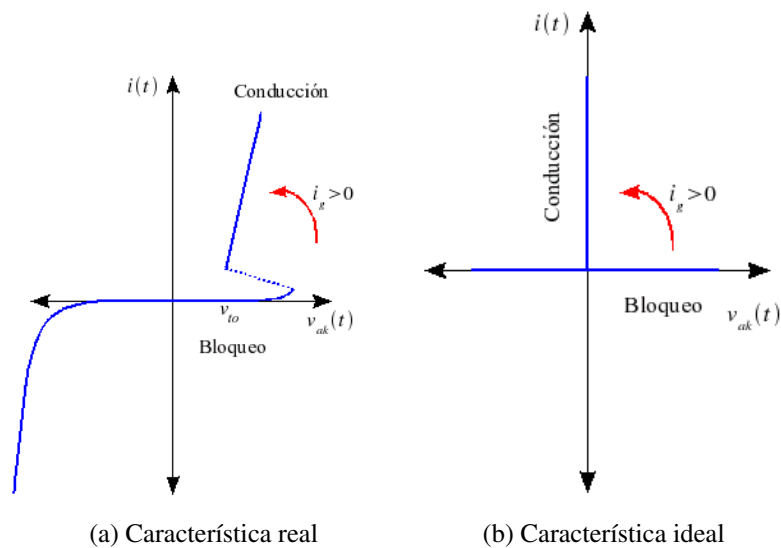


Figura 4.8: Característica del tiristor

En la tabla 4.2, se presentan las principales características de los tiristores que existen actualmente en el mercado:

Tabla 4.2: Tipos de tiristores

Tipo	Tensión (kV)	Corriente (kA)	Frecuencia (kHz)
Bloque Inverso	4.5	3.0	20.0
	6.0	2.3	20.0
	4.5	3.7	20.0
Conmutados por línea	6.5	4.2	0.06
	2.8	1.5	0.06
	5.0	4.6	0.06
	5.0	3.6	0.06
	5.0	5.0	0.06
Alta Velocidad	2.8	1.85	20.0
	1.8	2.1	20.0
Bidireccionales	4.2	1.92	20.0
RCT (Con diodo en antiparalelo)	2.5	1.0	20.0
Conducción Inversa	2.5	1.0	5.0
Gatt (Tracción)	1.2	0.40	20.0
Fototiristor o Lumínicos	6.0	1.5	0.400

4.4.3. Triac

El Triac esta conformado por dos tiristores en antiparalelo, también se le conoce como relé de esta sólido y su aplicación más común es en los dimer de luz para bombillos incandescentes. Ambos tiristores se construyen sobre la misma pastilla de silicio con la finalidad que tengan características similares a fin que la onda sea simétrica en ambos semiciclos de operación, esta componente es bidireccional en corriente. En la figura 4.9, se presenta el símbolo del dispositivo.

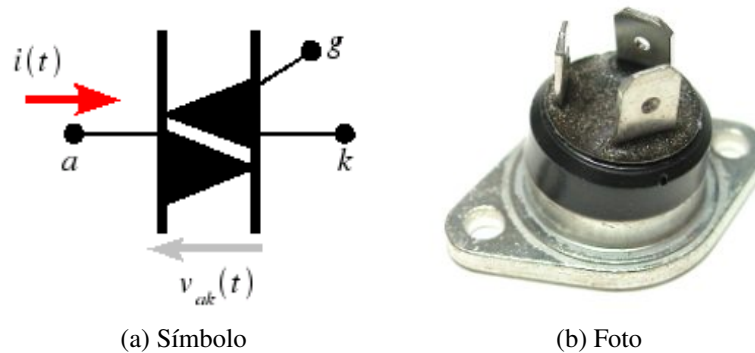


Figura 4.9: Triac

La ventaja de utilizar este dispositivo en lugar de dos tiristores en configuración anti paralelo es que solo se requiere un circuito de disparo. En la figura 4.10a, se presenta la característica de tensión corriente del dispositivo. En la figura 4.10b, se presenta la característica ideal de la componente que se utilizara para el análisis tanto en la carga como en la fuente de alimentación.

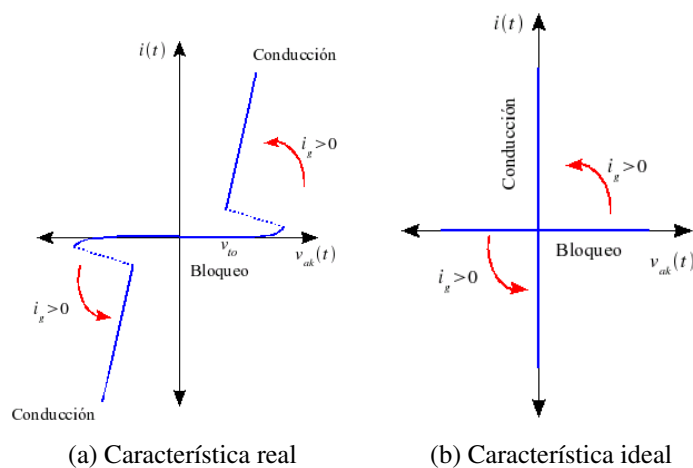


Figura 4.10: Característica del triac

En la tabla 4.3, se presentan las principales características de los triac que existen actualmente en el mercado:

Tabla 4.3: Tipos de triac

Tipo	Tensión (kV)	Corriente (kA)	Frecuencia (kHz)
Uso General	1.2	0.3	0.4

4.4.4. Tiristores Auto Desactivables

Estos dispositivos presentan control de encendido y apagado a través de la compuerta, dependiendo la tecnología de diseño los requerimientos de encendido y apagado difieren entre uno y otro. Para el caso del GTO que se basa en la tecnología de los tiristores se requiere para su encendido tensión positiva ánodo cátodo y un pulso de corriente por el gate de $20mA$, mientras que para el apagado se requiere un pulso de corriente que puede oscilar hasta un 10 % de la corriente de conducción. El MCT que se basa en la tecnología de los transistores BJT requiere para su encendido y apagado, la existencia o no de un pulso de corriente, este pulso depende de la ganancia h_{fe} del componente y de la corriente de conducción. El SITH esta basado en la tecnología de los MOSFET y requiere para el encendido y apagado un pulso de tensión en el gate adicionalmente de la polarización en directo al igual que el MCT. Otros tiristores auto desactivables de tecnología híbrida son: el MTO fue desarrollado por Silicon Power Company y es una combinación de un GTO y un MOSFET para realizar el apagado de la componente. El ETO es un dispositivo que combina el MOS y GTO tomando las ventajas de ambas componentes, el manejo de potencia del GTO y el encendido y apagado por tensión del MOS. El ETO fue inventado en el Virginia Power Electronics Center, en colaboración con SPO. El IGCT es la combinación de un GTO de conmutación permanente, con un activador de compuerta en tarjeta de circuito impreso multicapa que toma la corriente del cátodo por un $1\mu s$ y la aplica en el gate para el apagado de la componente. En la figura 4.11, se presenta el símbolo de los diferentes tiristores auto desactivables. En la figura 4.12 se presenta la foto de un GTO.

En la figura 4.13a, se presenta la característica de tensión corriente de los tiristores auto desactivables. A igual que los tiristores la tensión de ruptura de los componentes auto desactivables son menores al 0,1 % de la tensión de diseño por lo cual la característica de la figura 4.13a, se puede idealizar a fines de realizar lo análisis del impacto en la carga y fuente de alimentación de convertidores construidos con este tipo de dispositivo. Se puede destacar que estos componentes solo permiten la conducción unidireccional de la corriente. En la figura 4.13b, se presente la característica ideal de los tiristores auto desactivables.

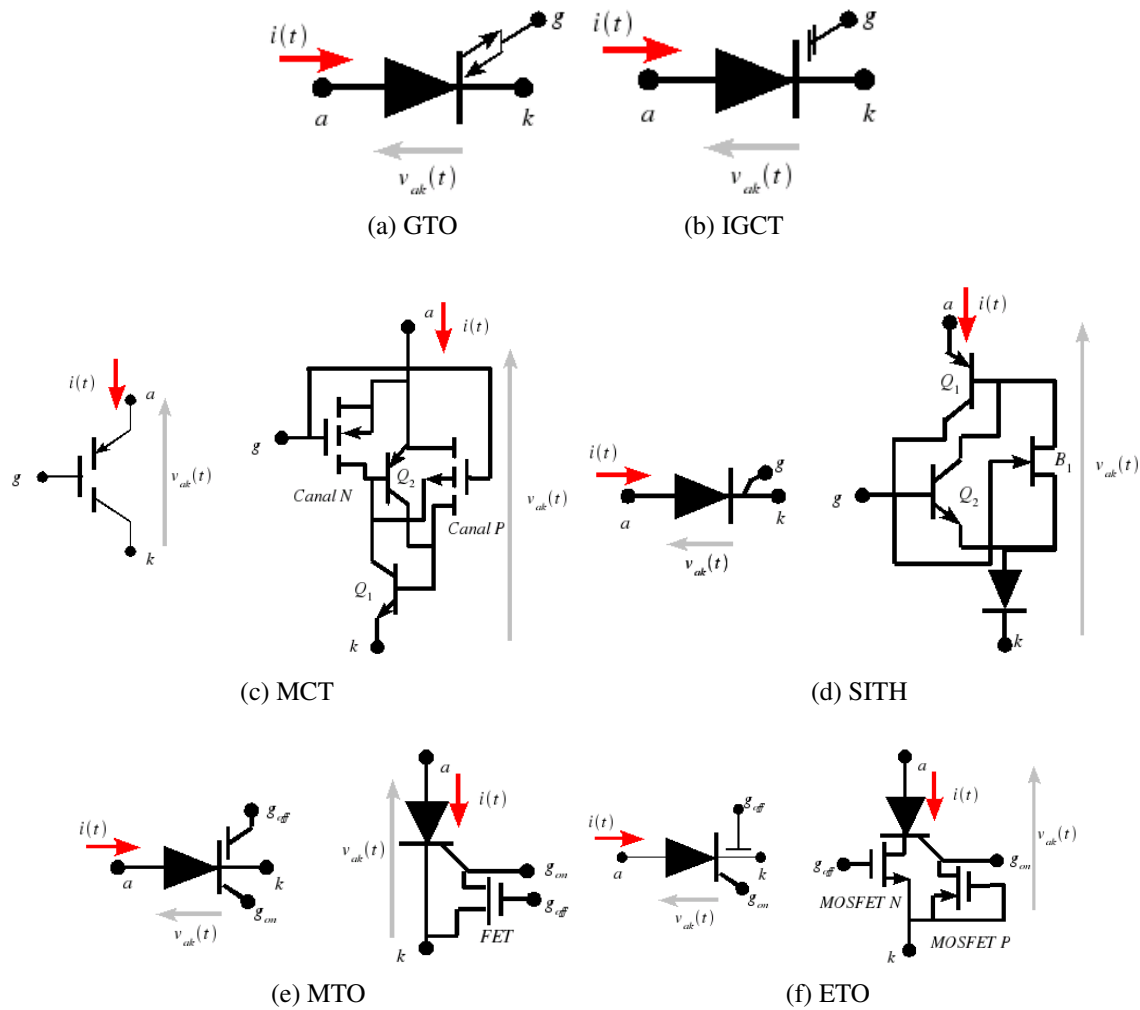


Figura 4.11: Tiristores auto desactivables (símbolo y esquema)



Figura 4.12: GTO

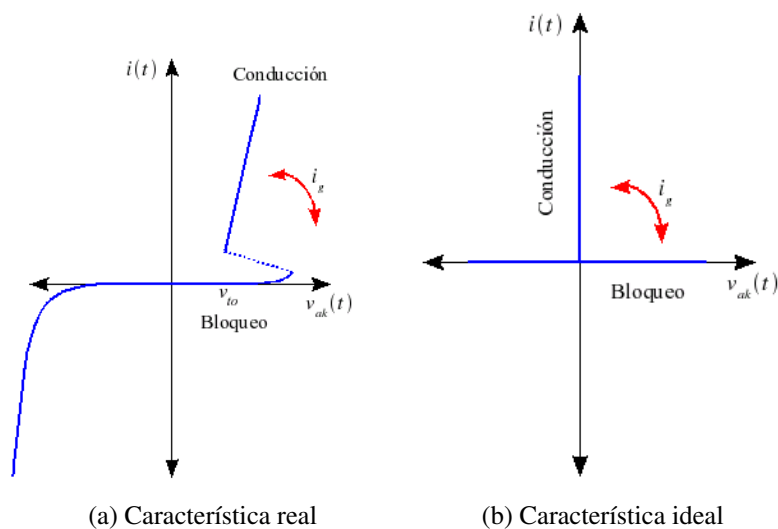


Figura 4.13: Característica tiristores autodesactivables

En la tabla 4.4, se presentan las principales características de los tiristores auto desactivables que existen actualmente en el mercado:

Tabla 4.4: Tipos de tiristores auto desactivables

Tipo	Tensión (kV)	Corriente (kA)	Frecuencia (kHz)
GTO	4.5	4.0	10.0
HD-GTO	4.5	3.0	10.0
Pulso-GTO	5.0	4.6	10.0
MCT	4.5	0.25	5.0
	1.4	0.065	5.0
MTO	4.5	0.5	5.0
ETO	4.5	4.0	5.0
IGCT	4.5	3.0	5.0
SITH	4.0	2.2	20.0

4.4.5. Transistores BJT

Los transistores BJT más utilizados en la electrónica de potencia son los NPN, y su operación se centra en corte y saturación, es decir, como interruptor electrónico. En la figura 4.14, se presenta el símbolo de un transistor NPN destacando sus terminales. Un transistor NPN se encuentra polarizado si la tensión del colector es mayor a la de la base y esta mayor que la del emisor ($v_C > v_B > v_E$) en por lo menos 0,7V. La polarización de este dispositivo se realiza por corriente y es de la forma:

$$i_{base} = \frac{i_{colector}}{h_{fe}} = \frac{i_{emisor}}{(h_{fe} + 1)} \quad (4.1)$$

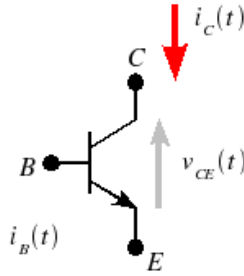


Figura 4.14: Transistor NPN

Para operar el transistor en corte es necesario suministra cero corriente por la base, generalmente par evitar operaciones no deseadas que pudiesen colocar el dispositivo en la zona activa de operación por corrientes inducidas en los circuitos de disparo se coloca corriente negativa en la base a fin de garantizar la operación en corte de la componente. La condición para operar el transistor en saturación es que la corriente de la base debe ser mayor o igual a la del colector en conducción entre la ganancia de corriente del dispositivo o h_{fe} .

$$i_{base_{saturación}} \geq \left(i_{colector_{operación}} \right) \frac{1}{h_{fe}} \quad (4.2)$$

En la figura 4.15a, se presenta la característica de operación del transistor NPN, se puede observar como la zona de operación de la componente depende de la corriente de base utilizada para su polarización. La ganancia (h_{fe}) típica de los transistores de potencia en corriente esta alrededor de 50. En la figura 4.15b, se presenta la característica ideal de la componente como interruptor electrónico, es decir, en la zona de corte y saturación. Esta componente es unidireccional en corriente y requiere siempre la presencia de la señal de corriente en la base para su operación.

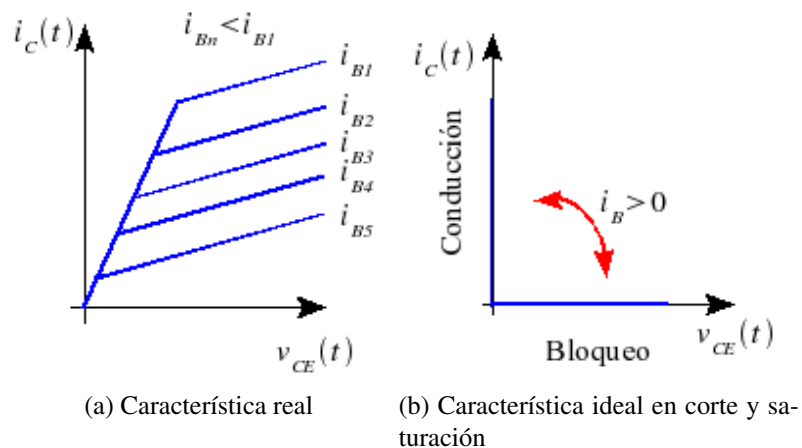


Figura 4.15: Característica del transistor BJT

En la tabla 4.5, se presentan las principales características de los transistores BJT de potencia que existen actualmente en el mercado:

Tabla 4.5: Tipos de transistores BJT de potencia

Tipo	Tensión (kV)	Corriente (kA)	Frecuencia (kHz)
Individual	0.4	0.25	25.0
Individual	0.4	0.04	30.0
Individual	0.63	0.05	35.0
Darlington	1.2	0.40	20.0

4.4.6. MOSFET

Los MOSFET más utilizados en electrónica de potencia son los canal N, su símbolo se presenta en la figura 4.16, al igual que los transistores BJT su operación se reduce a interruptor electrónico, es decir, en corte y saturación. La ventaja de este dispositivo en relación con el BJT es su polarización en tensión y alta impedancia de entrada. En la figura 4.17a, se presenta la característica de operación de los MOSFET en función de la tensión gate source.

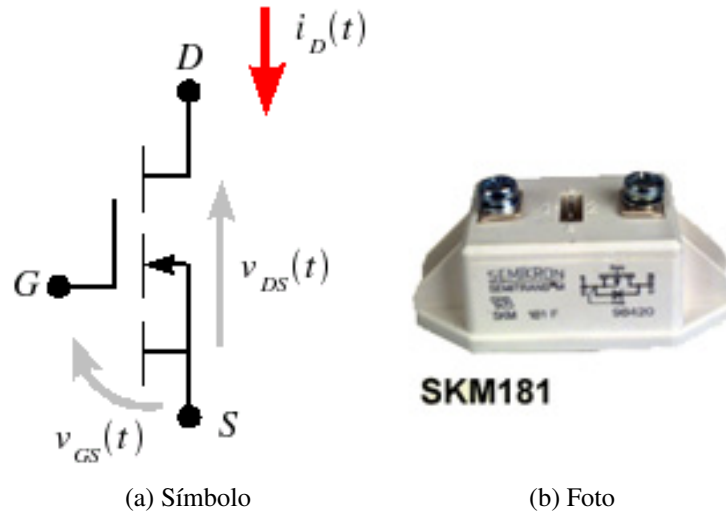


Figura 4.16: MOSFET

En la figura 4.17b, se presenta la característica ideal de la componente como interruptor electrónico, es decir, en la zona de corte y saturación. Esta componente es unidireccional en corriente y requiere siempre la presencia de la señal en el gate para su operación.

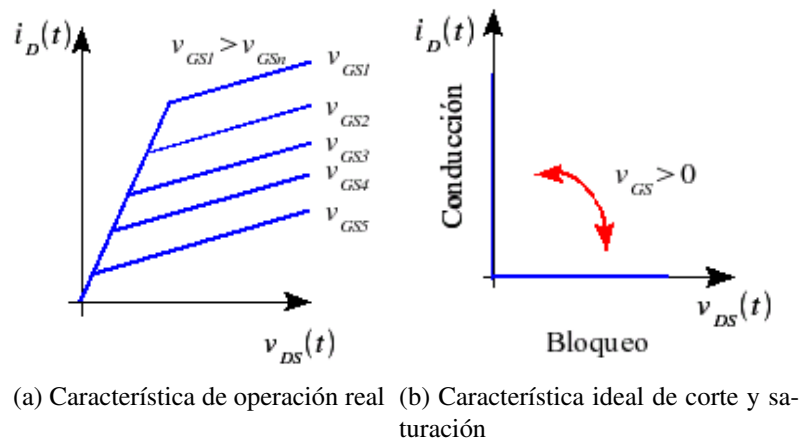


Figura 4.17: Característica del MOSFET

En la tabla 4.6, se presentan las principales características de los transistores MOSFET de potencia que existen actualmente en el mercado:

Tabla 4.6: Tipos de transistores MOSFET de potencia

Tipo	Tensión (kV)	Corriente (kA)	Frecuencia (kHz)
Individual	0.8	0.0075	100.0
Individual	0.15	0.6	100.0
COOLMOS	0.8	0.0078	125.0
COOLMOS	0.6	0.04	125.0
COOLMOS	1.0	0.0061	125.0

4.4.7. IGBT

Los transistores de compuerta aislada o IGBT combinan las características de los MOSFET de alta impedancia de entrada y polarización en tensión con la baja impedancia de salida de los BJT lo que origina una alta ganancia de corriente. Esta componente se construye colocando en cascada un MOSFET que polariza un par de BJT, su símbolo y esquema interno se presenta en la figura 4.18.

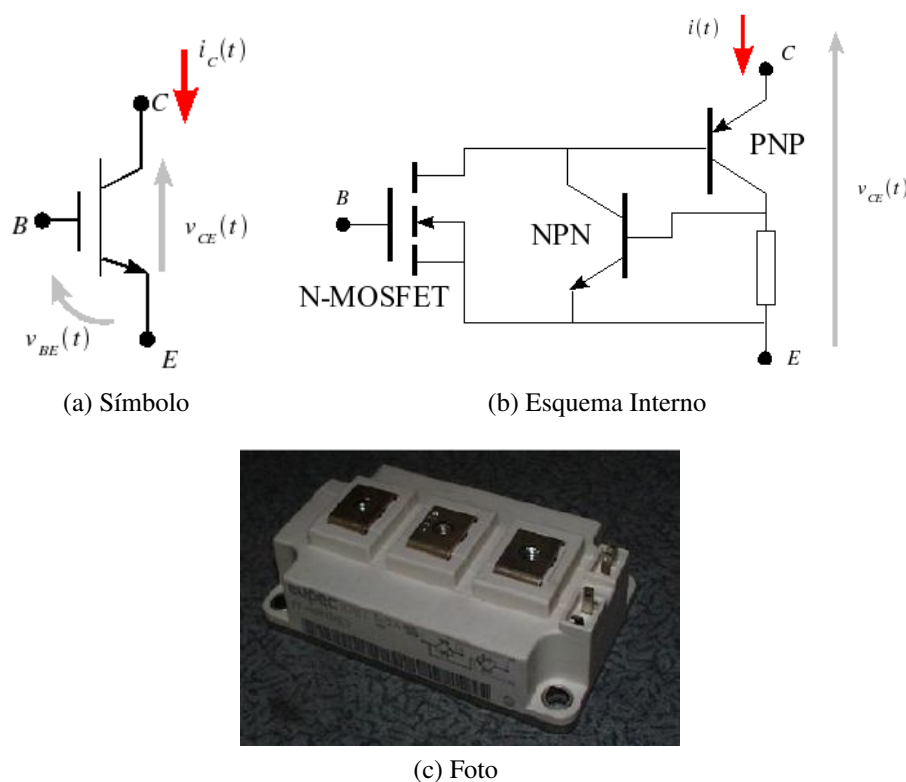


Figura 4.18: IGBT

En la figura 4.19a, se presenta la característica de operación del IGBT, en función de la tensión base emisor de polarización (v_{BE}). En la figura 4.19b, se presenta la característica ideal de operación del IGBT como interruptor electrónico de potencia.

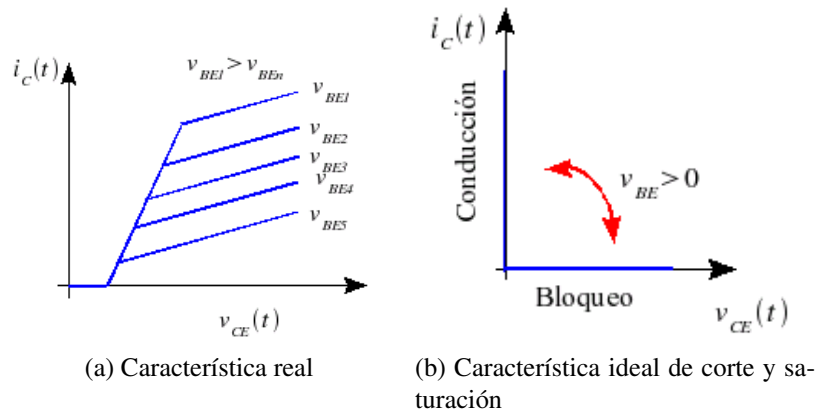


Figura 4.19: Característica de operación del IGBT

En la tabla 4.7, se presentan las principales características de los transistores IGBT de potencia que existen actualmente en el mercado:

Tabla 4.7: Tipos de transistores IGBT de potencia

Tipo	Tensión (kV)	Corriente (kA)	Frecuencia (kHz)
Individual	2.5	2.4	100.0
Individual	1.2	0.052	100.0
Individual	1.2	0.025	100.0
Individual	1.2	0.08	100.0
Individual	1.8	2.2	100.0
HVIGBT (Sencillo)	6.5	1.2	100
HVDIODE (Dual)	6.5	1.2	100

4.4.8. SIT

El SIT es el FET de electrónica de potencia, su símbolo se presenta en la figura 4.20, su aplicación se reserva para altas frecuencias en la industria aeronáutica y aeroespacial.

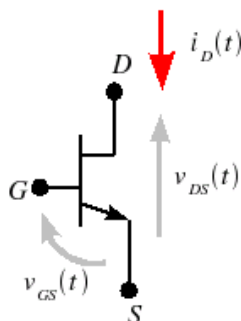


Figura 4.20: SIT

En la figura 4.21, se presenta la característica de operación del dispositivo en función de la tensión de polarización gate source y su característica ideal como interruptor electrónico.

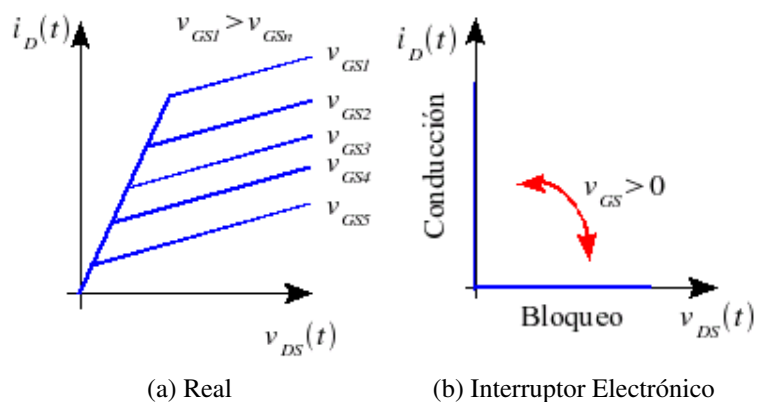


Figura 4.21: Características de operación del SIT

En la tabla 4.8, se presentan las principales características de los transistores SIT de potencia que existen actualmente en el mercado:

Tabla 4.8: Tipos de transistores SIT de potencia

Tipo	Tensión (kV)	Corriente (kA)	Frecuencia (kHz)
Individual	1.2	0.30	100.0

4.5. Clasificación de los Semiconductores de Potencia.

Los semiconductores de potencia se pueden clasificar de acuerdo a su grado de controlabilidad para el encendido y apagado, así como por su capacidad de soportar corriente y tensión unidireccional o bidireccional como:

- Activación y desactivación sin control.
- Activación controlada y desactivación sin control.
- Activación y desactivación controlada.
- Requerimiento de encendido por nivel de compuerta.
- Requerimiento de encendido por flanco o pulso en la compuerta.
- Capacidad de tensión bipolar.
- Capacidad de tensión unipolar.
- Corriente bidireccional.
- Corriente Unidireccional.

En la tabla 4.9, se presentan las características de conmutación de cada uno de los semiconductores de potencia de acuerdo a su grado de controlabilidad.

Tabla 4.9: Características de conmutación de los semiconductores de potencia

Dispositivo	Señal de Compuerta		Control		Tensión		Corriente	
	Continua	Pulso	Encendido	Apagado	Unipolar	Bipolar	Unidireccional	Bidireccional
Diodo					X		X	
BJT	X		X	X	X		X	
MOSFET	X		X	X	X			X
IGBT	X		X	X	X		X	
SIT	X		X	X	X		X	
SCR		X	X			X	X	
RCT		X	X			X		X
TRIAC		X	X			X		X
GTO		X	X	X		X	X	
MTO		X	X	X		X	X	
ETO		X	X	X		X	X	
IGCT		X	X	X		X	X	
SITH		X	X	X		X	X	
MCT	X		X	X		X	X	

En la figura 4.22, se presenta los niveles de potencia manejados por los diferentes fabricantes de dispositivos electrónicos de potencia para principios del año 2000, en lo relativo a IGBT, Tiristores, GTO y MOSFET.

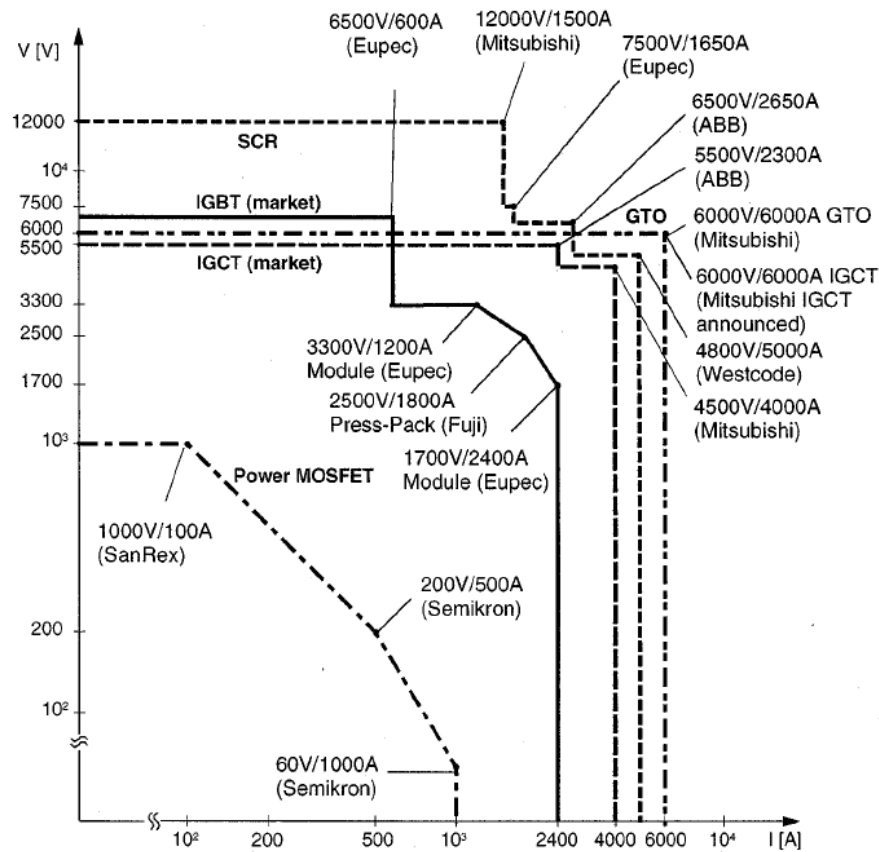


Figura 4.22: Intervalo de potencia de los semiconductores de potencia comerciales a principios de siglo [2].

4.6. Selección de Semiconductores de Potencia

La selección de un dispositivo de potencia, para una determinada aplicación, no depende únicamente de los niveles de la tensión y corriente requeridos, también dependen de su característica de conmutación, niveles de pérdidas en los tres estados de operación (conducción, bloqueo y conmutación), del grado de controlabilidad y frecuencia de conmutación que requiera la aplicación. Los niveles de pérdidas que pueden manejar la componente depende de su capacidad de disipación de calor al medio ambiente que esta estrechamente ligada con su disipador.

4.7. Ventajas y Desventajas de la Electrónica de Potencia

Los dispositivos semiconductores de potencia permiten construir puentes convertidores electrónicos, eficientes que mejoran las prestaciones estáticas y dinámicas de los procesos de conversión

de energía eléctrica. Estos puentes originan procesos más eficientes debido a la capacidad de conmutar grandes bloques de energía con mínimas pérdidas. Estos incrementos en las prestaciones y eficiencia se logra al combinar distintas áreas del conocimiento dentro de las aplicaciones de la electrónica de potencia. En la figura 4.23, se presentan algunas de las áreas que interactúan dentro de la electrónica de potencia.

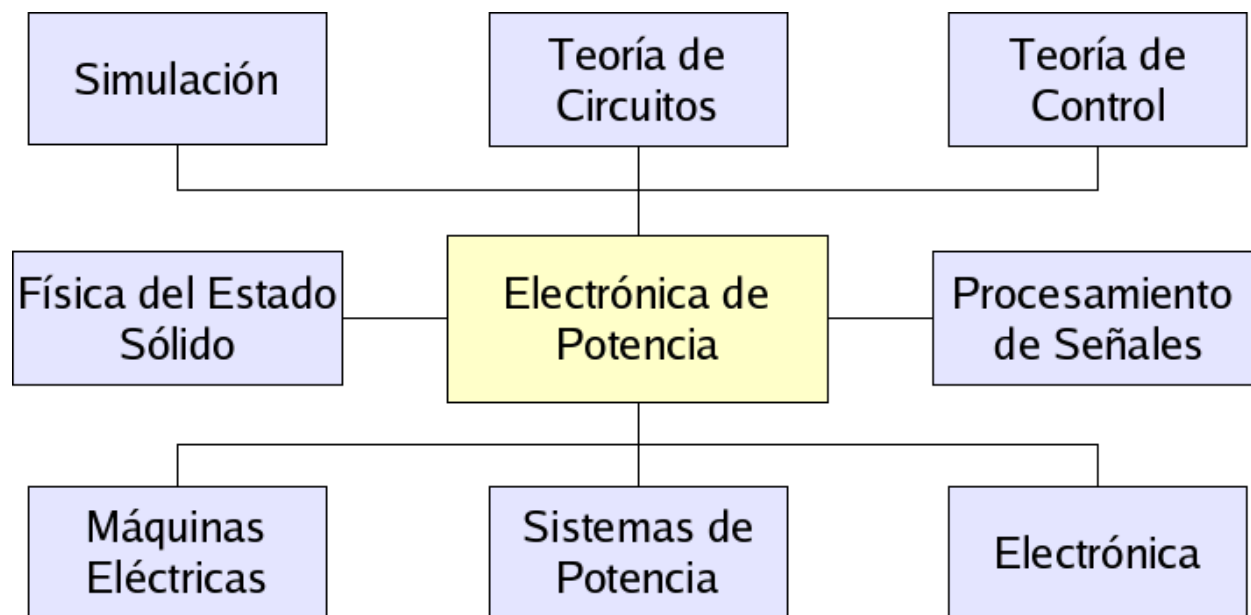


Figura 4.23: Multidisciplinariedad de la electrónica de potencia

La conmutación de altos bloques de energía trae consigo la introducción de contaminación armónica en tensión y corriente sobre las líneas de alimentación, problemas de resonancia, interferencia electromagnética, fallas de aislación, entre otras. Estos problemas pueden solucionarse mediante filtros pasivos y/o activos o mejorando las estrategia de conmutación de los puentes electrónicos.

Parte III

Puentes AC - DC

Rectificadores de Media Onda No Controlado

5.1. Aspectos Generales

Un rectificador convierte la corriente alterna en corriente continua. La finalidad de un rectificador puede ser generar una onda de tensión o corriente continua pura o con un nivel determinado de corriente continua. En la práctica los rectificadores de media onda se utilizan en las aplicaciones de baja potencia debido a que estos introducen sobre el sistema de alterna, corriente media con contenido diferente de cero. Esta corriente media ocasiona problemas de saturación en las máquinas eléctricas y en especial en los transformadores. Aunque sus aplicaciones son limitadas, merece la pena su estudio ya que su comprensión permitirá el análisis de configuraciones más compleja de los puentes convertidores de electrónica de potencia. En la figura 5.1, se presenta la configuración de este puente convertidor.

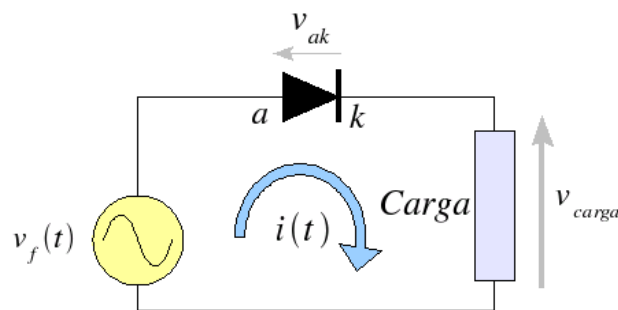


Figura 5.1: Puente rectificador de media onda

En este capítulo centraremos el estudio de los rectificadores de media onda alimentados con fuentes sinusoidales, su análisis con otro tipo de alimentación alterna es análogo. Para activar el diodo o derrumbar la barrera de potencial de la juntura NP, se requiere su polarización en directo es decir, que el ánodo sea más positivo que el cátodo ($v_{ak} > 0$), mientras que para su desactivación se

requiere que la corriente que circula por el dispositivo sea igual a cero, una forma de lograr esto es polarizando el dispositivo en inverso, es decir con tensión ánodo - cátodo negativa ($v_{ak} < 0$), o esperar que la corriente pase naturalmente por cero ($i(t_\beta) = 0$), esto trae como consecuencia que el apagado del diodo dependa de la naturaleza de la carga, en pocas palabras del adelanto o atraso del cruce por cero de la corriente con respecto a la tensión.

Para el estudio del puente rectificador es necesario realizar algunas definiciones que serán útiles para la comprensión y análisis de su funcionamiento.

Ángulo o tiempo de encendido (α):

Es el ángulo o instante de tiempo en el cual la barrera de potencial de la juntura se derrumba y por la componente empieza a circular corriente.

Ángulo o tiempo de apagado (β):

Es el ángulo o instante de tiempo en el cual la barrera de potencial de la juntura se restituye y por la componente se inhibe o suprime la circulación de corriente.

Ángulo o tiempo de conducción (γ):

Es el tiempo total o diferencia angular en el cual circula corriente por la componente y está definido por:

$$\gamma = \beta - \alpha \quad (5.1)$$

5.2. Rectificador con Carga Resistiva

En la figura 5.2, se presenta un puente rectificador de media onda con carga pura resistiva. El puente está alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal dada por la expresión: $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$.

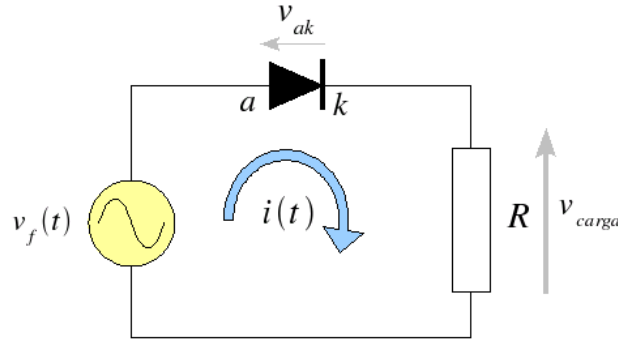


Figura 5.2: Puente rectificador de media onda no controlado con carga resistiva

Considerando el diodo ideal, es decir que su tensión de ruptura es cero, el ángulo de encendido del diodo para esta fuente sinusoidal se obtiene cuando el diodo se polariza en directo. Esto ocurre durante el semiciclo positivo de la senoide ($v_{ak} \geq 0$) por lo tanto el ángulo de encendido es cero ($\alpha = 0$).

Para encontrar el ángulo de apagado es necesario encontrar cuando la corriente pasa naturalmente por cero ($i(t_\beta) = 0$). En el circuito de la figura 5.2, la corriente para $0 \leq t \leq t_\beta$ es:

$$i(t) = \frac{v_f(t)}{R} = \frac{\sqrt{2}V \sin(\omega t)}{R} \quad (5.2)$$

La corriente de la expresión (5.2) pasa naturalmente por cero en $\omega t_\beta = \pi$, por lo tanto el ángulo de apagado es $\beta = \pi$.

En la figura 5.3, se presenta la corriente y la tensión en la carga resistiva y la fuente para este puente convertidor no controlado.

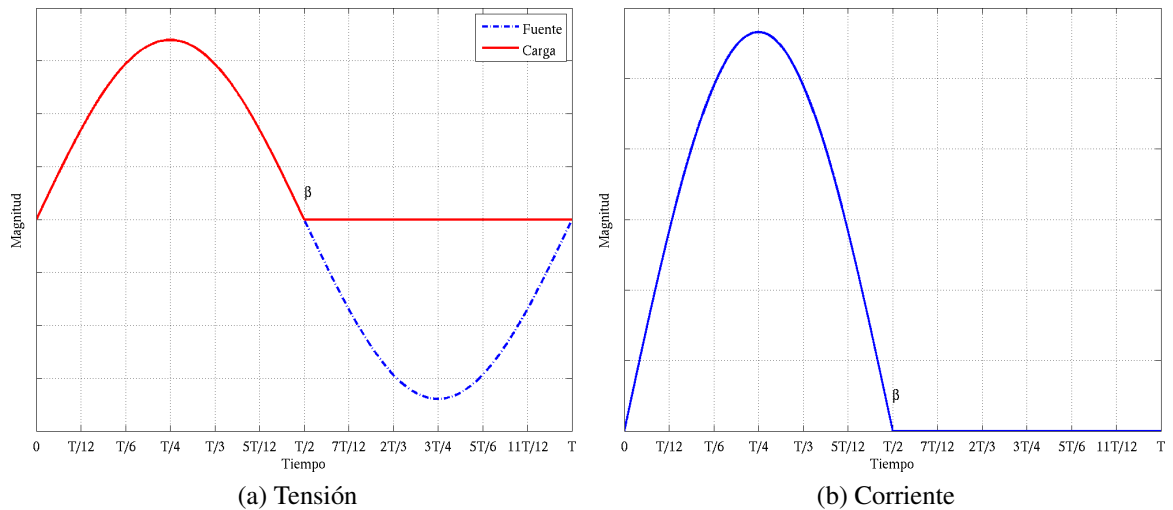


Figura 5.3: Formas de Onda para la carga resistiva

Como el circuito de la figura 5.2 es un circuito serie la corriente por la carga es la misma corriente por la fuente de corriente alterna. En la figura 5.4, se presentan los contenidos armónicos de tensión y corriente en la carga. Se puede observar que el mayor contenido armónico luego de la fundamental se obtiene en la armónica cero correspondiente al valor medio y la segunda armónica. Adicionalmente se puede ver como las armónicas de alto orden tienden a cero.

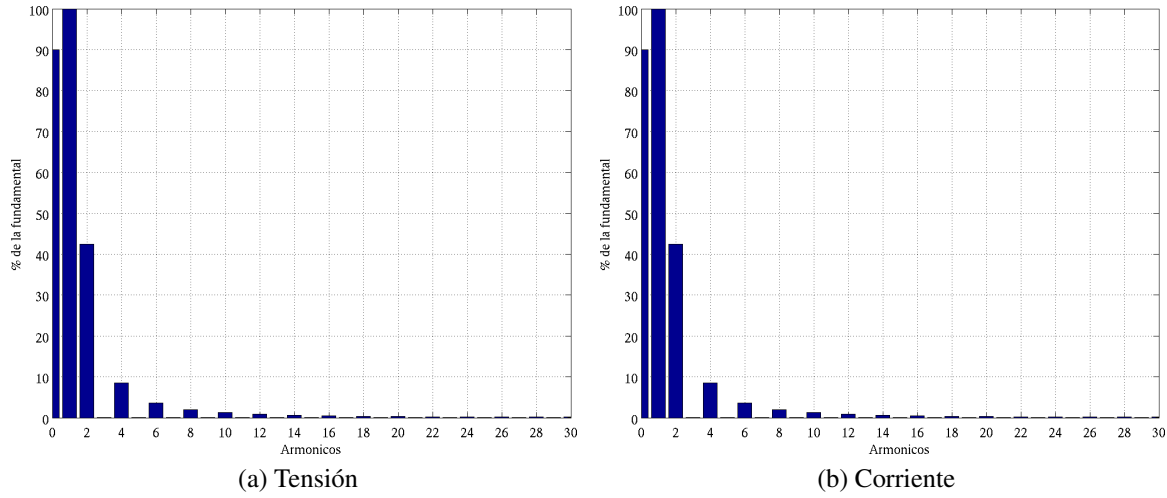


Figura 5.4: Contenido armónico para la carga resistiva

Para encontrar la tensión y corriente media y efectiva se aplicara las definiciones vistas en el capítulo 1 en el intervalo del periodo en donde la función esta definida, que es entre el ángulo de encendido (α) y el de apagado de la componente (β).

5.2.1. Tensión Media

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left(-\cos(\omega t) \Big|_{\alpha}^{\beta} \right) \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left(-\cos(\omega t) \Big|_0^{\pi} \right) \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (1 - (-1)) \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

5.2.2. Corriente Media

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2} \frac{V}{R} \sin(\omega t) d\omega t \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi R} \left(-\cos(\omega t) \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi R} \left(-\cos(\omega t) \right) \Big|_0^{\pi} \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi R} (1 - (-1)) \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi R} = \frac{V_0}{R}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.2.3. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\pi - 0 - \frac{\sin(2\pi)}{2} + \frac{\sin(0)}{2} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \cdot \pi} = \frac{V}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

5.2.4. Corriente Efectiva

$$\begin{aligned}
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2} \frac{V}{R} \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{R^2 \pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{R^2 2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \right)} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{R^2 2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \right)} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{R^2 2\pi} \left(\pi - 0 - \frac{\sin(2\pi)}{2} + \frac{\sin(0)}{2} \right)} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{R^2 2\pi} \cdot \pi} = \frac{V}{\sqrt{2}R}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

5.2.5. Factor de Rizado

$$FR = \frac{\sqrt{\left(\frac{V}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}V}{\pi}\right)^2}}{\frac{\sqrt{2}V}{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} = 1,21 \quad (5.7)$$

5.3. Rectificador con Carga Resistiva Inductiva

En la figura 5.5, se presenta un puente rectificador de media onda con carga resistiva inductiva. El puente está alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal dada por la expresión: $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$.

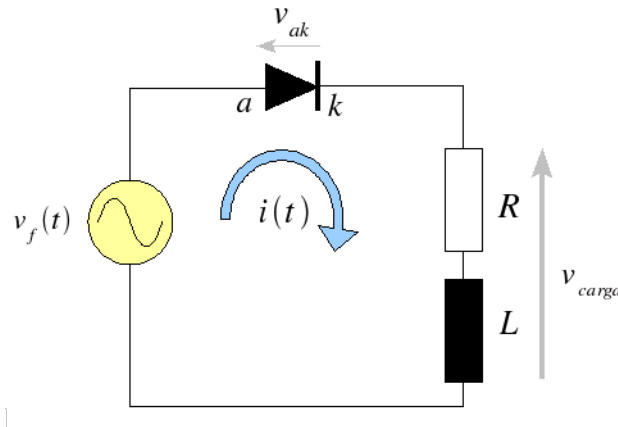


Figura 5.5: Puente rectificador de media onda no controlado con carga resistiva inductiva

Considerando el diodo ideal, es decir que su tensión de ruptura es cero, el ángulo de encendido del diodo para esta fuente sinusoidal se obtiene cuando el diodo se polariza en directo durante el semiciclo positivo de la senoide ($v_{ak} \geq 0$) por lo tanto $\alpha = 0$.

Para encontrar el ángulo de apagado es necesario encontrar cuando la corriente pasa naturalmente por cero ($i(t_\beta) = 0$). La corriente para el circuito de la figura 5.5 se obtiene resolviendo la ecuación diferencial de corriente obtenida a partir del recorrido de mallas del circuito como:

Solución Homogénea.

$$i_h(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} \quad (5.8)$$

Multiplicando el numerador y denominador de la exponencial por ω se obtiene:

$$i_h(t) = ke^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \quad (5.9)$$

donde:

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}$$

Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)

Encontrando la corriente en régimen permanente, utilizando fasores se obtiene:

$$i_p(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.10)$$

donde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Solución Total

La solución total de la corriente del circuito de la figura 5.5 se obtiene de las expresiones (5.9) y (5.10) como:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) + ke^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \quad (5.11)$$

La condición inicial del circuito debido a que el diodo se encuentra abierto o en no conducción es cero: $i(0) = 0$, por lo tanto el valor de k , se puede determinar como:

$$\begin{aligned} i(0) = 0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(0 - \varphi) + ke^{-\frac{0}{\tan(\varphi)}} \\ &\downarrow \\ k &= -\frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(-\varphi) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\varphi) \\ &\downarrow \\ i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) + \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\varphi) e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Sacando factor común $\sqrt{2}V/Z$ se obtiene:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \right] \quad (5.13)$$

La corriente de la expresión (5.13) pasa naturalmente por cero cuando $i(t_\beta) = 0$, por lo tanto el ángulo de apagado se calcula igualando esta expresión a cero. La ecuación (5.13) se hace cero si $V = 0$ o $Z = \infty$, estas dos soluciones son triviales e implican que el circuito no está alimentando por ninguna fuente de tensión o no posee carga conectada, por lo cual la única forma que la expresión (5.13) sea cero es que el término entre corchetes sea igual a cero para t_β .

$$\left[\sin(\omega t_\beta - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\omega t_\beta}{\tan(\varphi)}} \right] = \left[\sin(\beta - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\beta}{\tan(\varphi)}} \right] = 0 \quad (5.14)$$

La expresión (5.14) no posee una solución analítica para β , este tipo de expresión se le conoce como ecuación trascendental y su solución es numérica. Diversos métodos de solución numérica se pueden emplear para la solución de esta ecuación. La solución del ángulo de apagado está acotada entre $\pi \leq \beta \leq 2\pi$ para el circuito de la figura 5.5. En la figura 5.6, se presenta la gráfica de la solución de esta expresión para diferentes valores del ángulo de carga (φ).

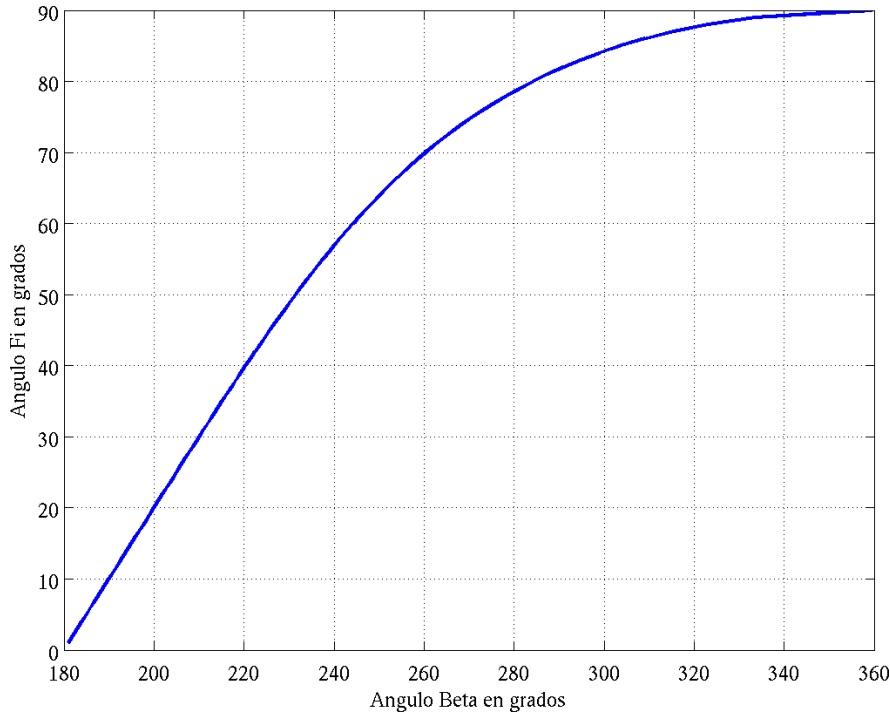
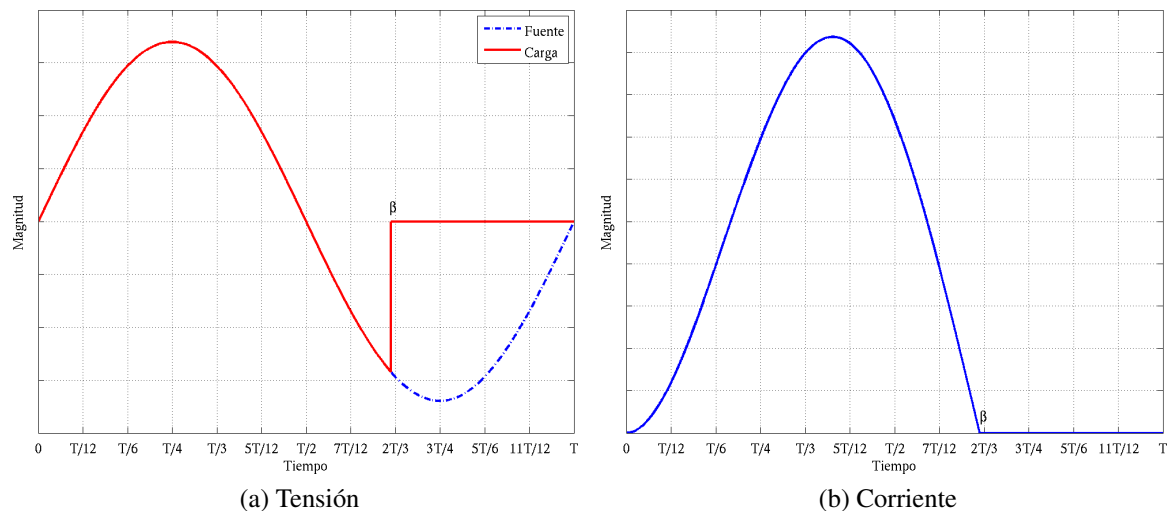
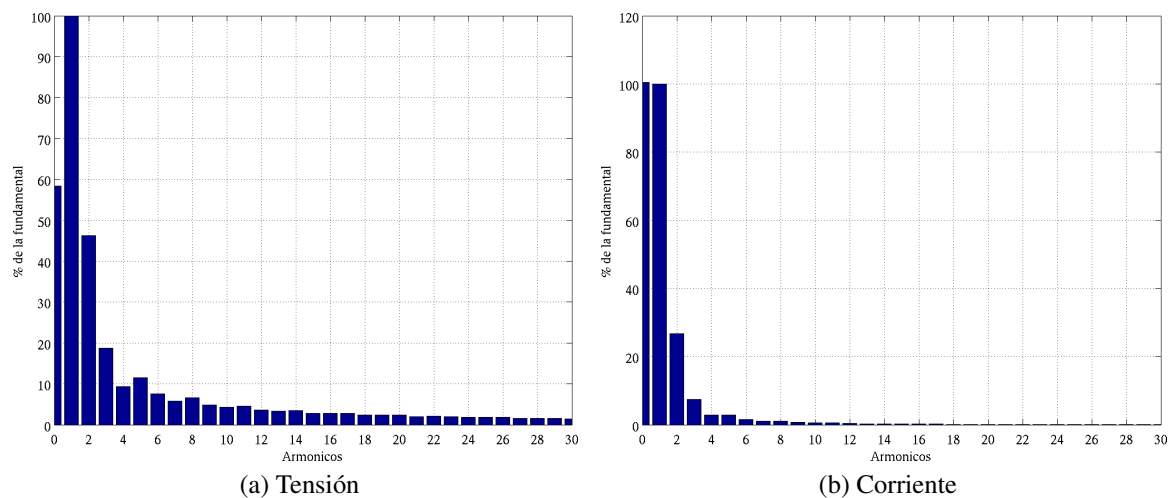


Figura 5.6: Solución gráfica a la expresión (5.14)

En la figura 5.7, se presentan las formas de onda de la tensión y corriente en la carga y fuente de alterna de este puente convertidor, para una fuente de $v_f(t) = \sqrt{2}120 \sin(377t)$, $R = 60\Omega$ y $L = 223\text{ mH}$. Para esta carga el ángulo de apagado es $\beta = 4,1351\text{ rad} = 236,9233^\circ$

Figura 5.7: Formas de onda para la carga RL

Como el circuito de la figura 5.5, es un circuito serie la corriente por la carga es la misma corriente por la fuente de corriente alterna. En la figura 5.8, se presentan los contenidos armónicos de tensión y corriente en la carga. Se puede observar que el mayor contenido armónico luego de la fundamental se obtiene en la armónica cero correspondiente al valor medio y la segunda armónica.

Figura 5.8: Contenido armónico para la carga RL

Para encontrar la tensión y corriente media y efectiva se aplicara la definiciones vistas en el capítulo 1 en el intervalo del periodo en donde la función esta definida, que es entre el ángulo de encendido (α) y el de apagado de la componente (β).

5.3.1. Tensión Media

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left(-\cos(\omega t) \Big|_0^{\beta} \right) \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (1 - \cos(\beta))
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

5.3.2. Corriente Media

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} i(t) d\omega t \\
 I_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \right] \right) d\omega t \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \right) d\omega t \right] \\
 I_0 &= \frac{V_0}{R} = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi R} (1 - \cos(\beta))
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.3.3. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_0^{\beta} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\beta - 0 - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(0)}{2} \right)} \\
 V_{rms} &= V \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\beta - \frac{\sin(2\beta)}{2} \right)}
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Nota: La expresión (5.17) solo es válida en radianes

5.3.4. Corriente Efectiva

$$\begin{aligned}
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} i(t)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \right] \right)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \right)^2 d\omega t}
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

5.3.5. Factor de Rizado en Tensión

$$FR = \frac{\sqrt{\left(V \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\beta - \frac{\sin(2\beta)}{2}\right)}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (1 - \cos(\beta))\right)^2}}{\frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (1 - \cos(\beta))} \quad (5.19)$$

En la figura 5.9, se presenta la solución gráfica en función del ángulo de carga (φ) de la corriente media y efectiva normalizada en la carga, es decir la solución de las integrales de las expresiones (5.16) y (5.18).

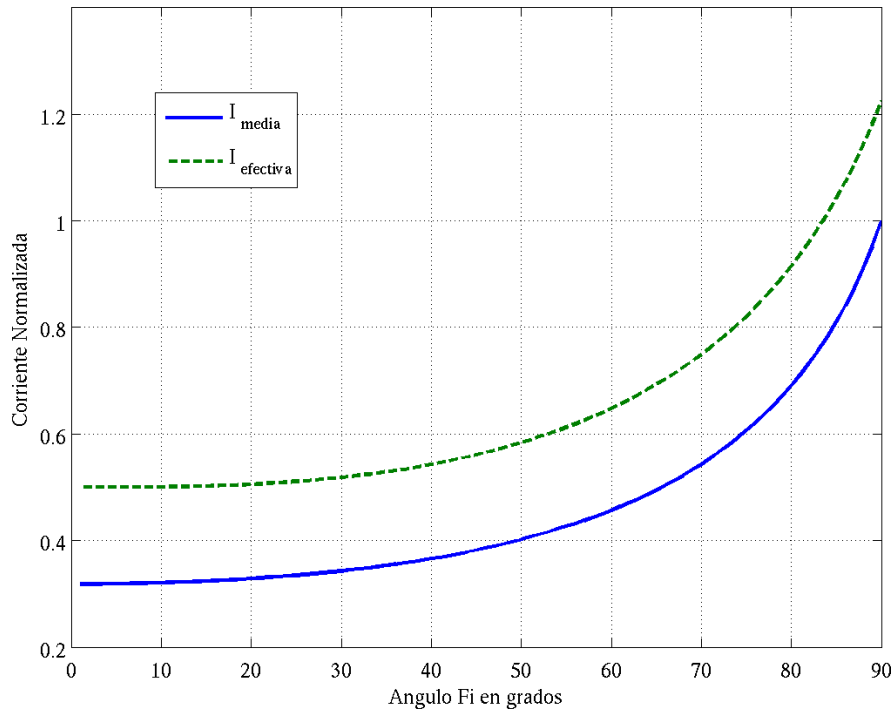


Figura 5.9: Corriente media y efectiva normalizada en función del ángulo φ

Donde:

$$I_0 = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \cdot I_{media} \quad (5.20)$$

$$I_{rms} = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \cdot I_{efectiva} \quad (5.21)$$

5.3.6. Simulación

```

1  % Media Onda No Controlado con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \sin(\omega t)$ 
3  % Carga tip RL
4
5  % Entrada de datos
6  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
7  R=input('Resistencia [Ohm] ');
8  L=input('Inductancia [H] ');
9  f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
10
11 % Parámetros
12 fi=atan(2*pi*f*L/R);
13 Z=sqrt((2*pi*f*L)^2+R^2);
14
15 % Cálculo del ángulo de apagado
16 b=fsolve(@(t) sin(t-fi)+sin(fi)*exp(-t/tan(fi)),[pi])
17
18 % Función en el tiempo
19 t=0:0.001:b;
20 i=sqrt(2)*V/Z*(sin(t-fi)+sin(fi)*exp(-t/tan(fi)));
21 v=sqrt(2)*V*sin(t);
22
23 % Valores Medios
24 Io=1/(2*pi)*trapz(t,i)
25 Vo=sqrt(2)*V/(2*pi)*(1-cos(b))
26 Imedia=Vo/R
27
28 % Valores Efectivos
29 Irms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,i.^2))
30 Vrms=V*sqrt(1/(2*pi)*(b-(sin(2*b))/2))
31
32 %Factor de rizado
33 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
34 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
35
36 % Primera Armónica
37 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t,v.*exp(j*t))))/sqrt(2)
38 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t,i.*exp(j*t))))/sqrt(2)
39

```

```

40 % THD
41 THDv=sqrt(Vrms^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
42 THDi=sqrt(Irms^2-Irms_1^2)/Irms_1
43
44 % Graficas
45 figure(1)
46 t1=0:0.001:2*pi;
47 vf=sqrt(2)*V*sin(t1);
48 nx=size(t1)-size(t);
49 nx(1)=1;
50 vx=[v,zeros(nx)];
51 ix=[i,zeros(nx)];
52 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
53 legend('Fuente','Carga');
54 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
55 xlim([0 2*pi]);
56 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
57 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
58 set(gca,'YTickLabel',{' '})
59 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
60 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
61
62 figure(2)
63 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
64 xlim([0 2*pi]);
65 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
66 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
67 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
68 set(gca,'YTickLabel',{' '})
69 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
70 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');

```

5.4. Rectificador con Carga Inductiva

En la figura 5.10, se presenta un puente rectificador de media onda con carga inductiva pura. El puente está alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal dada por la expresión: $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$.

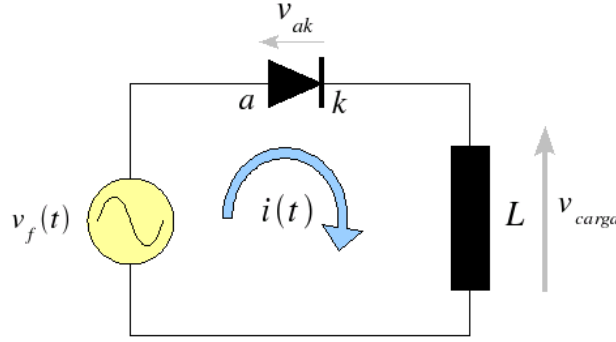


Figura 5.10: Puente rectificador de media onda no controlado con carga inductiva

Considerando el diodo ideal, es decir que su tensión de ruptura es cero, el ángulo de encendido del diodo para esta fuente sinusoidal se obtiene cuando el diodo se polariza en directo durante el semiciclo positivo de la senoide ($v_{ak} \geq 0$) por lo tanto $\alpha = 0$.

Para encontrar el ángulo de apagado es necesario encontrar cuando la corriente pasa naturalmente por cero ($i(t_\beta) = 0$). Para encontrar la expresión temporal de la corriente para $0 \leq t \leq t_\beta$, se puede utilizar el resultado del circuito RL de la sección anterior, con $Z = \omega L$ y $\varphi = \pi/2$ que corresponden al caso inductivo puro.

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \right] \\
 &\downarrow \\
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \left[\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{\omega t}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}} \right] \\
 &\downarrow \\
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \left[\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right] \\
 &\downarrow \\
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} [1 - \cos(\omega t)]
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

La corriente de la expresión (5.22) pasa naturalmente por cero cuando $i(t_\beta) = 0$, por lo tanto el ángulo de apagado se calcula igualando esta a cero. La ecuación (5.22) se hace cero si $V = 0$ o $Z = \infty$, estas dos soluciones son triviales e implican que el circuito no está alimentando por ninguna fuente de tensión o no posee carga conectada, por lo cual la única forma que la expresión (5.22) sea cero es que el término entre corchetes sea igual a cero para t_β .

$$[1 - \cos(\omega t_\beta)] = 1 - \cos(\beta) = 0 \quad (5.23)$$

Despejando β de la expresión (5.23), se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= 1 \\ \downarrow \\ \beta &= 2\pi \end{aligned} \quad (5.24)$$

En la figura 5.11, se presenta la tensión y corriente en la carga y fuente de alterna de este puente convertidor, para una fuente de $v_f(t) = \sqrt{2}120\sin(377\omega t)$, y $L = 223\text{mH}$.

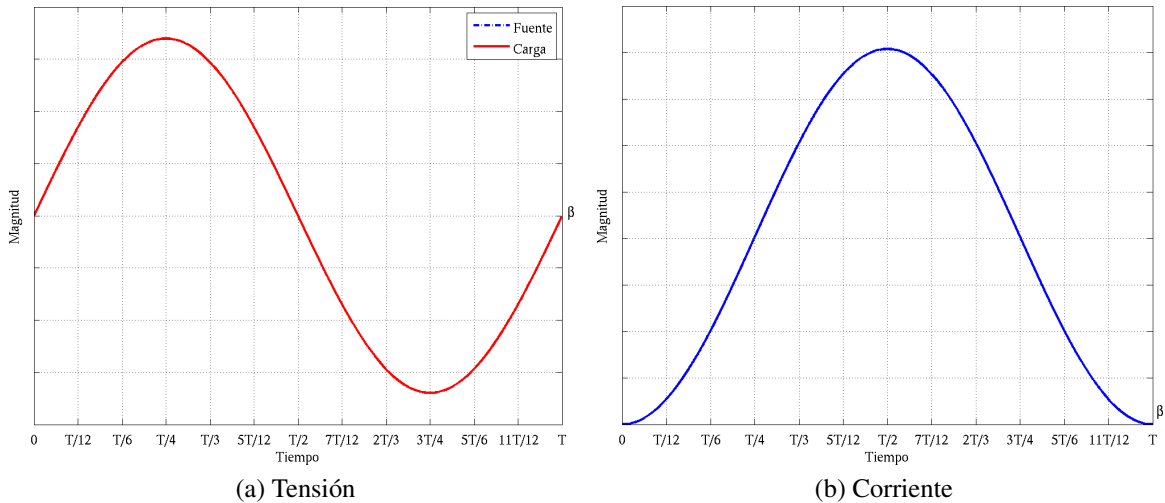


Figura 5.11: Formas de onda para la carga inductiva

Como el circuito de la figura 5.10, es un circuito serie la corriente por la carga es la misma corriente por la fuente de corriente alterna. En la figura 5.12, se presentan los contenidos armónicos de tensión y corriente en la carga. Se puede observar que el mayor contenido armónico en la corriente luego de la fundamental se obtiene en la armónica cero correspondiente al valor medio.

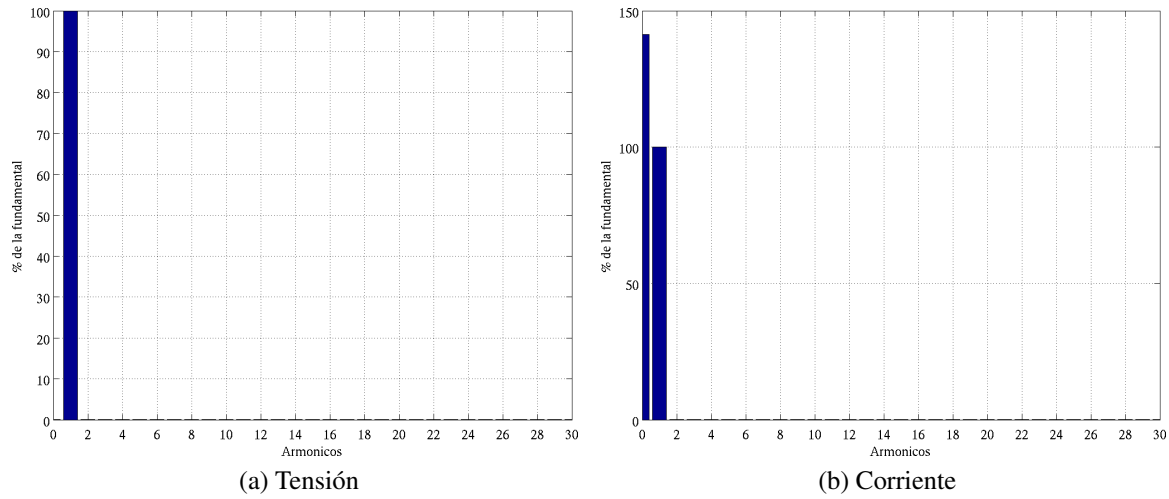


Figura 5.12: Contenido armónico para la carga inductiva

Para encontrar la tensión y corriente media y efectiva se aplicara la definiciones vistas anteriormente en el capítulo 1.

5.4.1. Tensión Media

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left(-\cos(\omega t) \Big|_0^{2\pi} \right) \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (1 - 1) \\
 V_0 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

5.4.2. Corriente Media

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} i(t) d\omega t \\
 I_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\sqrt{2}V}{\omega L} [1 - \cos(\omega t)] \right) d\omega t \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi} [1 - \cos(\omega t)] d\omega t \right] \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \left[\frac{1}{2\pi} (2\pi) \right] = \frac{\sqrt{2}V}{\omega L}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

5.4.3. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{2\pi} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(2\pi - 0 - \frac{\sin(4\pi)}{2} + \frac{\sin(0)}{2} \right)} \\
 V_{rms} &= V \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot (2\pi)} \\
 V_{rms} &= V
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

5.4.4. Corriente Efectiva

$$\begin{aligned}
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} i(t)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2}V}{\omega L} [1 - \cos(\omega t)] \right)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi} \left(1 - 2\cos(\omega t) + (\cos(\omega t))^2 \right) d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{\alpha}^{2\pi} (3 - 4\cos(\omega t) + \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \sqrt{\frac{6\pi}{4\pi}} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{3}V}{\omega L}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

5.4.5. Simulación

```

1  % Media Onda No Controlado con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \sin(\omega t)$ 
3  % Carga tip L
4
5  % Entrada de datos
6  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
7  L=input('Inductancia [H] ');
8  f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
9
10 % Parámetros

```

```

11 XL=(2*pi*f*L);
12
13 % Cálculo del ángulo de apagado
14 b=2*pi
15
16 % Función en el tiempo
17 t=0:0.001:b;
18 i=sqrt(2)*V/XL*(1-cos(t));
19 v=sqrt(2)*V*sin(t);
20
21 % Valores Medios
22 Io=1/(2*pi)*trapz(t,i)
23 Vo=sqrt(2)*V/(2*pi)*(1-cos(b))
24
25
26 % Valores Efectivos
27 Irms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,i.^2))
28 Vrms=V*sqrt(1/(2*pi)*(b-(sin(2*b))/2))
29
30 %Factor de rizado
31 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
32
33
34 % Primera Armónica
35 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t,v.*exp(j*t))))/sqrt(2)
36 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t,i.*exp(j*t))))/sqrt(2)
37
38 % THD
39 THDv=sqrt(Vrms^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
40 THDi=sqrt(Irms^2-Irms_1^2)/Irms_1
41
42 % Graficas
43 figure(1)
44 t1=0:0.001:2*pi;
45 vf=sqrt(2)*V*sin(t1);
46 nx=size(t1)-size(t);
47 nx(1)=1;
48 vx=[v,zeros(nx)];
49 ix=[i,zeros(nx)];
50 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid

```

```

51 legend('Fuente','Carga');
52 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
53 xlim([0 2*pi]);
54 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
55 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T/12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
56 set(gca,'YTickLabel',{' '})
57 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
58 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
59
60 figure(2)
61 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
62 xlim([0 2*pi]);
63 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
64 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
65 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T/12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
66 set(gca,'YTickLabel',{' '})
67 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
68 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');

```

5.5. Rectificador con Diodo de Descarga Libre

En la figura 5.13, se presenta un puente rectificador de media onda con carga resistiva inductiva y diodo de descarga libre. El puente está alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal ($v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$).

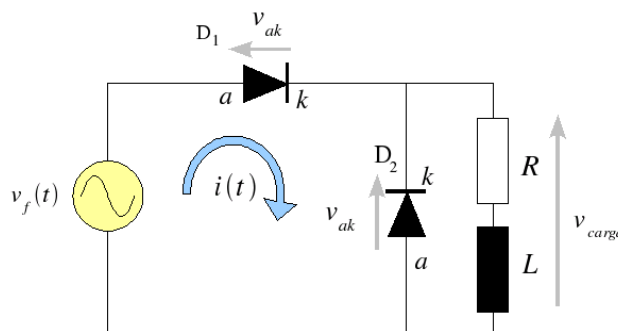


Figura 5.13: Puente rectificador de media onda no controlado con carga RL y diodo de descarga libre

Considerando el diodo D_1 ideal, es decir que su tensión de ruptura es cero, el ángulo de encendido del diodo para esta fuente sinusoidal se obtiene cuando el diodo se polariza en directo durante el semiciclo positivo de la senoide ($v_{ak} \geq 0$) por lo cual $\alpha_{D1} = 0$ y $\beta_{D1} = \pi$. Para el diodo D_2 de descarga libre el cual se encuentra en paralelo con la carga, su polarización en directo se alcanza en el semiciclo negativo de la onda sinusoidal por lo tanto $\alpha_{D2} = \pi$ y $\beta_{D2} = 2\pi$. Al encender el diodo dos este le da un camino de circulación a la corriente de la carga, asumiendo la totalidad de la corriente del diodo principal permitiendo el apagado del mismo. Este mecanismo de apagado se conoce como conmutación forzada.

En la figura 5.14 se presenta el oscilograma de corriente en la carga RL durante la operación del convertidor electrónico. En esta figura se puede observar claramente dos etapas de operación en el puente. Una transitoria correspondiente a la energización del puente y la otra a la operación en estado estacionario. La operación en estado estacionario se caracteriza por que la corriente sobre la carga en un periodo de operación completo del puente debe ser de valor igual al mismo instante el el periodo anterior. A este hecho se le conoce como condición de régimen permanente y matemáticamente se expresa como:

$$i(t) = i(t + T) \quad (5.29)$$

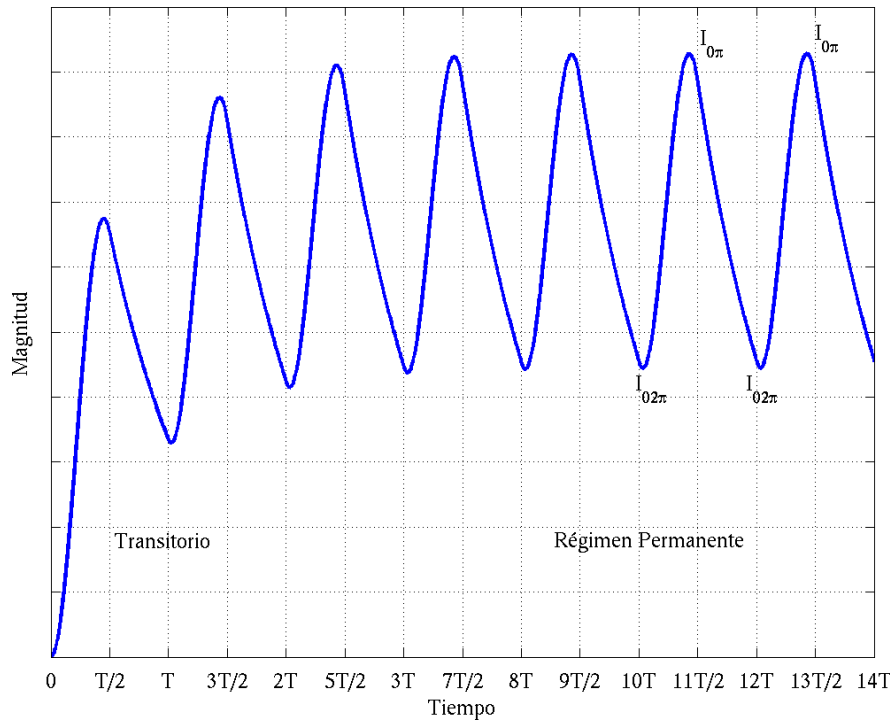


Figura 5.14: Corriente por la carga resistiva inductiva

Para encontrar la corriente en la carga, se analizará cada etapa de operación de forma separada.

5.5.1. Régimen transitorio

Durante la conducción del diodo D_1 , el circuito de la figura 5.13 se puede analizar como un rectificador de media onda con carga resistiva inductiva, con condición inicial de corriente para $t = 0$ igual a cero. La expresión de corriente para $0 \leq \omega t \leq \pi$ que corresponde al diodo principal es:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \right] \quad (5.30)$$

Evalutando la condición final de la expresión (5.30) en $\omega t = \pi$, se obtiene la condición inicial para la corriente que circula por el diodo D_2 .

$$i(t_\pi) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\pi - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right] = I_a \quad (5.31)$$

La expresión de corriente para $\pi \leq \omega t \leq 2\pi$ que corresponde al diodo D_2 es:

$$i(t) = k e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \quad (5.32)$$

Sustituyendo la condición inicial de corriente encontrada en la expresión (5.31) en la ecuación (5.32) se obtiene:

$$i(t) = I_a e^{-\frac{(\omega t - \pi)}{\tan(\varphi)}} \quad (5.33)$$

$$i(t) = \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\pi - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right] \right) e^{-\frac{(\omega t - \pi)}{\tan(\varphi)}}$$

Durante la conducción o polarización del diodo D_2 sobre la carga queda aplicada la tensión de ruptura del diodo, al considerar este como ideal la tensión en la carga es igual a cero.

Evalutando la condición final de la expresión (5.33) en $\omega t = 2\pi$, se obtiene la condición inicial para el siguiente periodo de operación del puente convertidor.

$$i(t_{2\pi}) = I_a e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} = \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\pi - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right] \right) e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} = I_b \quad (5.34)$$

5.5.2. Estado Estacionario.

Para encontrar las expresiones de corriente de los diodos D_1 y D_2 del circuito de la figura 5.13 en estado estacionario, se evaluara la corriente en un periodo cualquiera luego de alcanzada la condición de régimen permanente de la expresión (5.29). Este periodo esta comprendido para el

diodo D_1 entre $2n\pi \leq \omega t \leq (2n+1)\pi$ y para el diodo D_2 entre $(2n+1)\pi \leq \omega t \leq (2n+2)\pi$ donde $n \in \mathbb{N}$.

Durante la conducción del diodo D_1 , el circuito de la figura 5.13, se puede analizar como un rectificador de media onda con carga RL , con condición inicial de corriente para $t = t_{2n\pi}$ diferente de cero. A la condición inicial de la corriente en $t = t_{2n\pi}$ se denominara $I_{02\pi}$. La expresión de corriente para $2n\pi \leq \omega t \leq (2n+1)\pi$ que corresponde al diodo D_1 es:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) + k e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \\
 &\downarrow \\
 i(t_{2n\pi}) &= I_{02\pi} = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(2n\pi - \varphi) + k e^{-\frac{2n\pi}{\tan(\varphi)}} \\
 &\downarrow \\
 k &= \left(I_{02\pi} - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(2n\pi - \varphi) \right) e^{\frac{2n\pi}{\tan(\varphi)}} = \left(I_{02\pi} + \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\varphi) \right) e^{\frac{2n\pi}{\tan(\varphi)}} \\
 &\downarrow \\
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) + \left(I_{02\pi} + \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - 2n\pi)}{\tan(\varphi)}}
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Sacando factor común $\sqrt{2}V/Z$ tenemos:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left(\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{(\omega t - 2n\pi)}{\tan(\varphi)}} \right) + I_{02\pi} e^{-\frac{(\omega t - 2n\pi)}{\tan(\varphi)}} \tag{5.36}$$

Note que la expresión (5.36) es igual a la expresión (5.30) si se suma la condición inicial multiplicada por la exponencial respectiva.

Evaluando la condición final de la expresión (5.36) en $\omega t = (2n+1)\pi$, se obtiene la condición inicial para la corriente que circula por el diodo dos.

$$\begin{aligned}
 i(t_{(2n+1)\pi}) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left(\sin((2n+1)\pi - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right) + I_{02\pi} e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} = I_{0\pi} \\
 I_{0\pi} &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left(\sin(\varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right) + I_{02\pi} e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \\
 I_{0\pi} &= \frac{\sqrt{2}V \sin(\varphi)}{Z} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right) + I_{02\pi} e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

La expresión de corriente para $(2n+1)\pi \leq \omega t \leq (2n+2)\pi$ que corresponde al diodo dos es:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= I_{0\pi} e^{-\frac{(\omega t - (2n+1)\pi)}{\tan(\varphi)}} \\
 i(t) &= \left(\frac{\sqrt{2}V \sin(\varphi)}{Z} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right) + I_{02\pi} e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right) e^{-\frac{(\omega t - (2n+1)\pi)}{\tan(\varphi)}}
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Note que la expresión (5.38) es igual a la expresión (5.33), la única diferencia es la denominación y valor de la condición inicial.

Evaluando la condición final de la expresión (5.38) en $\omega t = (2n+2)\pi$, se obtiene la condición inicial para el siguiente periodo de operación del puente convertidor. Como estamos analizando el estado estacionario y por la condición de régimen permanente, se obtiene:

$$i(t_{(2n+2)\pi}) = I_{0\pi} e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} = I_{02\pi} \quad (5.39)$$

Utilizando los resultados de las expresiones (5.37) y (5.39), se pueden obtener los valores de las corrientes iniciales $I_{0\pi}$ e $I_{02\pi}$. De la ecuación (5.39) se obtiene:

$$I_{0\pi} = I_{02\pi} e^{\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \quad (5.40)$$

Sustituyendo la expresión (5.40) en el resultado de la ecuación (5.37), se obtiene:

$$\begin{aligned} I_{0\pi} &= I_{02\pi} e^{\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} = \frac{\sqrt{2}V \sin(\varphi)}{Z} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right) + I_{02\pi} e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \\ I_{02\pi} \left(e^{\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right) &= \frac{\sqrt{2}V \sin(\varphi)}{Z} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right) \\ I_{02\pi} &= \frac{\sqrt{2}V \sin(\varphi)}{Z} \cdot \frac{\left(1 + e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right)}{\left(e^{\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right)} \end{aligned} \quad (5.41)$$

En la figura 5.15 se presentan las forma de onda de la tensión y corriente en la carga y fuente de alterna de este puente convertidor, para una fuente de $v_f(t) = \sqrt{2}120 \sin(377t)$, $R = 60\Omega$ y $L = 223\text{mH}$.

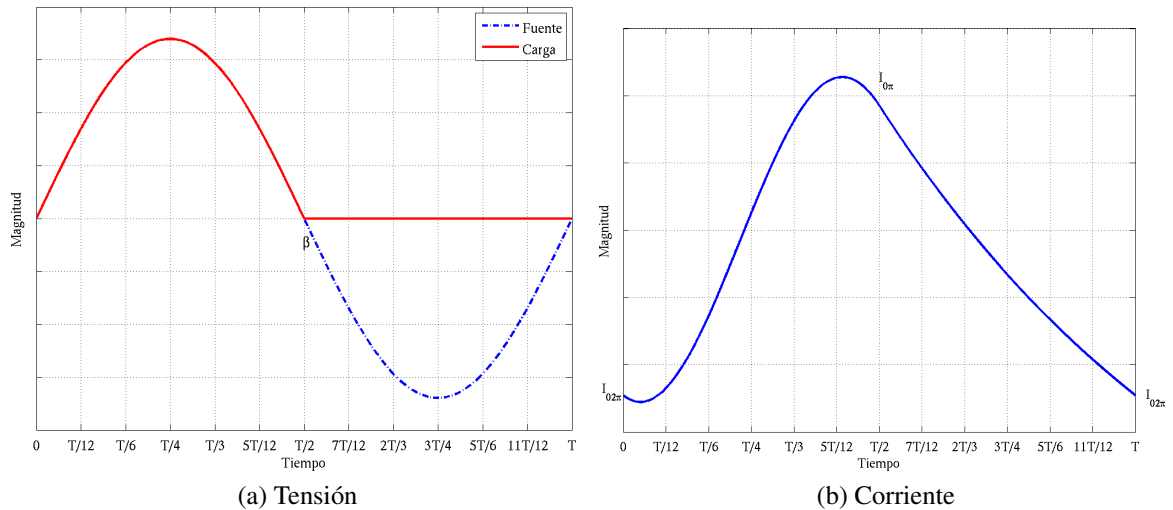


Figura 5.15: Formas de onda para un rectificador no controlado de media onda con diodo de descarga libre

Como el circuito de la figura 5.15, es un circuito serie la corriente por la carga es la superposición de la corriente en cada uno de los diodos que integran el circuito. En la figura 5.16, se puede observar la corriente por el diodo principal y el de descarga libre.

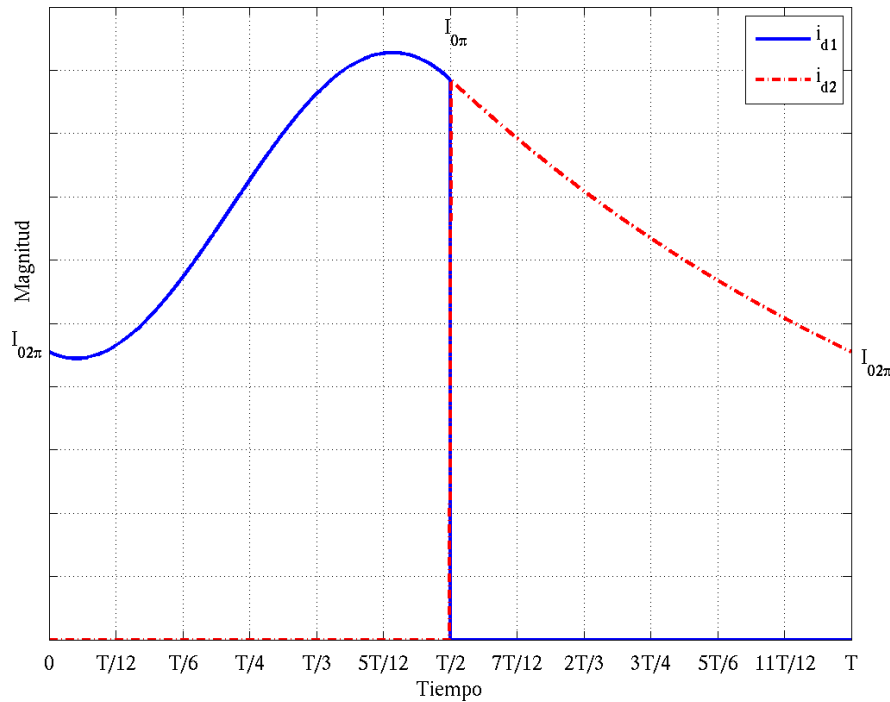


Figura 5.16: Corriente por el diodo D_1 y de descarga libre (D_2) para la carga RL

En la figura 5.17, se presentan los contenidos armónicos de tensión y corriente en la carga. Se puede observar que el mayor contenido armónico lo presenta la tensión, mientras que la corriente es casi de continua.

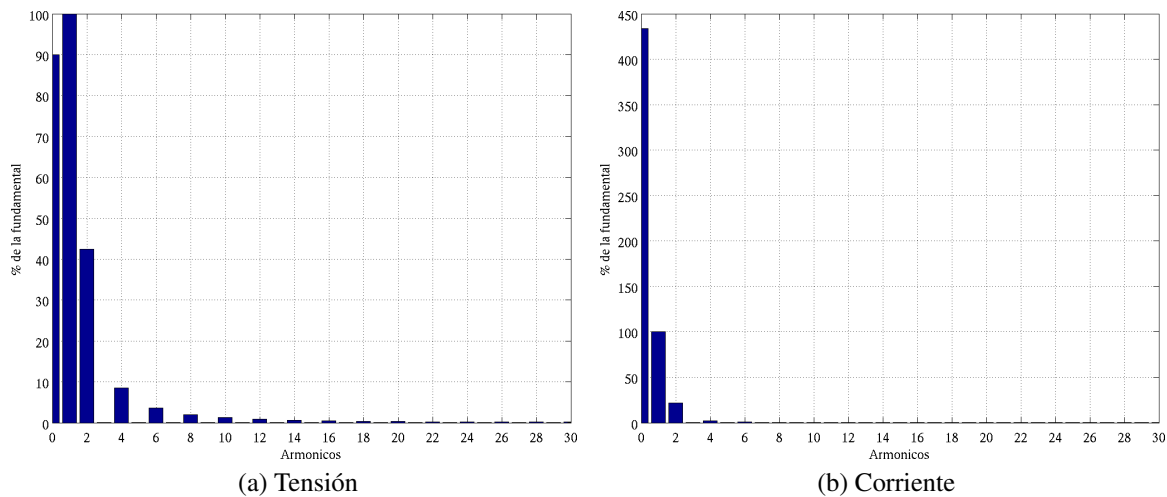


Figura 5.17: Contenido armónico para la carga resistiva inductiva

Para encontrar la tensión media y efectiva se aplicara la definiciones del capítulo 1.

5.5.2.1. Tensión Media

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left(-\cos(\omega t) \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left(-\cos(\omega t) \right) \Big|_0^{\pi} \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (1 - (-1)) \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi}
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

5.5.2.2. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\pi - 0 - \frac{\sin(2\pi)}{2} + \frac{\sin(0)}{2} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \cdot \pi} = \frac{V}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

5.5.2.3. Corriente Media

$$I_0 = I_{0D_1} + I_{0D_2} = \frac{V_0}{R} = \frac{\sqrt{2}V}{\pi R} \tag{5.44}$$

donde:

$$I_{0D_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left(\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \right) + I_{02\pi} e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \right) d\omega t \tag{5.45}$$

$$I_{0D_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left(I_{0\pi} e^{-\frac{(\omega t - \pi)}{\tan(\varphi)}} \right) d\omega t \tag{5.46}$$

5.5.2.4. Corriente Efectiva

$$I_{rms} = \sqrt{I_{rmsD_1}^2 + I_{rmsD_2}^2} \quad (5.47)$$

donde:

$$I_{rmsD_1} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left(\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \right) + I_{02}\pi e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \right)^2 d\omega t} \quad (5.48)$$

$$I_{rmsD_2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \left(I_{01}\pi e^{-\frac{(\omega t - \pi)}{\tan(\varphi)}} \right)^2 d\omega t} \quad (5.49)$$

5.5.3. Simulación

```

1  % Programa para Diodo de descarga libre con fuente de la forma
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \sin(\omega t)$ 
3  % Carga tip RL
4
5  % Entrada de datos
6  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
7  R=input('Resistencia [Ohm] ');
8  L=input('Inductancia [H] ');
9  f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
10
11 % Parámetros
12 fi=atan(2*pi*f*L/R);
13 Z=sqrt((2*pi*f*L)^2+R^2);
14
15 % Condición de régimen permanente
16 I02=sqrt(2)*V*sin(fi)/Z*(1+exp(-pi/tan(fi)))/(exp(pi/tan(fi))-exp(-pi
    /tan(fi)))
17 I01=I02*exp(pi/tan(fi))
18
19 if I02<0
20     I02=0;
21     I01=sqrt(2)*V/Z*(sin(pi-fi)+sin(fi)*exp(-(pi)/tan(fi)));
22 end
23

```

```

24 % Función en el tiempo
25 t1=0:0.001:pi;
26 t2=pi:0.001:2*pi;
27 id1=sqrt(2)*V/Z*(sin(t1-fi)+sin(fi)*exp(-(t1)/tan(fi)))+I02*exp(-(t1)
    /tan(fi));
28 id2=I01*exp(-(t2-pi)/tan(fi));
29 t=[t1,t2];
30
31 % Rizado
32 Rizado=(max(id1)-min(id2))/2
33
34 % Corriente media y efectiva de los diodos y la carga
35 Io_d1=1/(2*pi)*trapz(t1,id1)
36 Io_d2=1/(2*pi)*trapz(t2,id2)
37 Io=Io_d1+Io_d2
38 Irms_d1=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t1,id1.^2))
39 Irms_d2=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t2,id2.^2))
40 Irms=sqrt(Irms_d1^2+Irms_d2^2)
41
42 % Tensión media y efectiva
43 Vo=sqrt(2)*V/pi
44 Vrms=V/sqrt(2)
45
46 %Factor de rizado
47 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
48 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
49
50
51
52 % Graficas
53 figure(1)
54 t2=0:0.001:2*pi;
55 vx=sqrt(2)*V*sin(t2).*(square(t2)+1)*.5;
56 vf=sqrt(2)*V*sin(t2);
57 ix=[id1,id2];
58 plot(t2,vf,'-.',t2,vx,'r','LineWidth',2);grid
59 legend('Fuente','Carga');
60 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
61 xlim([0 2*pi]);
62 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);

```

```

63 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
64 set(gca,'YTickLabel',{' '})
65 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
66 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
67
68 figure(2)
69 plot(t2,ix,'LineWidth',2);grid
70 xlim([0 2*pi]);
71 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
72 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
73 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
74 set(gca,'YTickLabel',{' '})
75 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
76 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
77
78 figure(5)
79 % Gráficas
80
81 ID1=[id1,zeros(size(id2))];
82 ID2=[zeros(size(id1)),id2];
83 plot(t,ID1,t,ID2,'-.r','LineWidth',2);grid
84 legend('i_d_1','i_d_2')
85 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
86 xlim([0 2*pi]);
87 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
88 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
89 set(gca,'YTickLabel',{' '})
90 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
91 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');

```

5.6. Rectificador con Carga Activa

En la figura 5.18, se presenta en puente rectificador de media onda con carga activa del tipo resistiva inductiva y fuente de tensión continua. El puente esta alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal ($v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$).

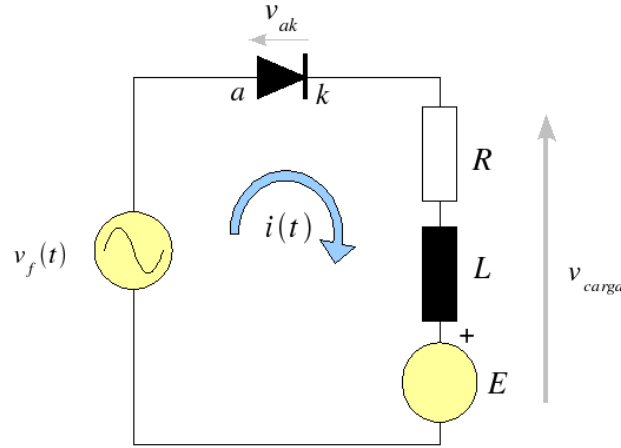


Figura 5.18: Puente rectificador de media onda no controlado con carga activa

Considerando el diodo ideal, es decir que su tensión de ruptura es cero, el ángulo de encendido del diodo para esta fuente sinusoidal se obtiene cuando el diodo se polariza en directo ($v_{ak} \geq 0$), esto ocurre cuando la fuente de tensión sinusoidal iguala y supera a la fuente de tensión continua (E) de la carga por lo cual el ángulo de encendido es función de las magnitudes de la fuente sinusoidal y continua del circuito.

$$\begin{aligned}
 v_f(t) &\geq E \\
 \sqrt{2}V \sin(\omega t) &\geq E \\
 \sin(\omega t) &\geq \frac{E}{\sqrt{2}V} \\
 \sin(\alpha) &= \frac{E}{\sqrt{2}V} \\
 \alpha &= \arcsen\left(\frac{E}{\sqrt{2}V}\right)
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Para encontrar el ángulo de apagado es necesario encontrar cuando la corriente pasa naturalmente por cero ($i(t_\beta) = 0$).

5.6.1. Solución Homogénea

La solución homogénea para un circuito de primer orden viene dada por la expresión:

$$i(t)_h = ke^{-\frac{R}{L}t} \tag{5.51}$$

Multiplicando el numerador y denominador de la exponencial por ω se obtiene:

$$i(t)_h = ke^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \tag{5.52}$$

donde:

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}$$

5.6.2. Solución Particular Fuente Constante:

$$i(t)_p = -\frac{E}{R} \quad (5.53)$$

5.6.3. Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)

Encontrando la corriente en régimen permanente, utilizando fasores obtenemos:

$$i(t)_p = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega_e t - \varphi) \quad (5.54)$$

donde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega_e L)^2}$$

5.6.4. Solución Total:

Condición inicial del circuito debido a que el diodo se encuentra abierto o en no conducción:

$$i(t_\alpha) = 0$$

$$\begin{aligned} i(t_\alpha) = 0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) - \frac{E}{R} + k e^{-\frac{\alpha}{\tan(\varphi)}} \\ &\downarrow \\ k &= \left(-\frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) + \frac{E}{R} \right) e^{\frac{\alpha}{\tan(\varphi)}} \\ &\downarrow \\ i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega_e t - \varphi) - \frac{E}{R} + \left(-\frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) + \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{(\omega_e t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Sacando factor común $\sqrt{2}V/Z$ tenemos:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega_e t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega_e t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] \quad (5.56)$$

donde:

$$m = \frac{E}{\sqrt{2}V}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z}$$

La corriente de la expresión 5.56 pasa naturalmente por cero cuando $i(t_\beta) = 0$, por lo tanto el ángulo de apagado se calcula igualando esta a cero. La ecuación 5.56 se hace cero si $V = 0$ o $Z = \infty$, estas dos soluciones son triviales e implican que el circuito no está alimentando por ninguna fuente de tensión o no posee carga conectada, por lo cual la única forma que la expresión 5.56 sea cero es que el término entre corchetes sea igual a cero para t_β .

$$\left[\sin(\omega_e t_\beta - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega_e t_\beta - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] = 0 \quad (5.57)$$

$$\left[\sin(\beta - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\beta - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] = 0$$

La expresión 5.57 no posee una solución analítica para β , este tipo de expresión se le conoce como ecuación trascendental y su solución es numérica. Diversos métodos de solución numérica se pueden emplear para la solución de esta ecuación. La solución del ángulo de apagado está acotada entre $\pi - \alpha \leq \beta \leq 2\pi$. En la figura 5.19, se presentan las formas de onda de la tensión y corriente en la carga y fuente de alterna de este puente convertidor.

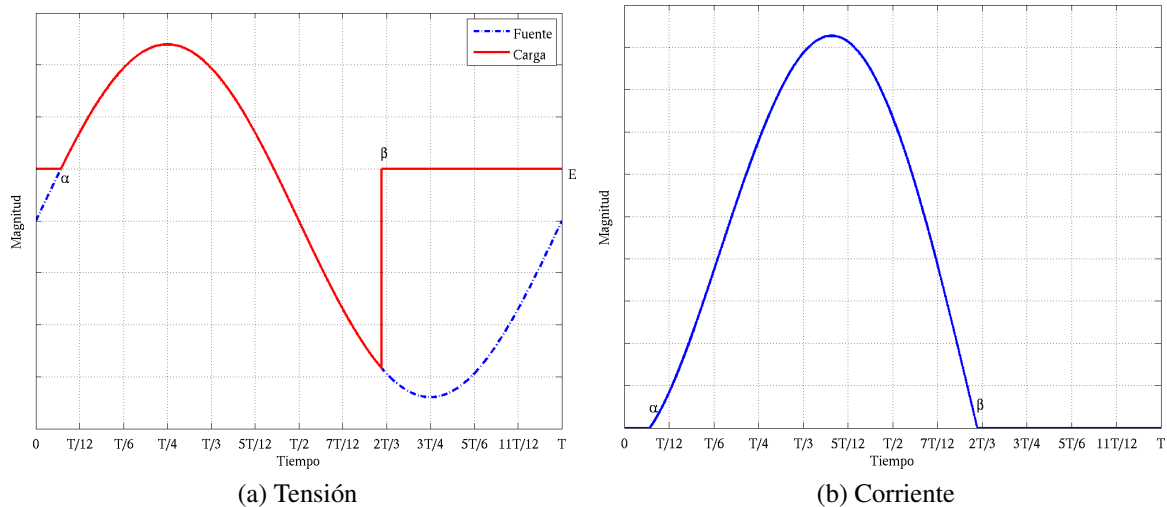


Figura 5.19: Formas de onda en la carga activa

Como el circuito de la figura 5.19, es un circuito serie la corriente por la carga es la misma corriente por la fuente de corriente alterna. En la figura 5.20, se presentan los contenidos armónicos de

tensión y corriente en la carga. Se puede observar que el mayor contenido armónico luego de la fundamental se obtiene en la armónica cero correspondiente al valor medio y la segunda armónica.

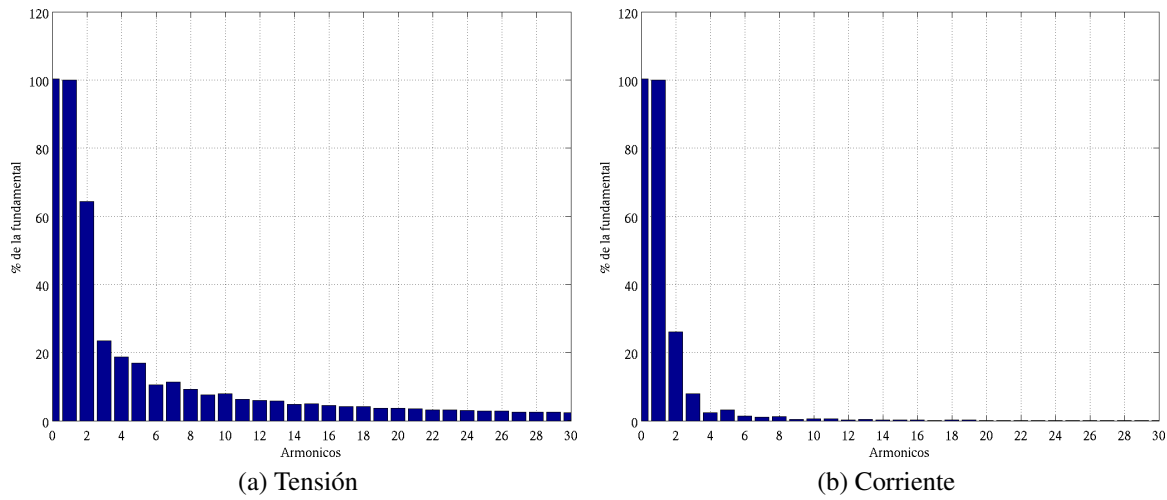


Figura 5.20: Contenido armónico en la carga activa

Para encontrar la tensión y corriente media y efectiva se aplicara la definición en vista anteriormente en el intervalo del periodo en donde la función esta definida, que es entre el ángulo de encendido y el de apagado de la componente.

5.6.5. Tensión Media

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t + \int_{\beta}^{\alpha+2\pi} E d\omega t \right] \\
 V_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{2}V - \cos(\omega t) \Big|_{\alpha}^{\beta} + E\omega t \Big|_{\beta}^{\alpha+2\pi} \right] \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) + E \left(\frac{2\pi - (\beta - \alpha)}{2\pi} \right) \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) + E \left(1 - \frac{\gamma}{2\pi} \right)
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

5.6.6. Corriente Media

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} i(t) d\omega t \\
 I_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_{min}}^{\beta} \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] d\omega t \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_{min}}^{\beta} \left(\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) d\omega t \right] \\
 I_0 &= \frac{V_0 - E}{R} = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi R} (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) - \frac{\gamma E}{2\pi R}
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

5.6.7. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left(\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t + \int_{\beta}^{\alpha+2\pi} E^2 d\omega t \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t + \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\alpha+2\pi} E^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} + \frac{E^2}{2\pi} \omega t \Big|_{\beta}^{\alpha+2\pi}} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\beta - \alpha_{min} - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(2\alpha_{min})}{2} \right) + E^2 \left(1 - \frac{\beta - \alpha_{min}}{2\pi} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\gamma - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) + E^2 \left(1 - \frac{\gamma}{2\pi} \right)}
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Nota: La expresión (5.60) sólo es válida en radianes.

5.6.8. Corriente Efectiva

$$\begin{aligned}
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} i(t)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] \right)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left(\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) \right]^2 d\omega t}
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

5.6.9. Simulación

```

1  % Media Onda No Controlado con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \sin(\omega t)$ 
3  % Carga tip RLE
4
5  % Entrada de datos
6  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
7  R=input('Resistencia [Ohm] ');
8  L=input('Inductancia [H] ');
9  E=input('Tension de la carga ');
10 f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
11
12 % Parámetros

```

```

13 fi=atan(2*pi*f*L/R);
14 Z=sqrt((2*pi*f*L)^2+R^2);
15 m=E/(sqrt(2)*V);
16 a=asin(m);
17
18 % Cálculo del ángulo de apagado
19 b=fsolve(@(t) sin(t-fi)-m/cos(fi)+(m/cos(fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan
    (fi))),[pi])
20 g=b-a;
21
22 % Función en el tiempo
23 t=a:(b-a)/1000:b;
24 i=sqrt(2)*V/Z*(sin(t-fi)-m/cos(fi)+(m/cos(fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/
    tan(fi))));
25 v=sqrt(2)*V*sin(t);
26
27 % Valores Medios
28 Io=1/(2*pi)*trapz(t,i)
29 Vo=sqrt(2)*V/(2*pi)*(cos(a)-cos(b))+E*(2*pi-g)/(2*pi)
30
31
32 % Valores Efectivos
33 Irms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,i.^2))
34 Vrms=sqrt(V^2/(2*pi)*(g-(sin(2*b))/2+(sin(2*a))/2)+E^2*(1-g/(2*pi)))
35
36 %Factor de rizado
37 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
38 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
39
40 % Graficas
41 figure(1)
42 tant=0:a/300:a;
43 tdes=b:(2*pi-b)/300:2*pi;
44 t1=[tant,t,tdes];
45 vf=sqrt(2)*V*sin(t1);
46 vx=[E*ones(size(tant)),v,E*ones(size(tdes))];
47 ix=[zeros(size(tant)),i,zeros(size(tdes))];
48 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
49 legend('Fuente','Carga');
50 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');

```

```

51 xlim([0 2*pi]);
52 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
53 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
54 set(gca,'YTickLabel',{' '})
55 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
56 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
57
58 figure(2)
59 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
60 xlim([0 2*pi]);
61 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
62 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
63 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
64 set(gca,'YTickLabel',{' '})
65 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
66 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
67
68 % Primera Armónica
69 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,vx.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
70 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
71
72 % THD
73 THDv=sqrt(Vrms^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
74 THDi=sqrt(Irms^2-Irms_1^2)/Irms_1

```

5.7. Ejemplo:

5.7.1. Rectificador con Carga RC

En la figura 5.21, se presenta en puente rectificador de media onda con carga del tipo resistiva capacitiva. El puente esta alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal ($v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$).

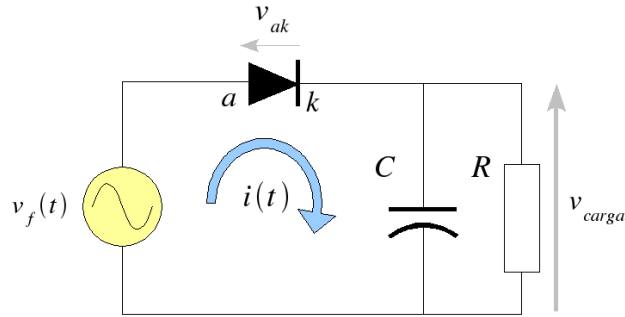


Figura 5.21: Puente rectificador de media onda no controlado con carga RC

Analizando en puente rectificador de media onda de la figura 5.21, se obtiene:

- Ecuación de corriente:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_{carga}}{dt} + \frac{v_{carga}}{R} \quad (5.62)$$

- Tensión en el intervalo: $\alpha \leq \omega t \leq \beta$

$$v_{carga}(t) = v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t) \quad (5.63)$$

- Sustituyendo la expresión (5.63) en (5.62), se obtiene:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{R} \cdot (\omega CR \cdot \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \quad (5.64)$$

- Definiendo:

$$q = \omega CR \quad (5.65)$$

- Se puede escribir la expresión (5.64) como:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{R} \cdot (q \cdot \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \quad (5.66)$$

- La corriente pasa naturalmente por cero en el ángulo de apagado (β):

$$i\left(\frac{\beta}{\omega}\right) = 0 = \frac{\sqrt{2}V}{R} \cdot (q \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta)) \quad (5.67)$$

- Despejando el ángulo de apagado de la expresión (5.67) y recordando que la solución se encuentra $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi$ por ser una carga resistiva capacitiva, se obtiene:

$$\beta = \pi - \arctan(q) \quad (5.68)$$

- Para encontrar el ángulo de encendido (α) se debe evaluar la corriente sobre la carga cuando el diodo se apaga ($\beta \leq \omega t \leq \alpha + 2\pi$).

$$i(t) = 0 = C \cdot \frac{dv_{carga}}{dt} + \frac{v_{carga}}{R} \quad (5.69)$$

- Resolviendo la ecuación diferencial (5.69) y evaluando su condición inicial, se obtiene:

$$v_{carga}(t) = \sqrt{2}V \sin(\beta) e^{-\frac{(\omega t - \beta)}{q}} \quad (5.70)$$

- Para encontrar el ángulo de encendido (α) se iguala la tensión en la carga con la fuente en $\alpha + 2\pi$:

$$\sqrt{2}V \sin(\beta) e^{-\frac{(\alpha + 2\pi - \beta)}{q}} = \sqrt{2}V \sin(\alpha + 2\pi) \quad (5.71)$$

- La ecuación (5.71) no posee respuesta analítica y se debe resolver por métodos numéricos.
- Tensión media en la carga:

$$V_0 = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left(\cos(\alpha) - \cos(\beta) + q \cdot \sin(\beta) \cdot \left(1 - e^{-\frac{(2\pi + \alpha - \beta)}{q}} \right) \right) \quad (5.72)$$

En la figura 5.22, se presenta la forma de onda de tensión y corriente sobre la carga. Adicionalmente, en la figura 5.23 se muestra los contenidos armónicos de tensión y corriente en la carga.

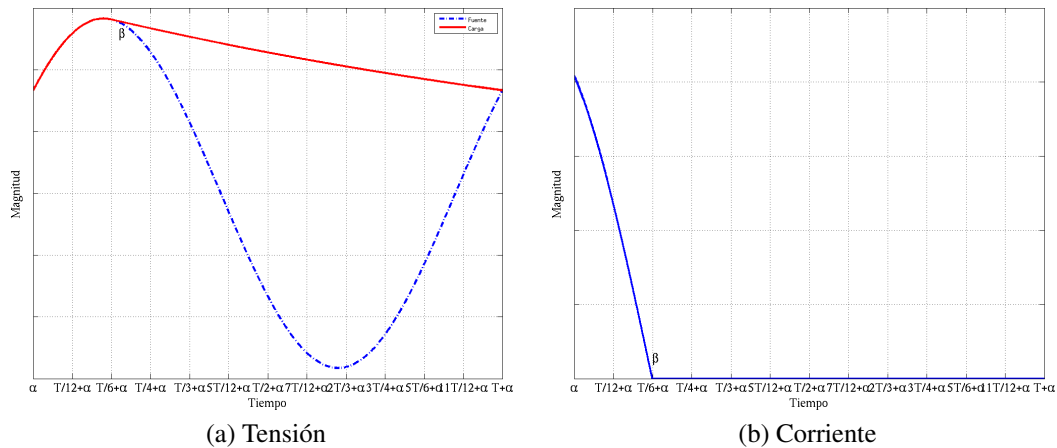


Figura 5.22: Formas de onda en la carga RC

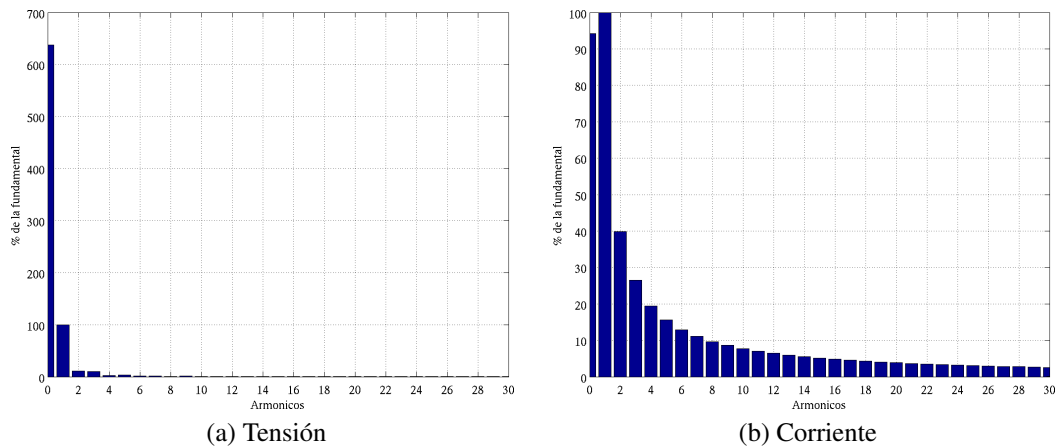


Figura 5.23: Contenido armónico en la carga RC

5.7.1.1. Simulación

```

1  % Media Onda No Controlado con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} \cdot v \cdot \sin(\omega t)$ 
3  % Carga tip RC
4
5  % Entrada de datos
6  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
7  R=input('Resistencia [Ohm] ');
8  C=input('Capacitancia [F] ');
9  f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
10
11
12  % Parámetros
13  q=2*pi*f*R*C;
14  % Angulo de apagado
15  b=pi - atan(q)
16  % Angulo de encendido
17  a=fsolve(@(t) sin(b)*exp(-(2*pi+a-b)/q) - sin(t+2*pi), [0.01])
18
19  % Función en el tiempo
20  t1=linspace(a,b,500);
21  v1=sqrt(2)*V*sin(t1);
22  i1=sqrt(2)*V/R*(q*cos(t1)+sin(t1));
23  t2=linspace(b,a+2*pi,500);
24  v2=sqrt(2)*V*sin(b)*exp(-(t2-b)/q);

```

```
25 i2=zeros(size(t2));
26 t=[t1,t2];
27 v=[v1,v2];
28 i=[i1,i2];
29 gama=b-a
30
31 % Valores Medios
32 Io=1/(2*pi)*trapz(t,i)
33 Vo=1/(2*pi)*trapz(t,v)
34
35
36 % Valores Efectivos
37 Irms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,i.^2))
38 Vrms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,v.^2))
39
40 % Rizado de tensión
41 Dv=(sqrt(2)*V-sqrt(2)*sin(a)*V)/2
42
43 %Factor de rizado
44 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
45 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
46
47
48 % Primera Armónica
49 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t,v.*exp(j*t))))/sqrt(2)
50 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t,i.*exp(j*t))))/sqrt(2)
51
52 % THD
53 THDv=sqrt(Vrms^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
54 THDi=sqrt(Irms^2-Irms_1^2)/Irms_1
55
56 % Graficas
57 figure(1)
58 t1=[t];
59 vf=sqrt(2)*sin(t1);
60 vx=[v];
61 ix=[i];
62 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
63
64 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Symbol');
```

```

65 xlim([a 2*pi+a]);
66 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
67 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
68 set(gca,'YTickLabel',{' '})
69 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
70 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
71 legend('Fuente','Carga');
72 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
73
74 figure(2)
75 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
76 xlim([a 2*pi+a]);
77 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Symbol');
78 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
79 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
80 set(gca,'YTickLabel',{' '})
81 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
82 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');

```

5.8. Ejercicios

1. Un puente rectificador de media onda no controlado con diodo de descarga libre es alimentado por una fuente sinusoidal de tensión efectiva $220V$ a $60Hz$. Este convertidor alimenta una carga RL de 60Ω y $60mH$. Determine:

- Corriente en régimen permanente, corriente media y efectiva en los diodos y la carga, rizado de corriente, tensión media y efectiva sobre la carga y factor de rizado de tensión y corriente.
- Especifique los diodos necesarios para la construcción de este puente si $V_{TO} = 1V$ y $R_D = 12m\Omega$ ¹

2. Un puente rectificador de media onda no controlado alimenta una carga RL de 60Ω y $60mH$. La fuente de alimentación ($v_f(t)$) posee una tensión pico de $200V$ y una frecuencia de $60Hz$. Determine:

¹ $P_D = V_{TO}I_{0D} + R_D I_{rmsD}^2$

- a) Tiempo de apagado, tensión media y efectiva sobre la carga, corriente media y efectiva en la carga, factor de rizado y distorsión armónica total de tensión y corriente, tensión y corriente efectiva a frecuencia fundamental.

$$v_f(t) = \begin{cases} V \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ V & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -V & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

3. Se dispone de un puente rectificador de media onda no controlado con una carga resistiva e inductiva de $R = 50\Omega$ y $L = 130mH$. El puente se alimenta con una fuente de la forma: $v_f(t) = (311,13 \cos(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{3}))u(t)$, la frecuencia de la fuente es $60Hz$. Determine:

- a) Ángulo de apagado.
 b) Tensión media y efectiva sobre la carga.
 c) Corriente media y efectiva sobre la carga.
 d) Potencia disipada por la carga y el diodo si se conoce que $v_{TO} = 0,9V$ y $R_D = 15m\Omega$
 e) Factor de distorsión y distorsión armónica de tensión y corriente en la carga y la fuente.
4. Se dispone del puente rectificador de la figura 5.24, con los siguientes valores $R = 20\Omega$ $L_\sigma = 7mH$ y $L = 60mH$. Determine:

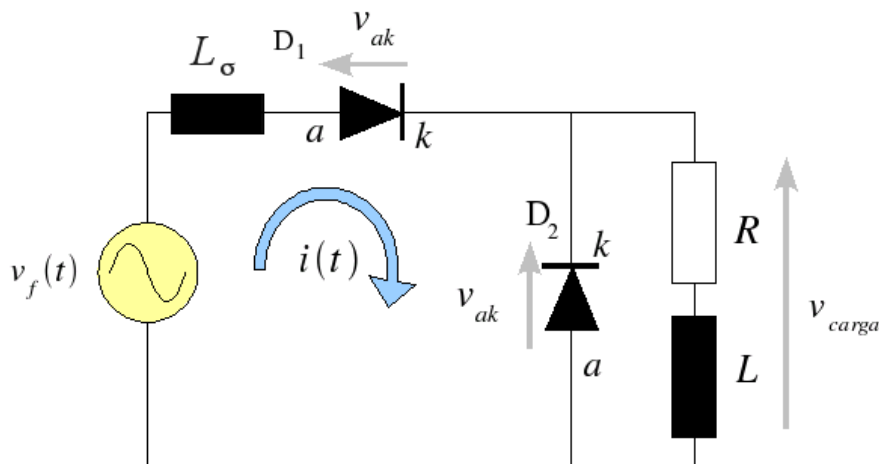


Figura 5.24: Problema 4

- a) Tensión y corriente media por la carga.
 b) Potencia entregada por la fuente y disipada en la carga.
 c) Factor de potencia en la fuente.

5. Se dispone de un puente rectificador de media onda no controlado con diodo de descarga libre, alimentado desde una fuente de la forma:

$$v_f(t) = \begin{cases} V \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right) & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ V & \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \\ -V\left(t - \frac{T}{2}\right) & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

Determine, si el rectificador alimenta una carga resistiva inductiva de $R = 40\Omega$ y $L = 100mH$ y la tensión efectiva de la fuente de alimentación ($v_f(t)$) es de 147,20V

- Expresión de corriente en el primer ciclo de operación.
 - Expresión de corriente en régimen permanente.
 - Rizado de corriente en régimen permanente. $\%R = 100(I_{max} - I_{min})/I_{max}$
 - Corriente media y efectiva en cada componente del puente en régimen permanente.
 - Tensión media y efectiva sobre la carga.
 - Potencia disipada por la carga.
 - Inductancia adicional que sería necesaria colocar en el circuito y su posición para mantener un rizado de corriente del 3% con un corriente media de 2,0458A
6. Repita el problema anterior cambiando la fuente de tensión $v_f(t)$ por:

$$v_f(t) = \begin{cases} \frac{8Vt^2}{T^2} & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ \frac{V}{2} + \frac{2V}{T}\left(t - \frac{T}{4}\right) & \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \\ -V & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

7. Se tiene el puente rectificador de media onda con diodo de descarga libre. La fuente es una onda cuadrada alterna con valor pico de 100V y un periodo de 20mseg. La resistencia es de 10Ω y la inductancia de 11,9175H.
- Desarrolle las expresiones de corriente del circuito.
 - Calcule los valores de corriente en $\frac{T}{2}$ y T .
 - Calcule el valor medio y efectivo de la corriente en cada diodo y la carga.
8. Dado el puente rectificador de media onda con diodo de descarga libre, alimentado por una fuente sinusoidal $v_f(t) = \sqrt{2}208 \cos(377t - 2\pi/3)$ con una carga RL de 30Ω y $L = 300mH$.
- Desarrolle las expresiones de corriente por los diodos en función de cosenos.

- b)* Tensión media y efectiva por la carga.
- c)* Valor de la corriente en régimen permanente.
- d)* Valor medio y efectivo de corriente por cada diodo y la carga.

Rectificador de Media Onda Controlado

6.1. Aspectos Generales

Los rectificadores de media onda de diodos son conocidos como no controlados, debido a que su salida en corriente continua es fija y determinada por el valor pico de la fuente de corriente alterna que lo alimenta, su forma y la carga conectada en sus terminales. Una forma de controlar el valor DC entregado por el puente rectificador es reemplazar el diodo por otro dispositivo de electrónica de potencia capaz de tener mayor grado de controlabilidad. Una de las posibles formas de controlar la salida del puente rectificador es sustituir el diodo por un rectificador controlado de silicio (SCR) o tiristor. En la figura 6.1, se presenta el esquema del puente rectificador de media onda controlado con tiristor.

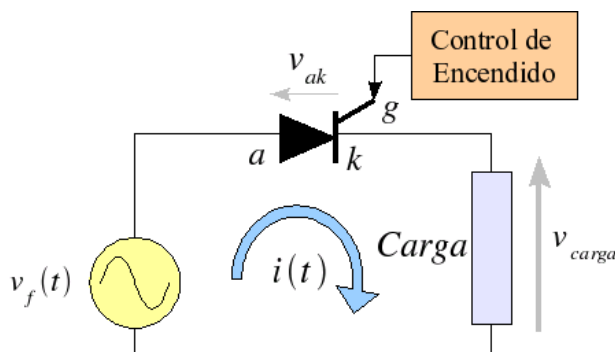


Figura 6.1: Esquema del rectificador de media onda controlado

El control de la tensión de corriente continua a la salida del rectificador, se basa en retardar el inicio de la conducción del SCR mediante el pulso de corriente en la compuerta del dispositivo. Este pulso de corriente en la compuerta del dispositivo corresponde al ángulo de encendido (α) de la componente. Para tener control de encendido del tiristor se deben cumplir dos condiciones básicas: Polarización ánodo cátodo positiva ($v_{ak} \geq 0$) y pulso de corriente en la compuerta del dispositivo ($i_g > 0$).

A diferencia del diodo, el tiristor no entrará en estado de conducción en cuanto la señal de la fuente de alimentación sea positiva. La conducción no se inicia hasta que se aplica un pulso de corriente en la compuerta de encendido (Gate), lo cual es la base para utilizar el SCR como dispositivo de control. Una vez que el tiristor derrumba la barrera de potencial de las junturas NP y comienza a conducir, la corriente por la compuerta de encendido se puede retirar y el dispositivo continua en conducción hasta que la corriente que circula por el se hace igual a cero de forma natural o forzada.

6.2. Rectificador con Carga Resistiva

En la figura 6.2, se presenta el puente rectificador de media onda controlado con carga pura resistiva. El puente esta alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal dada por la expresión: $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$.

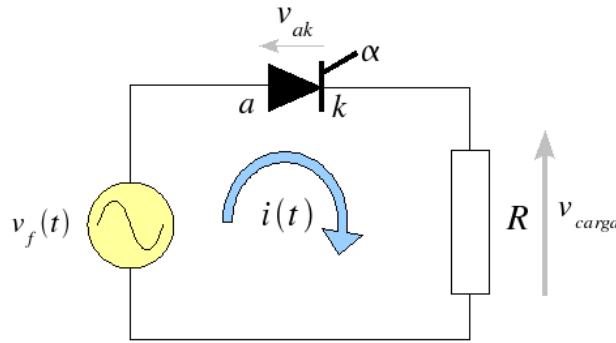


Figura 6.2: Puente rectificador de media onda controlado con carga resistiva

Considerando el Tiristor ideal, es decir que su tensión de ruptura es cero, el rango de controlabilidad del puente esta determinado por aquellos valores del ángulo de encendido donde el tiristor se encuentre polarizado en directo ($v_{ak} \geq 0$), garantizando de esta forma la conducción de la componente. El rango de control del tiristor esta comprendido para este caso particular de fuente sinusoidal en su semiciclo positivo ($0 \leq \alpha \leq \pi$). El ángulo de encendido α define el tiempo de inicio de conducción de la componente mediante la siguiente expresión:

$$t_\alpha = \frac{\alpha}{\omega} \quad (6.1)$$

Para encontrar el ángulo de apagado es necesario encontrar cuando la corriente pasa naturalmente por cero ($i(t_\beta) = 0$). La corriente para $t_\alpha \leq t \leq t_\beta$ es:

$$i(t) = \frac{v_f(t)}{R} = \sqrt{2} \frac{V}{R} \sin(\omega t) \quad (6.2)$$

La corriente de la expresión (6.2) pasa naturalmente por cero en $\omega t_\beta = \pi$, por lo tanto el ángulo de apagado es $\beta = \pi$.

En la figura 6.3, se presentan las forma de onda de la tensión y corriente en la carga y fuente de alterna de este puente convertidor para un ángulo de disparo $\alpha = \pi/3$.

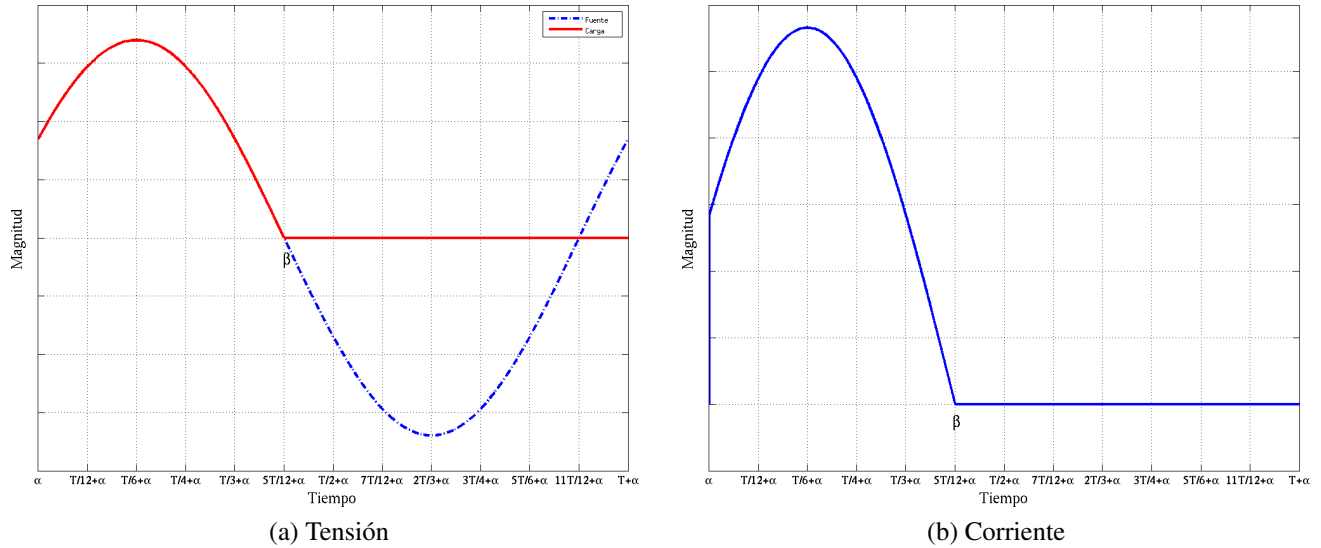


Figura 6.3: Tensión y corriente en la carga resistiva

Como el circuito de la figura 6.2 es un circuito serie la corriente por la carga es la misma corriente por la fuente de corriente alterna. En la figura 6.4, se presentan los contenidos armónicos de tensión y corriente en la carga. Se puede observar que el mayor contenido armónico luego de la fundamental se obtiene en la armónica cero correspondiente al valor medio y la segunda armónica.

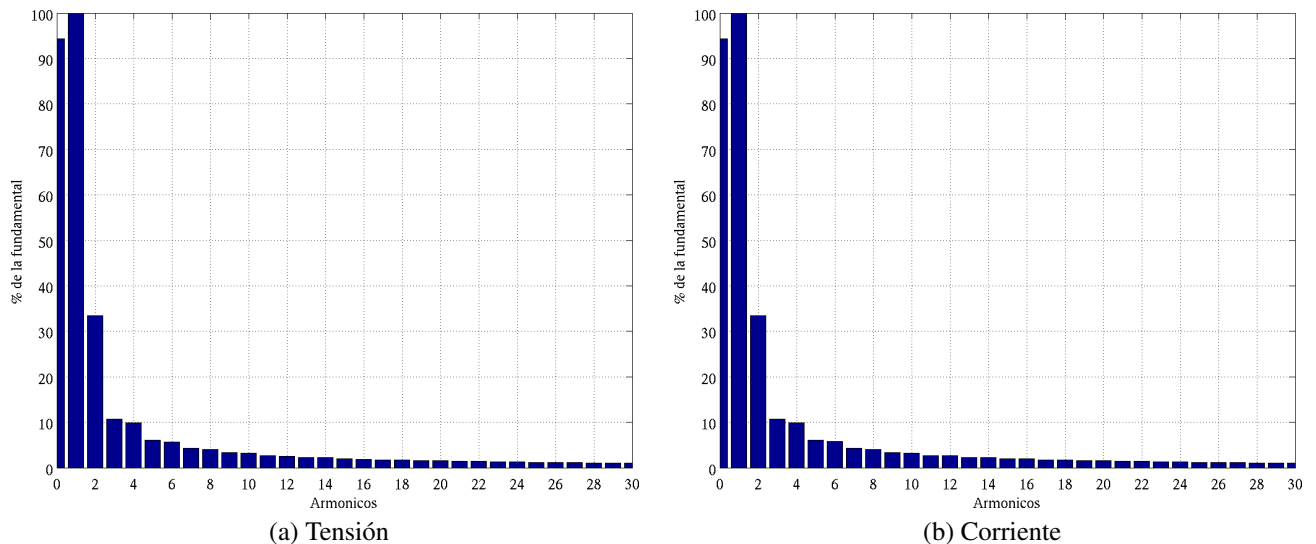


Figura 6.4: Contenido armónico de la tensión y corriente para la carga resistiva

Para encontrar la tensión y corriente media y efectiva se aplicara las definiciones del capítulo 1.

6.2.1. Tensión Media

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left(-\cos(\omega t) \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\alpha) - \cos(\pi)) \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\alpha) - (-1)) \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (1 + \cos(\alpha))
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

6.2.2. Corriente Media

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2} \frac{V}{R} \sin(\omega t) d\omega t \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi R} \left(-\cos(\omega t) \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi R} (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi R} (\cos(\alpha) - \cos(\pi)) \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi R} (\cos(\alpha) - (-1)) \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi R} (1 + \cos(\alpha))
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

6.2.3. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(\beta - \alpha - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(\pi - \alpha - \frac{\sin(2\pi)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(\pi - \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) \right)}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

6.2.4. Corriente Efectiva

$$\begin{aligned}
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2} \frac{V}{R} \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi R^2} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi R^2} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \right)} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi R^2} \left(\left(\beta - \alpha - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) \right)} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi R^2} \left(\left(\pi - \alpha - \frac{\sin(2\pi)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) \right)} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi R^2} \left(\left(\pi - \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) \right)}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

6.2.5. Factor de Rizado

$$FR = \frac{\sqrt{\left(\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(\pi - \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) \right) \right) - \left(\frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (1 + \cos(\alpha)) \right)^2}}{\frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (1 + \cos(\alpha))} \tag{6.7}$$

6.3. Rectificador con Carga Resistiva Inductiva

En la figura 6.5, se presenta el puente rectificador de media onda controlado con carga resistiva inductiva. El puente esta alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal dada por la expresión: $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$.

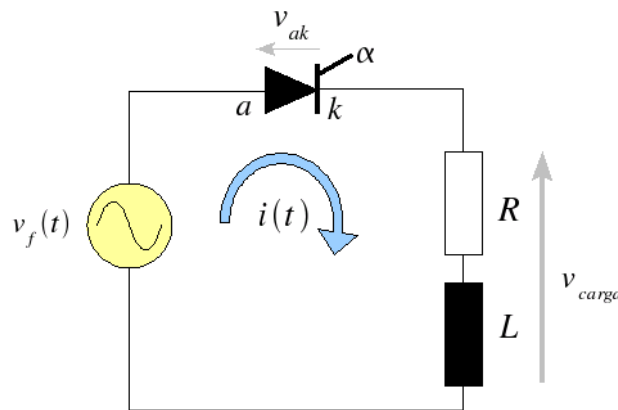


Figura 6.5: Puente rectificador de media onda controlado con carga RL

Considerando el Tiristor ideal, es decir que su tensión de ruptura es cero, el rango de controlabilidad del puente esta determinado por aquellos valores del ángulo de encendido donde el tiristor se encuentre polarizado en directo ($v_{ak} \geq 0$), garantizando de esta forma la conducción de la componente. El rango de control del tiristor esta comprendido para este caso particular de fuente sinusoidal en su semiciclo positivo ($0 \leq \alpha \leq \pi$).

Para encontrar el ángulo de apagado es necesario encontrar cuando la corriente pasa naturalmente por cero ($i(t_\beta) = 0$).

6.3.1. La corriente para $t_\alpha \leq t \leq t_\beta$ es:

6.3.1.1. Solución Homogénea.

$$i_h(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} \quad (6.8)$$

Multiplicando el numerador y denominador de la exponencial por ω , se obtiene:

$$i_h(t) = ke^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \quad (6.9)$$

donde:

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}$$

6.3.1.2. Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)

Encontrando la corriente en régimen permanente, utilizando fasores obtenemos:

$$i_p(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \quad (6.10)$$

donde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

6.3.1.3. Solución Total

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) + ke^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \quad (6.11)$$

Sustituyendo la condición inicial del circuito $i(t_\alpha) = 0$, en la expresión (6.11), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 i(t_\alpha) = 0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) + k e^{-\frac{\alpha}{\tan(\varphi)}} \\
 &\downarrow \\
 k &= \left(-\frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{\frac{\alpha}{\tan(\varphi)}} \\
 &\downarrow \\
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) - \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Sacando factor común $\sqrt{2}V/Z$ se obtiene:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] \tag{6.13}$$

La corriente de la expresión (6.13) pasa naturalmente por cero cuando $i(t_\beta) = 0$, por lo tanto el ángulo de apagado se calcula igualando la ecuación a cero. La expresión (6.13) se hace cero si $V = 0$ ó $Z = \infty$, estas dos soluciones son triviales e implican que el circuito no está alimentando por ninguna fuente de tensión o no posee carga conectada, por lo cual la única forma que la expresión de corriente (6.13) sea cero es que el término entre corchetes sea igual a cero para t_β .

$$\left[\sin(\omega t_\beta - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{(\omega t_\beta - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] = \left[\sin(\beta - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{(\beta - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] = 0 \tag{6.14}$$

La expresión (6.14) no posee una solución analítica para β , este tipo de expresión se le conoce como ecuación trascendental y su solución es numérica. Diversos métodos de solución numérica se pueden emplear para la solución de esta ecuación. La solución del ángulo de apagado está acotada entre $\pi \leq \beta \leq 2\pi$.

En la figura 6.6, se presentan las formas de onda de la tensión y corriente en la carga y fuente de alterna de este puente convertidor, para una fuente de $v_f(t) = \sqrt{2}120 \sin(377t)$, $R = 60\Omega$ y $L = 223\text{mH}$, con un ángulo de encendido de $\alpha = \pi/6$. Para esta carga el ángulo de apagado es $\beta = 4,1243\text{rad} = 236,3027^\circ$.

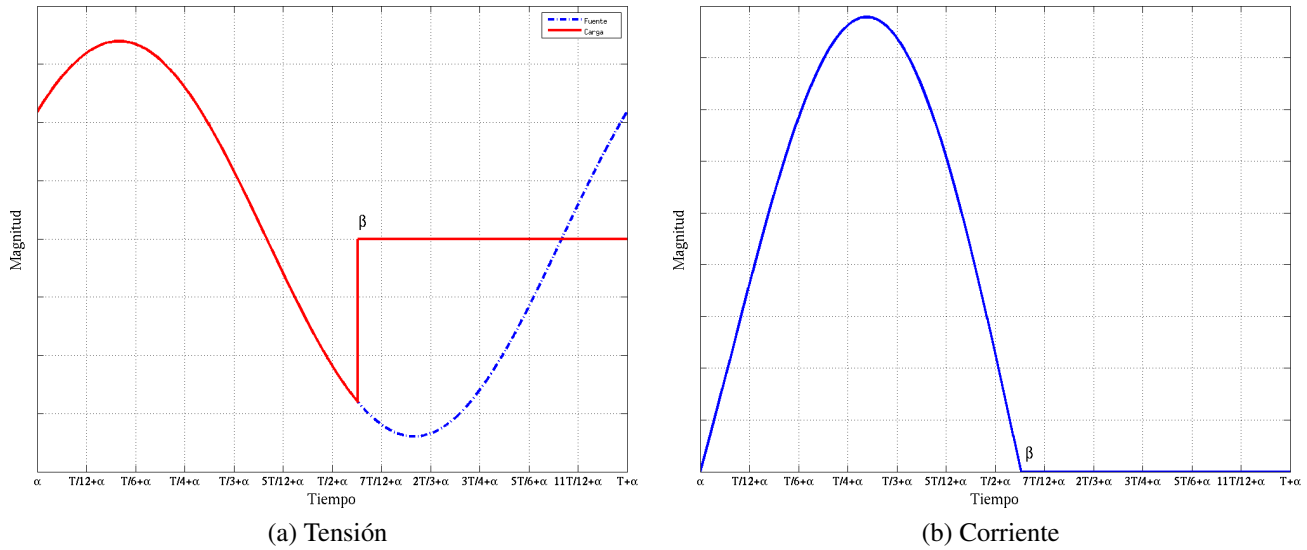


Figura 6.6: Tensión y corriente en la carga resistiva inductiva

Como el circuito de la figura 6.5, es un circuito serie la corriente por la carga es la misma corriente por la fuente de corriente alterna. En la figura 6.7, se presentan los contenidos armónicos de tensión y corriente en la carga. Se puede observar que el mayor contenido armónico luego de la fundamental se obtiene en la armónica cero correspondiente al valor medio y la segunda armónica.

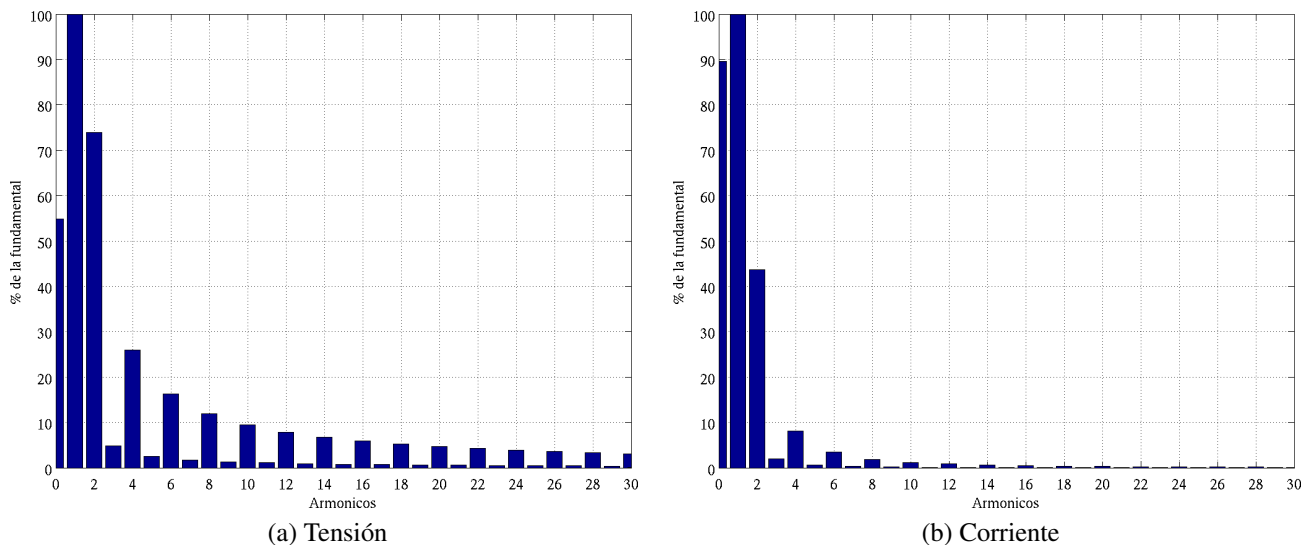


Figura 6.7: Contenido armónico de la tensión y la corriente en la carga resistiva inductiva

Para encontrar la tensión y corriente media y efectiva se aplicara las definiciones del capítulo 1.

6.3.2. Tensión Media

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left(-\cos(\omega t) \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\alpha) - \cos(\beta))
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

6.3.3. Corriente Media

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] \right) d\omega t \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sin(\omega t - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) d\omega t \right] \\
 I_0 &= \frac{V_0}{R} = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi R} (\cos(\alpha) - \cos(\beta))
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

6.3.4. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(\beta - \alpha - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) \right)}
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Nota: La expresión (6.17) sólo es válida en radianes.

6.3.5. Corriente Efectiva

$$\begin{aligned}
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] \right)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sin(\omega t - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right)^2 d\omega t}
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

6.3.6. Factor de Rizado en Tensión

$$FR = \frac{\sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(\beta - \alpha - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) \right) - \left(\frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) \right)^2}}{\frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\alpha) - \cos(\beta))} \quad (6.19)$$

6.3.7. Simulación

```

1  % Media Onda Controlado con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \sin(\omega t)$ 
3  % Carga tipo RL
4
5  clear
6
7  % Entrada de datos
8  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
9  R=input('Resistencia [Ohm] ');
10 L=input('Inductancia [H] ');
11 f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
12 alfa=input('Angulo de encendido en grados ');
13 alfa=alfa*pi/180;
14
15 % Parámetros
16 fi=atan(2*pi*f*L/R);
17 Z=sqrt((2*pi*f*L)^2+R^2);
18 a=alfa;
19
20 % Cálculo del ángulo de apagado
21 b=fsolve(@(t) sin(t-fi)+(-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan(fi))),[pi])
22 g=b-a;
23
24 % Función en el tiempo
25 t=linspace(a,b,1000);
26 t2=linspace(b,a+2*pi,1000);
27 i=sqrt(2)*V/Z*(sin(t-fi)+(-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan(fi))));
28 v=sqrt(2)*V*sin(t);
29 t=[t,t2];
30 v=[v,zeros(size(t2))];
31 i=[i,zeros(size(t2))];

```

```

32
33 % Valores Medios
34 Io=1/(2*pi)*trapz(t,i)
35 Vo=1/(2*pi)*trapz(t,v)
36
37
38 % Valores Efectivos
39 Irms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,i.^2))
40 Vrms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,v.^2))
41
42 %Factor de rizado
43 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
44 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
45
46 % Graficas
47 vf=sqrt(2)*V*sin(t);
48 vx=[v];
49 ix=[i];
50 t1=t;
51 figure(1)
52 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
53 legend('Fuente','Carga');
54 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
55 xlim([a 2*pi+a]);
56 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
57 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
58 set(gca,'YTickLabel',{' '})
59 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
60 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
61 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
62
63 figure(2)
64 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
65 xlim([a 2*pi+a]);
66 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
67 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
68 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
69 set(gca,'YTickLabel',{' '})

```

```

70 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
71 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
72
73 % Primera Armónica
74 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,vx.*exp(j*t1)))/sqrt(2))
75 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1)))/sqrt(2))
76
77 % THD
78 THDv=sqrt(Vrms^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
79 THDi=sqrt(Irms^2-Irms_1^2)/Irms_1

```

6.4. Rectificador con Carga Inductiva

En la figura 6.8, se presenta un puente rectificador de media onda con carga inductiva pura. El puente está alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal dada por la expresión: $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$.

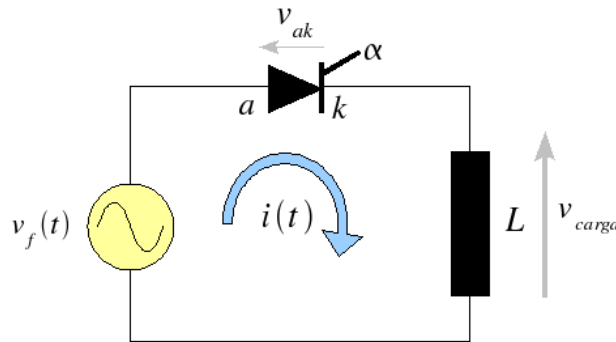


Figura 6.8: Puente rectificador de media onda controlado con carga inductiva

El rango de control del tiristor está comprendido para este caso particular de fuente sinusoidal en su semiciclo positivo, es decir para los ángulos comprendidos entre $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Para encontrar el ángulo de apagado es necesario encontrar cuando la corriente pasa naturalmente por cero ($i(t_\beta) = 0$). Para encontrar la corriente para $t_\alpha \leq t \leq t_\beta$, se puede utilizar el resultado del circuito RL con $Z = \omega L$ y $\phi = \pi/2$ que corresponden al caso inductivo puro.

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\text{sen}(\omega t - \varphi) - \text{sen}(\alpha - \varphi) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] \\
 &\downarrow \\
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \left[\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}} \right] \\
 &\downarrow \\
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \left[\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &\downarrow \\
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} [\cos(\alpha) - \cos(\omega t)]
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

La corriente de la expresión (6.20) pasa naturalmente por cero cuando $i(t_\beta) = 0$, por lo tanto el ángulo de apagado se calcula igualando la expresión a cero. La expresión (6.20) se hace cero si $V = 0$ ó $\omega L = \infty$, estas dos soluciones son triviales e implican que el circuito no está alimentando por ninguna fuente de tensión o no posee carga conectada, por lo cual la única forma que la expresión (6.20) sea cero es que el término entre corchetes sea igual a cero para t_β .

$$\begin{aligned}
 [\cos(\alpha) - \cos(\omega t_\beta)] &= [\cos(\alpha) - \cos(\beta)] = 0 \\
 &\downarrow \\
 \cos(\alpha) &= \cos(\beta) \\
 &\downarrow \\
 \beta &= -\alpha = 2\pi - \alpha
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

En la figura 6.9, se presentan las formas de onda de la tensión y corriente en la carga y fuente de alterna de este puente convertidor, para una fuente de $v_f(t) = \sqrt{2}120 \text{sen}(377t)$ y $L = 223 \text{mH}$.

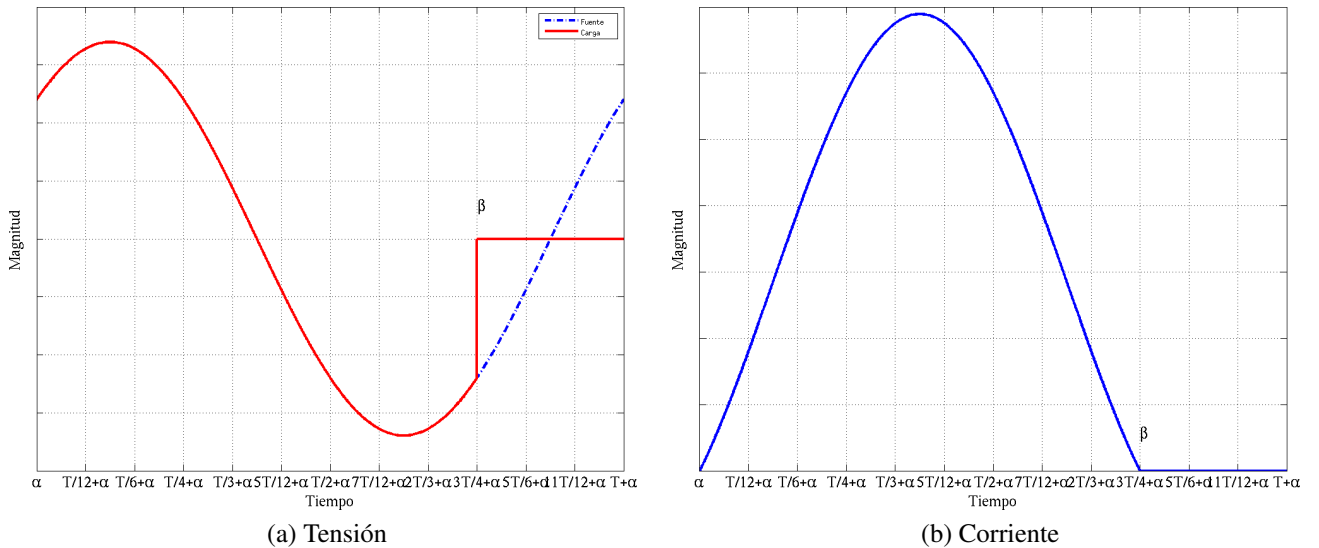


Figura 6.9: Tensión y Corriente en la carga inductiva

Como el circuito de la figura 6.8, es un circuito serie la corriente por la carga es la misma corriente por la fuente de corriente alterna. En la figura 6.10, se presentan los contenidos armónicos de tensión y corriente en la carga. Se puede observar que el mayor contenido armónico luego de la fundamental se obtiene en la armónica cero correspondiente al valor medio.

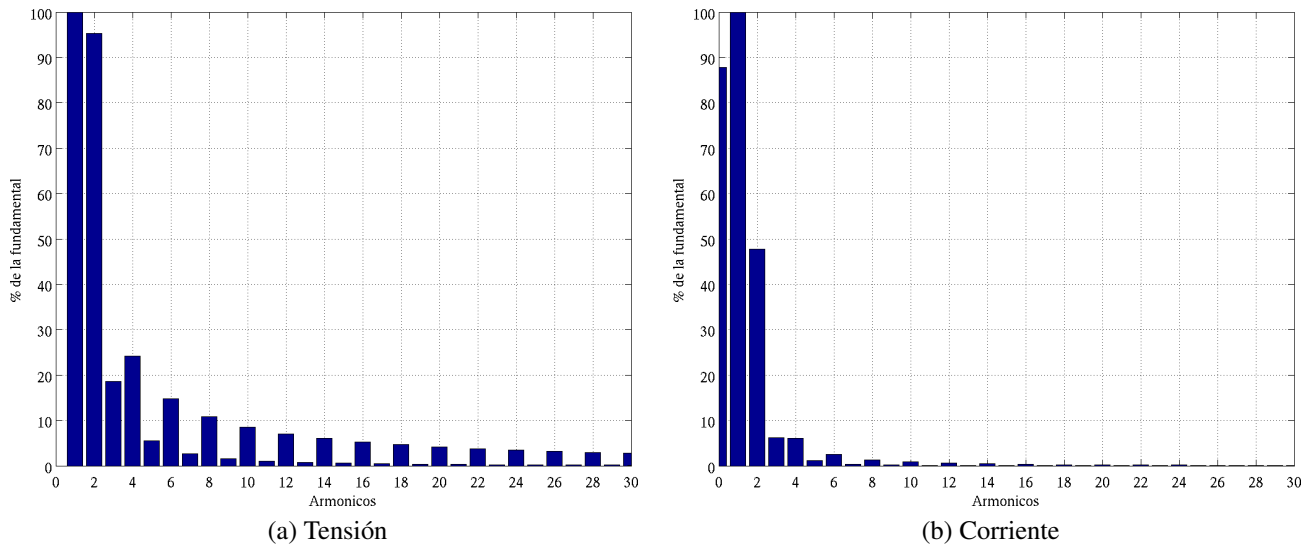


Figura 6.10: Contenido armónico de tensión y corriente en la carga inductiva

Para encontrar la tensión y corriente media y efectiva se aplicaran las definiciones presentadas en el capítulo 1.

6.4.1. Tensión Media

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left(-\cos(\omega t) \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\alpha) - \cos(2\pi - \alpha)) = 0
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

6.4.2. Corriente Media

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\sqrt{2}V}{\omega L} [\cos(\alpha) - \cos(\omega t)] \right) d\omega t \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (\cos(\alpha) - \cos(\omega t)) d\omega t \right] \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi\omega L} [\cos(\alpha) \omega t - \sin(\omega t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi\omega L} [\cos(\alpha) (\beta - \alpha) - \sin(\beta) + \sin(\alpha)] \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi\omega L} [\cos(\alpha) (\pi - \alpha) + \sin(\alpha)]
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

6.4.3. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\left(\beta - \alpha - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \left(\left(\pi - \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) \right)}
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Nota: La expresión (6.24) sólo es válida en radianes.

6.4.4. Corriente Efectiva

$$\begin{aligned}
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\sqrt{2}V}{\omega L} [\cos(\alpha) - \cos(\omega t)] \right)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (\cos(\alpha) - \cos(\omega t))^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left((\cos(\alpha))^2 - 2\cos(\alpha)\cos(\omega t) + (\cos(\omega t))^2 \right) d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left((\pi - \alpha) \left[1 + 2(\cos(\alpha))^2 \right] - \frac{\sin(2\alpha)}{2} - 4\cos(\alpha)\sin(\alpha) \right)}
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

6.4.5. Simulación

```

1  % Media Onda Controlado con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \sin(\omega t)$ 
3  % Carga tipo L
4
5  clear
6
7  % Entrada de datos
8  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
9  L=input('Inductancia [H] ');
10 f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
11 alfa=input('Angulo de encendido en grados ');
12 alfa=alfa*pi/180;

```

```
13 a=alfa;
14
15 % Parámetros
16 fi=pi/2;
17 Z=sqrt((2*pi*f*L)^2);
18
19 % Cálculo del ángulo de apagado
20 b=2*pi-alfa
21 g=b-a;
22
23 % Función en el tiempo
24 t=linspace(a,b,1000);
25 t2=linspace(b,a+2*pi,1000);
26 i=sqrt(2)*V/Z*(cos(alfa)-cos(t));
27 v=sqrt(2)*V*sin(t);
28 t=[t,t2];
29 v=[v,zeros(size(t2))];
30 i=[i,zeros(size(t2))];
31
32 % Valores Medios
33 Io=1/(2*pi)*trapz(t,i)
34 Vo=1/(2*pi)*trapz(t,v)
35
36
37 % Valores Efectivos
38 Irms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,i.^2))
39 Vrms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,v.^2))
40
41 %Factor de rizado
42 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
43 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
44
45 % Graficas
46 vf=sqrt(2)*V*sin(t);
47 vx=[v];
48 ix=[i];
49 t1=t;
50 figure(1)
51 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
52 legend('Fuente','Carga');
```

```

53 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Symbol');
54 xlim([a 2*pi+a]);
55 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
56 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
57 set(gca,'YTickLabel',{' '})
58 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
59 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
60 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
61
62 figure(2)
63 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
64 xlim([a 2*pi+a]);
65 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Symbol');
66 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
67 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
68 set(gca,'YTickLabel',{' '})
69 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
70 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
71
72 % Primera Armónica
73 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,vx.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
74 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
75
76 % THD
77 THDv=sqrt(Vrms^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
78 THDi=sqrt(Irms^2-Irms_1^2)/Irms_1

```

6.5. Rectificador con Carga Activa

En la figura 6.11, se presenta en puente rectificador de media onda con carga activa del tipo resistiva inductiva y fuente de tensión continua. El puente está alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal dada por la expresión: $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$.

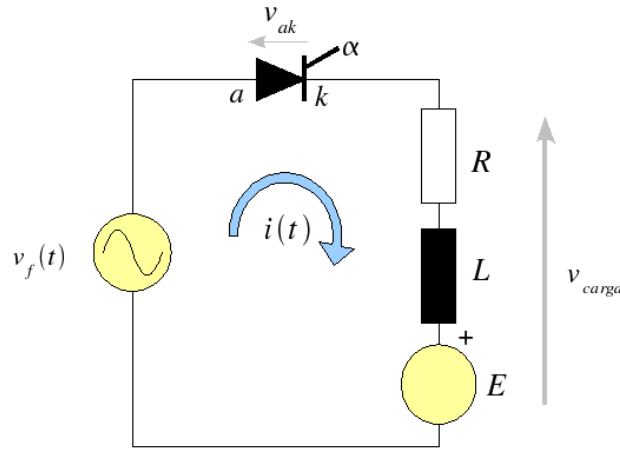


Figura 6.11: Puente rectificador de media onda controlado con carga activa

Considerando el Tiristor ideal, es decir que su tensión de ruptura es cero, el rango de controlabilidad del puente esta determinado por aquellos valores del ángulo de encendido donde el tiristor se encuentre polarizado en directo ($v_{ak} \geq 0$), garantizando de esta forma la conducción de la componente, esto ocurre cuando la fuente de tensión sinusoidal iguala y supera a la fuente de tensión continua (E) de la carga por lo cual el ángulo de encendido mínimo es función de la magnitud de las fuentes sinusoidal y continua del circuito. El rango de control del tiristor esta comprendido para este caso particular de fuente sinusoidal entre el ángulo de disparo mínimo y máximo ($\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$).

6.5.1. Cálculo del límite de controlabilidad

$$\begin{aligned}
 v_f(t) &\geq E \\
 \sqrt{2}V \sin(\omega t) &\geq E \\
 \sin(\omega t) &\geq \frac{E}{\sqrt{2}V} \\
 \sin(\alpha) &\geq \frac{E}{\sqrt{2}V} \\
 \alpha &\geq \arcsen\left(\frac{E}{\sqrt{2}V}\right)
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

La relación (6.26) se cumple para:

$$\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max} \tag{6.27}$$

Donde:

$$\alpha_{min} = \arcsen(m)$$

$$m = \frac{E}{\sqrt{2}V}$$

$$\alpha_{max} = \pi - \alpha_{min}$$

Para encontrar el ángulo de apagado es necesario encontrar cuando la corriente pasa naturalmente por cero ($i(t_\beta) = 0$). La corriente para $\alpha_{max} \leq \omega t \leq \beta$ es:

6.5.2. Solución Homogénea

La solución homogénea para un circuito de primer orden viene dada por la expresión:

$$i(t)_h = k e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \quad (6.28)$$

donde:

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}$$

6.5.3. Solución Particular Fuente Constante:

$$i(t)_p = -\frac{E}{R} \quad (6.29)$$

6.5.4. Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)

Encontrando la corriente en régimen permanente, utilizando fasores obtenemos:

$$i(t)_p = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \quad (6.30)$$

donde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

6.5.5. Solución Total:

Condición inicial del circuito debido a que el tiristor se encuentra abierto o en no conducción:

$$i(t_\alpha) = 0$$

$$\begin{aligned}
 i(t_\alpha) = 0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) - \frac{E}{R} + k e^{-\frac{\alpha}{\tan(\varphi)}} \\
 &\downarrow \\
 k &= \left(-\frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) + \frac{E}{R} \right) e^{\frac{\alpha}{\tan(\varphi)}} \\
 &\downarrow \\
 i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) - \frac{E}{R} + \left(-\frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) + \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}}
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Sacando factor común $\sqrt{2}V/Z$ tenemos:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] \tag{6.32}$$

donde:

$$m = \frac{E}{\sqrt{2}V}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z}$$

La corriente de la expresión (6.32) pasa naturalmente por cero cuando $i(t_\beta) = 0$, por lo tanto el ángulo de apagado se calcula igualando esta a cero. La ecuación (6.32) se hace cero si $V = 0$ ó $Z = \infty$, estas dos soluciones son triviales e implican que el circuito no está alimentando por ninguna fuente de tensión o no posee carga conectada, por lo cual la única forma que la expresión (6.32) sea cero es que el término entre corchetes sea igual a cero para t_β .

$$\begin{aligned}
 &\left[\sin(\omega t_\beta - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t_\beta - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] = 0 \\
 &\left[\sin(\beta - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\beta - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

La expresión (6.33) no posee una solución analítica para β , este tipo de expresión se le conoce como ecuación trascendental y su solución es numérica. Diversos métodos de solución numérica se pueden emplear para la solución de esta ecuación. La solución del ángulo de apagado está acotada entre $\alpha_{max} \leq \beta \leq 2\pi$ para cualquier caso.

En la figura 6.12, se presentan las formas de onda de la tensión y corriente en la carga y fuente de alterna de este puente convertidor, para una fuente de $v_f(t) = \sqrt{2}120 \sin(377t)$, $E = 50V$,

$R = 60\Omega$, y $L = 223\text{mH}$. Para esta carga el ángulo de apagado es $\beta = 4,1243\text{rad} = 236,3027^\circ$ y el de encendido $\alpha = \pi/6\text{rad} = 30^\circ$

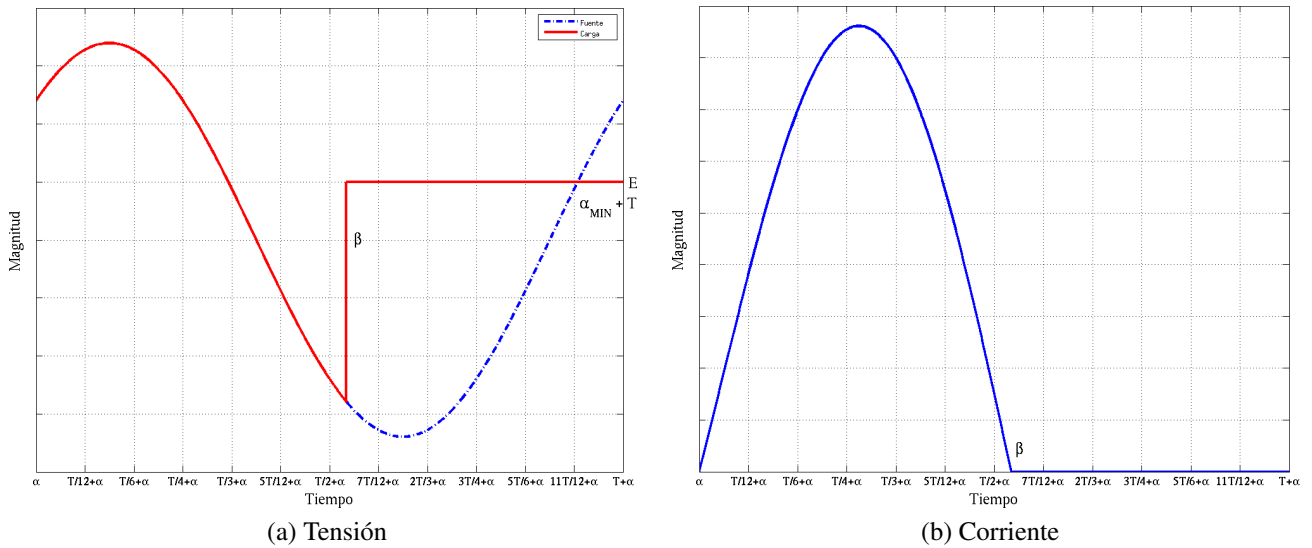


Figura 6.12: Tensión y corriente en la carga activa

Como el circuito de la figura 6.11, es un circuito serie la corriente por la carga es la misma corriente por la fuente de corriente alterna. En la figura 6.13, se presentan los contenidos armónicos de tensión y corriente en la carga. Se puede observar que el mayor contenido armónico luego de la fundamental se obtiene en la armónica cero correspondiente al valor medio y la segunda armónica.

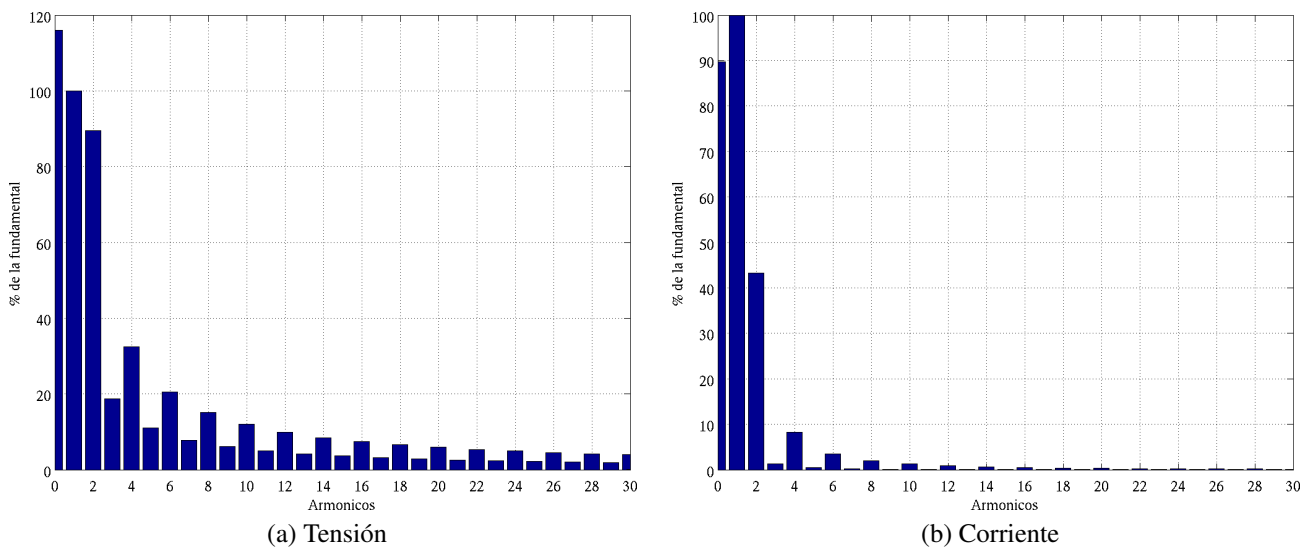


Figura 6.13: Contenido armónico de corriente y tensión en la carga activa

Para encontrar la tensión y corriente media y efectiva se aplicaran las definiciones vistas en el capítulo 1.

6.5.6. Tensión Media

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega + \int_{\beta}^{\alpha+2\pi} E d\omega \right] \\
 V_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{2}V - \cos(\omega t) \Big|_{\alpha}^{\beta} + E\omega \Big|_{\beta}^{\alpha+2\pi} \right] \\
 V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) + E \left(\frac{2\pi - (\beta - \alpha)}{2\pi} \right)
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

6.5.7. Corriente Media

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} i(t) d\omega_e t \\
 I_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] d\omega t \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) d\omega t \right] \\
 I_0 &= \frac{V_0 - E}{R}
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

6.5.8. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left(\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t + \int_{\beta}^{\alpha+2\pi} E^2 d\omega t \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t + \frac{1}{2\pi} \int_{\beta}^{\alpha+2\pi} E^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} + \frac{E^2}{2\pi} \omega t \Big|_{\beta}^{\alpha+2\pi}} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\beta - \alpha - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) + E^2 \left(1 - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \left(\gamma - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) + E^2 \left(1 - \frac{\gamma}{2\pi} \right)}
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Nota: La expresión (6.36) sólo es válida en radianes.

6.5.9. Corriente Efectiva

$$\begin{aligned}
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} i(t)^2 d\omega_e t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{Z\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} \left[\left(\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right)^2 d\omega t \right]}
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

6.5.10. Simulación

```

1  % Media Onda Controlado con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \text{sen}(\omega t)$ 
3  % Carga tipo RLE
4
5  clear
6
7  % Entrada de datos
8  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
9  R=input('Resistencia [Ohm] ');
10 L=input('Inductancia [H] ');
11 E=input('Tension de la carga ');
12 f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
13 alfa=input('Angulo de encendido en grados ');
14 alfa=alfa*pi/180;
15
16 % Parámetros
17 fi=atan(2*pi*f*L/R);
18 Z=sqrt((2*pi*f*L)^2+R^2);
19 m=E/(sqrt(2)*V);
20 a=asin(m);
21
22 if alfa>=a
23     a=alfa;
24 end
25
26 % Cálculo del ángulo de apagado
27 b=fsolve(@(t) sin(t-fi)-m/cos(fi)+(m/cos(fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan
    (fi))),[pi])
28 g=b-a;
29
30 % Función en el tiempo
31 t=linspace(a,b,1000);
32 t2=linspace(b,a+2*pi,1000);
33 i=sqrt(2)*V/Z*(sin(t-fi)-m/cos(fi)+(m/cos(fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/
    tan(fi))));
34 v=sqrt(2)*V*sin(t);
35 t=[t,t2];
36 v=[v,E*ones(size(t2))];

```

```

37 i=[i,zeros(size(t2))];
38
39 % Valores Medios
40 Io=1/(2*pi)*trapz(t,i)
41 Vo=1/(2*pi)*trapz(t,v)
42
43
44 % Valores Efectivos
45 Irms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,i.^2))
46 Vrms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,v.^2))
47
48 %Factor de rizado
49 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
50 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
51
52 % Graficas
53 vf=sqrt(2)*V*sin(t);
54 vx=[v];
55 ix=[i];
56 t1=t;
57 figure(1)
58 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
59 legend('Fuente','Carga');
60 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
61 xlim([a 2*pi+a]);
62 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
63 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
64 set(gca,'YTickLabel',{' '})
65 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
66 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
67 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
68
69 figure(2)
70 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
71 xlim([a 2*pi+a]);
72 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
73 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
74 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})

```

```

75 set(gca,'YTickLabel',{' '})
76 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
77 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
78
79 % Primera Armónica
80 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,vx.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
81 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
82
83 % THD
84 THDv=sqrt(Vrms^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
85 THDi=sqrt(Irms^2-Irms_1^2)/Irms_1

```

6.6. Ejercicios

1. Demostrar que el factor de potencia del rectificador de media onda controlado con carga resistiva es:

$$fp = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{4\pi}}$$

2. Encuentre las expresiones de corriente en régimen permanente en función del ángulo de disparo (α) para un puente rectificador de media onda controlado con diodo de descarga libre.
3. Se dispone de un puente de media onda controlado que alimenta una carga *RLE* de 60Ω , $223mH$ y $60V$. El puente se alimenta desde un sistema de $50Hz$ a una tensión efectiva de $220V$ y su ángulo de disparo es de $\pi/6$. Determine:
 - a) Ángulo de apagado.
 - b) Tensión media y efectiva sobre la carga.
 - c) Corriente media y efectiva de la carga.
 - d) Facto de rizado en tensión y corriente.
 - e) Valor de la componente fundamental de alimentación.
 - f) Potencia en la carga.
 - g) Potencia activa, reactiva y distorsión entregada por la fuente.
4. Se dispone de un puente rectificador de media onda controlado con carga *RL*. El puente es alimentado desde un sistema con Tensión ($v_f(t)$) pico de $200V$ a $60Hz$. La Resistencia e

Inductancia son de 60Ω y $250mH$ respectivamente. Calcule:

$$v_f(t) = \begin{cases} V & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ V \sin(\omega t) & \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \\ -V & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

- Forma de onda sobre la carga.
 - Ángulo de apagado.
 - Tensión Media y efectiva sobre la carga.
 - Corriente media y efectiva sobre la Carga.
 - Potencia disipada por el diodo. Si $V_{to} = 1,5V$ y $R_d = 12m\Omega$ ¹
 - Factor de distorsión de tensión y Corriente.
5. Para el puente rectificador de media onda con diodo de descarga libre de la figura 6.14, alimentado desde un sistema sinusoidal de tensión efectiva $120V$ a frecuencia de $60Hz$ con una carga de $R = 12\Omega$ y $L = 20mH$. Determine para un ángulo de disparo de 30° :

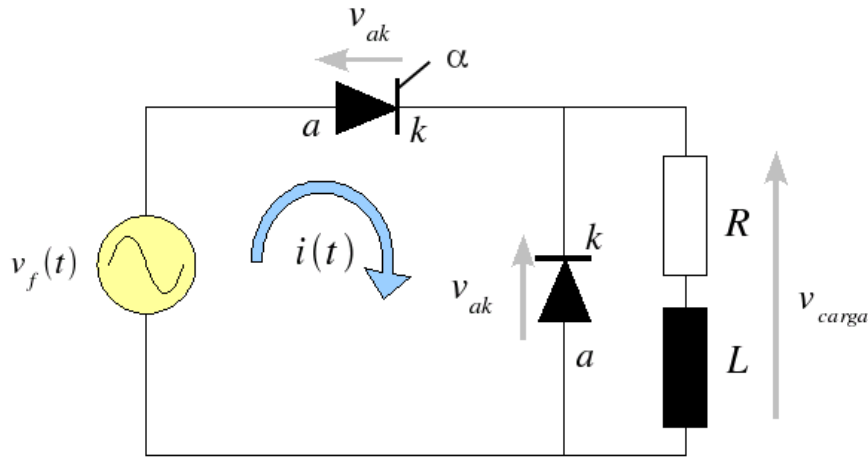


Figura 6.14: Ejercicio 5

- Expresiones de corriente del circuito en función del ángulo de disparo.
- Valor medio de la tensión y corriente en la carga.
- Corriente media en los componentes de potencia.
- Corriente pico en las componentes.

¹ $P_T = V_{TO}I_{0T} + R_D I_{rmsT}^2$

Rectificador Monofásico

7.1. Aspectos Generales

La finalidad de los rectificadores de onda completa es la misma que los de media onda, generar una tensión o corriente continua específica, a partir de una fuente de corriente alterna. Los rectificadores de onda completa, presentan mejores ventajas comparativas que los de media onda. La ventaja más importante, es que la corriente media en el sistema alterno de alimentación del rectificador es cero, evitando así los problemas asociados al fenómeno de saturación de las máquinas eléctricas conectadas a la misma barra de alimentación en corriente alterna. Adicionalmente, disminuye el rizado en las corrientes de salida en la barra de corriente continua y se obtiene un mayor valor de tensión y corriente continua para la misma fuente de alimentación.

En este capítulo se analizará el puente rectificador monofásico de onda completa controlado, el análisis del rectificador no controlado o de diodos es análogo al controlado si sustituimos el ángulo de disparo por cero o α_{min} en el caso de tener carga activa tipo *RLE*.

7.2. Aplicaciones

- Cargadores de batería.
- Fuentes de poder.
- Control de velocidad y posición de máquinas de corriente continua.
- Transmisión en Corriente Continua (HVDC).
- Excitatriz de máquinas sincrónicas.
- Electro filtros.
- Entre otras.

7.3. Esquema del Rectificador de Onda Completo Monofásico

En la figura 7.1a, se presenta el esquema de un rectificador controlado de onda completa clásico, utilizado en electrónica de baja potencia. Este puente está compuesto por cuatro interruptores electrónicos de potencia, los cuales son encendidos alternadamente en parejas cada medio ciclo de la onda alterna de la fuente de poder. Otra representación del mismo puente convertidor, se puede observar en la figura 7.1b. Generalmente esta representación es la más utilizada en electrónica de potencia.

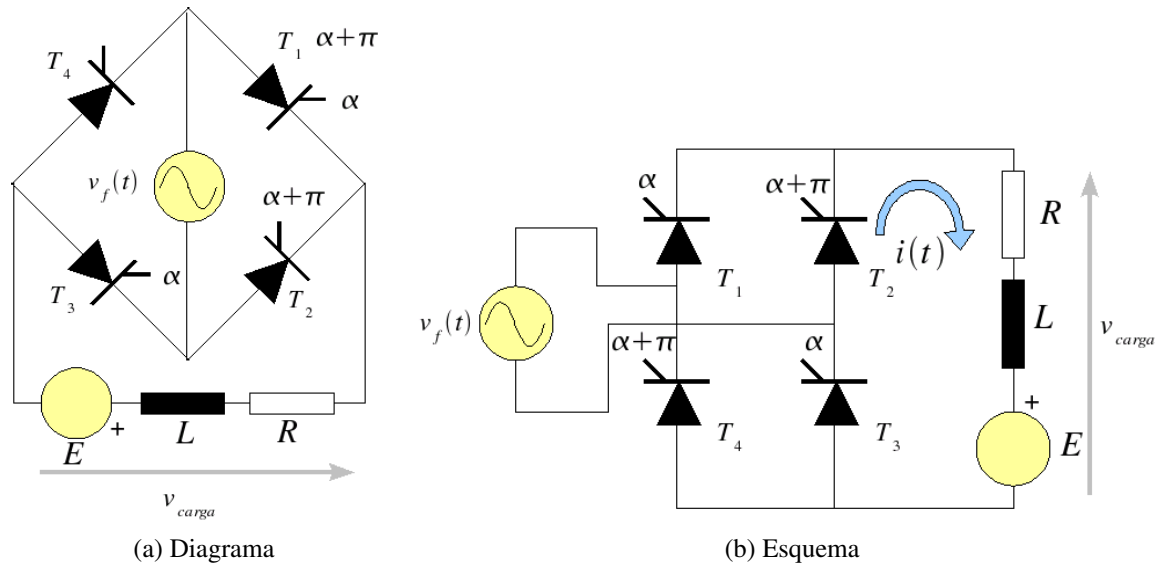


Figura 7.1: Puente rectificador monofásico

7.4. Operación del Puente Rectificador

Durante el semiciclo positivo de la fuente de tensión, los tiristores uno y tres se encuentran polarizados en directo mientras que los componentes dos y cuatro en inversor. Durante este semiciclo, al recibir pulso de disparo por la compuerta los SCR uno y tres entran en conducción y la corriente circula por las componentes y la carga como se muestra en la figura 7.2.

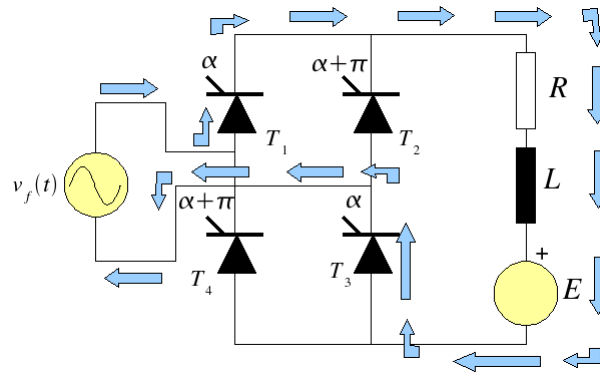


Figura 7.2: Circulación de corriente por el puente convertidor durante el semiciclo positivo de la fuente

Los tiristores uno y tres pueden apagar de forma natural si la corriente pasa por cero antes de que los SCR dos y cuatro reciban orden de encendido durante el semiciclo negativo de la fuente. Adicionalmente, estos tiristores también pueden apagar de forma forzada al encender los dispositivos dos y cuatro los cuales suministrarán un nuevo camino de circulación a la corriente de la carga durante el semiciclo negativo de la fuente. En la figura 7.3, se presenta el camino de circulación de la corriente durante el semiciclo negativo de la fuente con los dispositivos dos y cuatro encendidos.

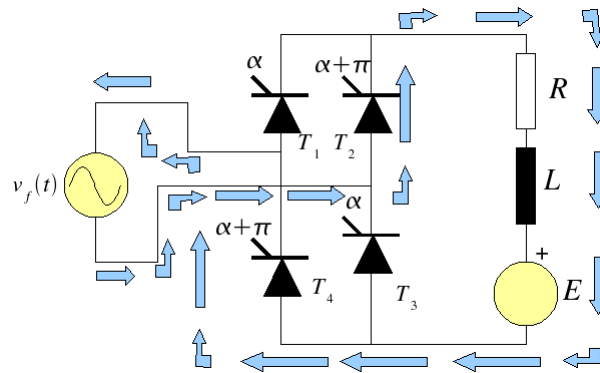


Figura 7.3: Circulación de corriente por el puente convertidor durante el semiciclo negativo de la fuente

Para obtener simetría en la corriente en la fuente con respecto al semiciclo positivo y negativo los ángulos de disparo entre las componentes T_1 , T_3 y T_2 , T_4 deben estar desfasados en la mitad del periodo de la fuente alterna ($T/2$). En la figura 7.2 y 7.3 se puede observar como la circulación de corriente en la carga es igual para ambos casos.

El esquema de apagado de las componentes (natural o forzado) define dos formas de operación del puente convertidor.

Condición no continuada de corriente: cuando el apagado de las componentes se realiza de forma natural ($i(t_B) = 0$), en esta operación la corriente sobre la carga es cero durante un lapso de tiempo,

en el cual ninguno de los componentes electrónicos conduce corriente. Otra forma de determinar esta condición de operación es calculando el ángulo de apagado de las componentes el cual debe ser menor al de encendido de los dispositivos a conmutar ($\beta < (\alpha + T/2)$). En las figuras 7.4 y 7.5, se presenta las formas de onda de tensión y corriente sobre la carga. En la figura 7.6 se muestra la forma de onda de corriente que suministra al rectificador la fuente de alterna en condición no continuada. Adicionalmente, se presenta el contenido armónica de cada forma de onda.

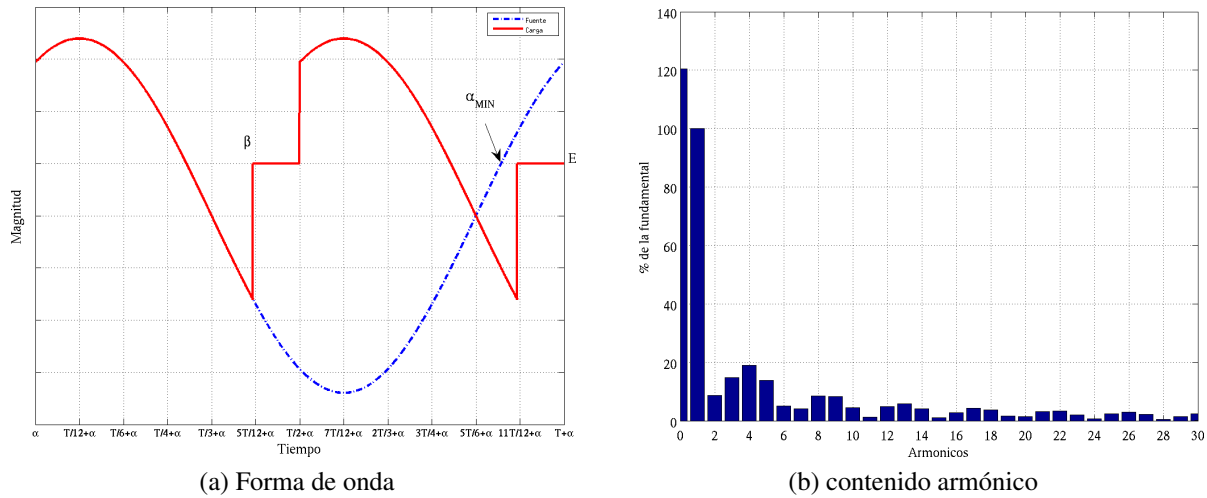


Figura 7.4: Tensión en la carga operación no continuada

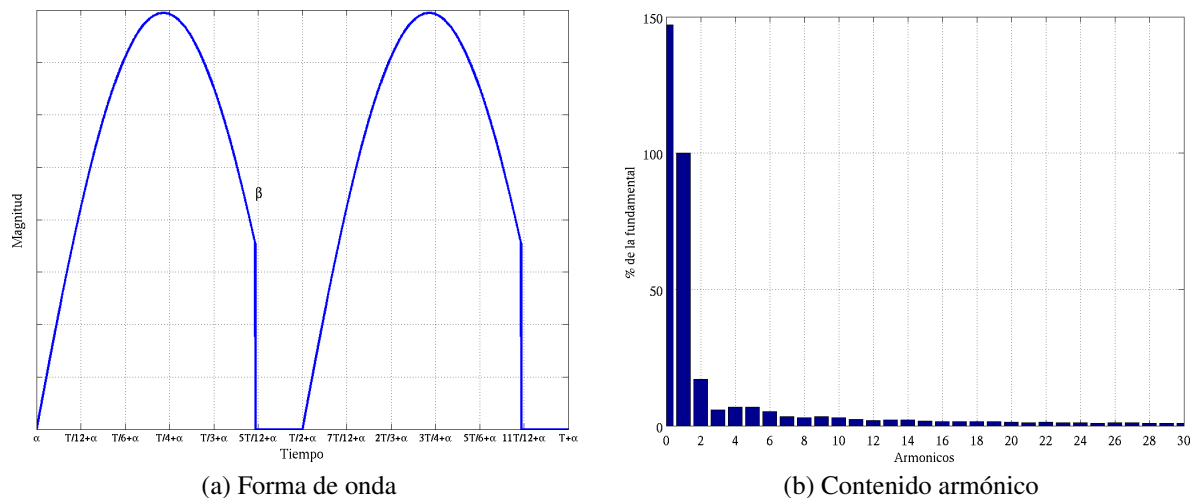


Figura 7.5: Corriente en la carga operación no continuada

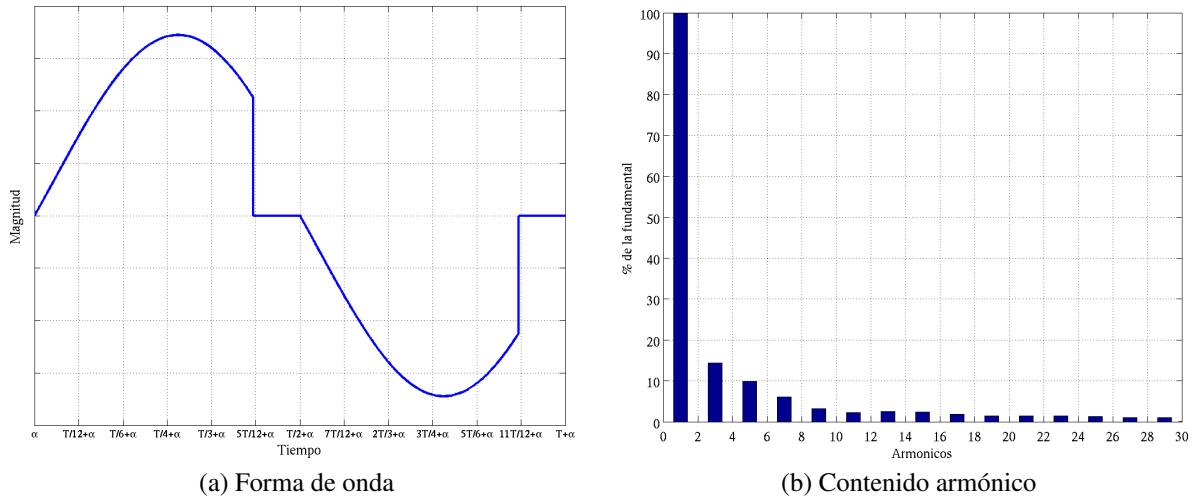


Figura 7.6: Corriente en la fuente operación no continuada

Condición continuada de corriente: corresponde cuando el apagado de las componentes se realiza de forma forzada, esto ocurre cuando el ángulo de apagado de las componentes que se encuentran en conducción es mayor que el ángulo de encendido de las componentes a conmutar ($\beta \geq (\alpha + T/2)$). En esta condición de operación en régimen permanente la corriente por la carga es diferente a cero. En las figuras 7.7 y 7.8, se presenta las formas de onda de tensión y corriente sobre la carga, en la figura 7.9 se muestra la corriente que suministra al rectificador la fuente de alterna en condición continuada. Adicionalmente, se presenta el contenido armónica de cada forma de onda.

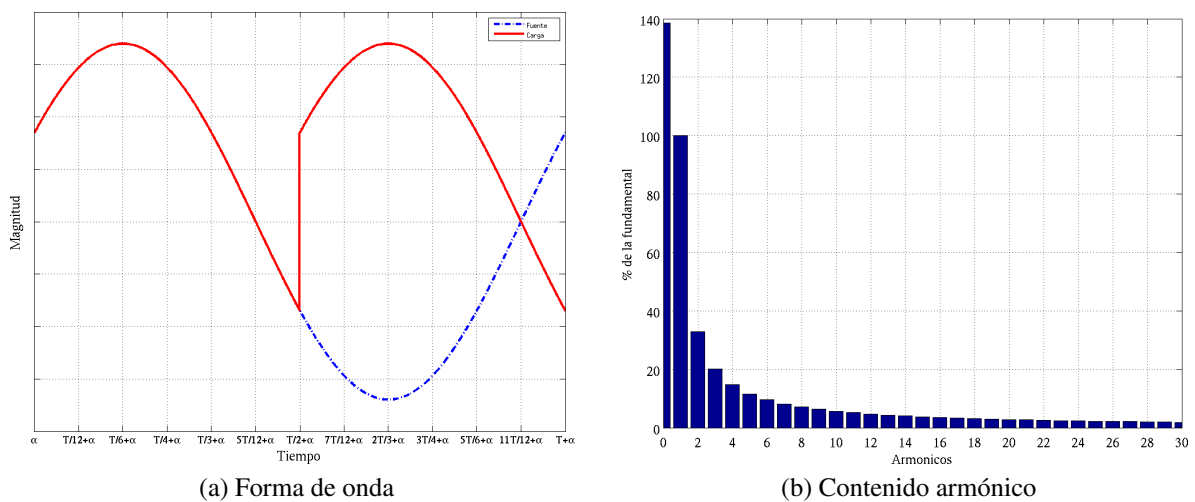


Figura 7.7: Tensiones en la carga operación continuada

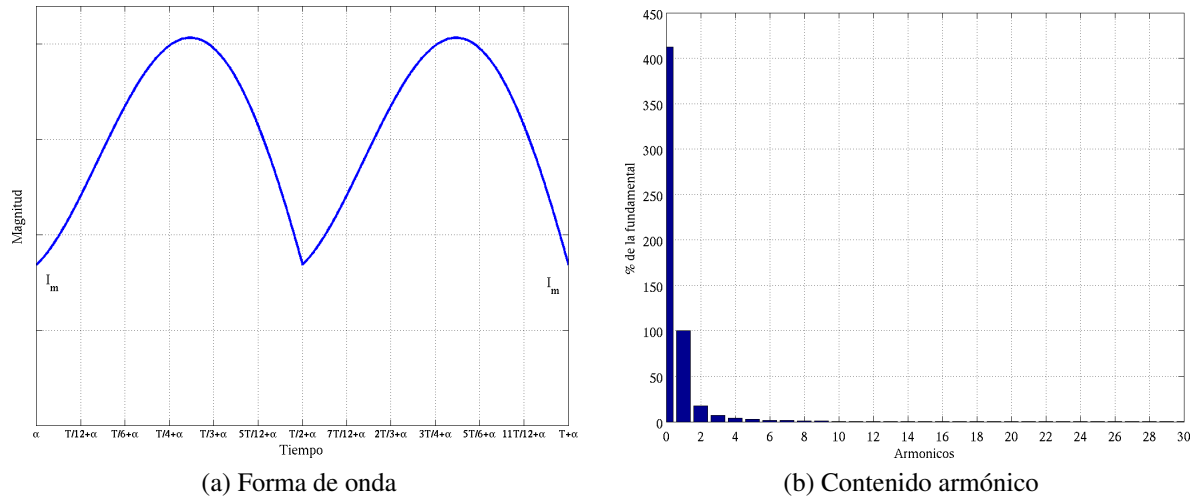


Figura 7.8: Corriente en la carga operación no continuada

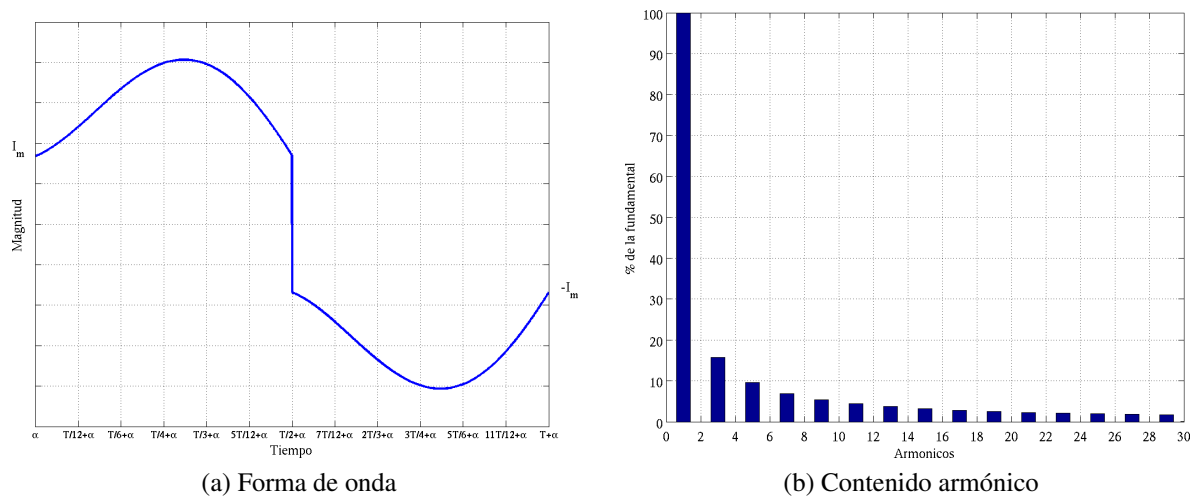


Figura 7.9: Corriente en la fuente operación no continuada

7.5. Circuito Equivalente del Puente Rectificador Monofásico

El puente rectificador de onda completa monofásico se puede modelar mediante la superposición de dos puentes de media onda desfasados en medio periodo de la señal de alterna, agrupando los tiristores T_1 , T_3 y T_2 , T_4 en dos SCR T_A y T_B donde:

$$\begin{aligned} T_A &\Rightarrow T_1 \wedge T_3 \\ T_B &\Rightarrow T_2 \wedge T_4 \end{aligned} \quad (7.1)$$

En la figura 7.10 se presenta el circuito equivalente del puente rectificador de onda completa monofásico. El periodo de la señal en el lado de corriente continua es de la mitad del de la fuente de corriente alterna que alimenta el convertidor ($T/2$).

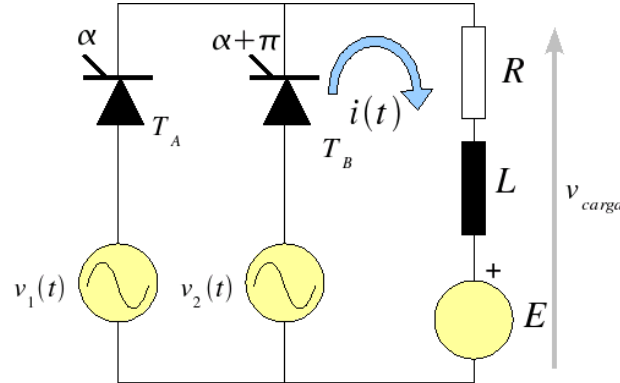


Figura 7.10: Circuito equivalente del rectificador de onda completa monofásico

En la figura 7.10 las fuente de tensión $v_1(t)$ corresponde a la tensión de la fuente original del sistema alterno ($v_f(t)$) y la fuente $v_2(t)$ es la señal complementaria a la tensión $v_1(t)$.

$$\begin{aligned} v_1(t) &\equiv v_f(t) \\ v_2(t) &= v_1\left(t + \frac{T}{2}\right) = v_f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -v_f(t) \end{aligned} \quad (7.2)$$

El estudio del circuito equivalente del rectificador de onda completa monofásico, es simple y puede realizarse analizando cada puente de media onda por separado y utilizar el método de superposición para integrar el análisis. Como el periodo de la señal en el lado de continua coincide con el intervalo de conducción de cada puente de media onda basta con realizar el análisis de uno de ellos, ya que en otro se comporta de manera análoga.

7.6. Análisis de la Condición No Continuada de Corriente

En la figura 7.11, se presenta en puente rectificador de media onda con carga activa del tipo resistiva inductiva y fuente de tensión continua. El puente esta alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal dada por la expresión: $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$.

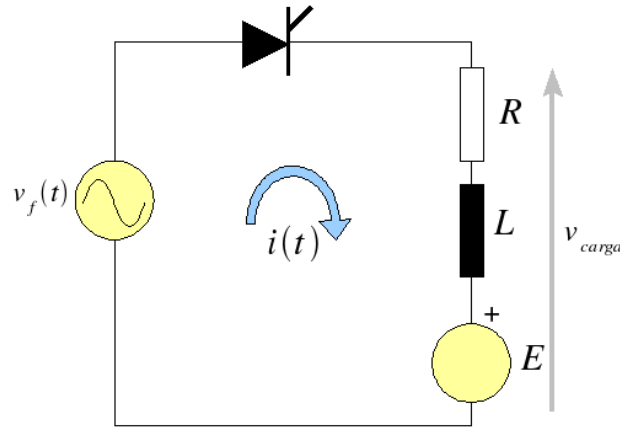


Figura 7.11: Puente rectificador de media onda no controlado con carga activa

El análisis de esta puente es el mismo que el realizado en la Sección 6.5 por lo tanto:

7.6.1. Cálculo del Límite de Controlabilidad

El tiristor comienza a conducir cuando su tensión ánodo cátodo es mayor a cero, en este caso esta condición se alcanza para:

$$v_f(t) \geq E \quad (7.3)$$

Sustituyendo la expresión de la fuente en la ecuación (7.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}V \sin(\omega t) &\geq E \\ \sin(\omega t) &\geq \frac{E}{\sqrt{2}V} \\ \sin(\alpha) &\geq \frac{E}{\sqrt{2}V} \\ \alpha &\geq \arcsen\left(\frac{E}{\sqrt{2}V}\right) \\ \alpha_{min} &\leq \alpha \leq \alpha_{max} \end{aligned} \quad (7.4)$$

donde:

$$\alpha_{min} = \arcsen(m)$$

$$m = \frac{E}{\sqrt{2}V}$$

$$\alpha_{max} = \pi - \alpha_{min}$$

Para encontrar el ángulo de apagado es necesario encontrar cuando la corriente pasa naturalmente por cero ($i(t_\beta) = 0$). La corriente para $\alpha \leq \omega t \leq \beta$ es:

7.6.2. Corriente en la carga:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] \quad (7.5)$$

donde:

$$m = \frac{E}{\sqrt{2}V}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z}$$

La corriente de la expresión (7.5) pasa naturalmente por cero cuando $i(t_\beta) = 0$, por lo tanto el ángulo de apagado se calcula igualando la expresión (7.5) a cero. La ecuación (7.5) se hace cero si $V = 0$ ó $Z = \infty$, estas dos soluciones son triviales e implican que el circuito no está alimentando por ninguna fuente de tensión o no posee carga conectada, por lo cual la única forma que la expresión (7.5) sea cero es que el término entre corchetes sea igual a cero para t_β .

$$\begin{aligned} \left[\sin(\omega t_\beta - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t_\beta - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] &= 0 \\ \left[\sin(\beta - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\beta - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

La expresión (7.6) no posee una solución analítica para β , este tipo de expresión se le conoce como ecuación trascendental y su solución es numérica. Diversos métodos de solución numérica se pueden emplear para la solución de esta ecuación. La solución del ángulo de apagado está acotada entre $\alpha_{max} \leq \beta \leq 2\pi$ para cualquier caso.

Para encontrar la tensión y corriente media y efectiva se aplicarán las definiciones del capítulo 1 con un periodo en la carga igual a la mitad de la fuente de alimentación alterna.

7.6.3. Tensión Media

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_\alpha^\beta \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t + \int_\beta^{\alpha+\pi} E d\omega t \right] \\ V_0 &= \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{2}V - \cos(\omega t) \Big|_\alpha^\beta + E \omega t \Big|_\beta^{\alpha+\pi} \right] \\ V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) + E \left(\frac{\pi - (\beta - \alpha)}{\pi} \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

7.6.4. Corriente Media

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} i(t) d\omega t \\
 I_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] d\omega t \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) d\omega t \right] \\
 I_0 &= \frac{V_0 - E}{R}
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

7.6.5. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \left(\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t + \int_{\beta}^{\alpha+\pi} E^2 d\omega t \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t + \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\alpha+\pi} E^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} + \frac{E^2}{\pi} \omega t \Big|_{\beta}^{\alpha+\pi}} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \left(\beta - \alpha - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) + E^2 \left(1 - \frac{\beta - \alpha}{\pi} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \left(\gamma - \frac{\sin(2\beta)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right) + E^2 \left(1 - \frac{\gamma}{\pi} \right)}
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Nota: La expresión (7.9) solo es válida en radianes

7.6.6. Corriente Efectiva

$$\begin{aligned}
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} i(t)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] \right)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left(\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) \right]^2 d\omega t}
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

7.7. Análisis de la Condición Continuada de Corriente

La condición continuada del puente rectificador de onda completa monofásico puede ser analizada en régimen transitorio y régimen permanente de operación. En esta sección se estudia el puente en régimen permanente de operación.

7.7.1. Cálculo del Límite de Controlabilidad

El tiristor comienza a conducir cuando su tensión ánodo cátodo es mayor a cero, en este caso esta condición se alcanza para:

$$v_f(t) \geq E \quad (7.11)$$

Sustituyendo la expresión de la fuente en la ecuación (7.11), se obtiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}V \sin(\omega t) &\geq E \\ \sin(\omega t) &\geq \frac{E}{\sqrt{2}V} \\ \sin(\alpha) &\geq \frac{E}{\sqrt{2}V} \\ \alpha &\geq \arcsen\left(\frac{E}{\sqrt{2}V}\right) \\ \alpha_{min} &\leq \alpha \leq \alpha_{max} \end{aligned} \quad (7.12)$$

donde:

$$\alpha_{min} = \arcsen(m)$$

$$m = \frac{E}{\sqrt{2}V}$$

$$\alpha_{max} = \pi - \alpha_{min}$$

Para considerar que el puente se encuentra en condición continuada se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \beta &\geq \alpha + \pi \\ I_{min} &\geq 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

La expresión de la corriente en la carga en régimen permanente para $\alpha \leq \omega t \leq \alpha + \pi$ y considerando la condición inicial de corriente $i(t_\alpha) = I_{min}$ es:

7.7.2. Solución Homogénea.

La solución homogénea para un circuito de primer orden viene dada por la expresión:

$$i(t)_h = k e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \quad (7.14)$$

donde:

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}$$

7.7.3. Solución Particular Fuente Constante:

$$i(t)_p = -\frac{E}{R} \quad (7.15)$$

7.7.4. Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)

Encontrando la corriente en régimen permanente, utilizando fasores obtenemos:

$$i(t)_p = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \quad (7.16)$$

donde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

7.7.5. Solución Total:

Condición inicial del circuito debido a que el tiristor se encuentra abierto o en no conducción:

$$i(t_\alpha) = I_{min}$$

$$\begin{aligned} i(t_\alpha) &= I_{min} = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) - \frac{E}{R} + k e^{-\frac{\alpha}{\tan(\varphi)}} \\ &\quad \downarrow \\ k &= \left(I_{min} - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) + \frac{E}{R} \right) e^{\frac{\alpha}{\tan(\varphi)}} \\ &\quad \downarrow \\ i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) - \frac{E}{R} + \left(I_{min} - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) + \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Sacando factor común $\sqrt{2}V/Z$ tenemos:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] + I_{min} e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \quad (7.18)$$

donde:

$$m = \frac{E}{\sqrt{2}V}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z}$$

Como el puente se encuentra trabajando en régimen permanente, debe satisfacer la condición:

$$i(t) = i(t + T) \quad (7.19)$$

Aplicando la condición de régimen permanente en el punto final del intervalo se puede encontrar el valor de la condición inicial de corriente (I_{min}).

$$i(t_{\alpha+\pi}) = I_{min} \quad (7.20)$$

Sustituyendo la expresión (7.20) en la ecuación (7.18) se obtiene:

$$\begin{aligned} I_{min} &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\alpha + \pi - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{(\alpha + \pi - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right] + I_{min} e^{-\frac{(\alpha + \pi - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \\ I_{min} \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\alpha + \pi - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin(\alpha - \varphi) \right) e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right] \end{aligned} \quad (7.21)$$

Recordando que:

$$\sin(\pi + a) = \sin(\pi) \cos(a) + \sin(a) \cos(\pi) = -\sin(a) \quad (7.22)$$

Se puede simplificar la expresión (7.21) en:

$$I_{min} \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[-\sin(\alpha - \varphi) \left(1 + e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} \right) + \frac{m}{\cos(\varphi)} \left(e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}} - 1 \right) \right] \quad (7.23)$$

Calculando I_{min} de la expresión (7.23), se obtiene:

$$I_{min} = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\varphi - \alpha) \left[\frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}} \right] - \frac{E}{R} \quad (7.24)$$

El puente rectificador se encuentra en condición continuada de corriente si y solo si $I_{min} \geq 0$. Reemplazando la expresión (7.24) en la expresión (7.18) y simplificando se obtiene la corriente total como:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} - \left(\frac{2 \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}} \right) \right] \quad (7.25)$$

Para encontrar la tensión y corriente media y efectiva se aplicaran las definiciones vistas en el capítulo 1.

7.7.6. Tensión Media

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \right] \\ V_0 &= \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{2}V - \cos(\omega t) \right]_{\alpha}^{\alpha+\pi} \\ V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} (\cos(\alpha) - \cos(\alpha + \pi)) \\ V_0 &= \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \cos(\alpha) \\ V_0 &\approx 0,9V \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (7.26)$$

7.7.7. Corriente Media

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} i(t) d\omega t \\ I_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} - \left(\frac{2 \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}} \right) \right] d\omega t \\ I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} - \left(\frac{2 \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}} \right) \right] d\omega t \right] \\ I_0 &= \frac{V_0 - E}{R} \end{aligned} \quad (7.27)$$

7.7.8. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\alpha+\pi}} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \left(\alpha + \pi - \alpha - \frac{\sin(2(\alpha+\pi))}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \left(\pi - \frac{\sin(2\alpha+2\pi)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2\pi}{\pi}} \\
 V_{rms} &= V
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

7.7.9. Corriente Efectiva

$$\begin{aligned}
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} i(t)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left(\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} - \left(\frac{2\sin(\alpha - \varphi)e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}} \right) \right] \right)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} - \left(\frac{2\sin(\alpha - \varphi)e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}} \right) \right]^2 d\omega t}
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

7.7.10. Análisis en Series de Fourier de la Tensión en la Carga

La tensión en la carga se puede representar en serie de Fourier utilizando la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 V_{carga}(t) &= V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \\
 &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} - \angle c_n\right)
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

Donde:

$$V_0 \approx 0,9V \cos(\alpha)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T v_f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T v_f(t) \sen\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^T v_f(t) e^{j\frac{2\pi nt}{T}} dt$$

7.7.10.1. Cálculo de los términos c_n :

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sqrt{2}V \sen(\omega t) e^{j2n\omega t} d\omega t \quad (7.31)$$

Desarrollando la expresión (7.31), se obtiene:

$$c_n = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} -j \left(e^{j(2n+1)\omega t} - e^{j(2n-1)\omega t} \right) d\omega t \quad (7.32)$$

Integrando la expresión (7.32):

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[\frac{e^{j(2n-1)\omega t}}{2n-1} - \frac{e^{j(2n+1)\omega t}}{2n+1} \right] \Big|_{\alpha}^{\alpha+\pi} \\ c_n &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[\frac{e^{j(2n-1)\alpha+\pi} - e^{j(2n-1)\alpha}}{2n-1} - \frac{e^{j(2n+1)\alpha+\pi} - e^{j(2n+1)\alpha}}{2n+1} \right] \\ c_n &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[\frac{(e^{j(2n-1)\pi} - 1)e^{j(2n-1)\alpha}}{2n-1} - \frac{(e^{j(2n+1)\pi} - 1)e^{j(2n+1)\alpha}}{2n+1} \right] \end{aligned} \quad (7.33)$$

Para simplificar la expresión (7.33), se analizará el valor de $e^{j(2n-1)\pi}$ y $e^{j(2n+1)\pi}$ donde $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} e^{j(2n-1)\pi} &= \cos((2n-1)\pi) + j \sen((2n-1)\pi) = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ e^{j(2n+1)\pi} &= \cos((2n+1)\pi) + j \sen((2n+1)\pi) = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (7.34)$$

Sustituyendo la expresión (7.34) en la (7.33), se obtiene:

$$c_n = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \left[\frac{e^{j(2n+1)\alpha}}{2n+1} - \frac{e^{j(2n-1)\alpha}}{2n-1} \right] \forall n \in \mathbb{N} \quad (7.35)$$

7.7.10.2. Resumen

$$V_{carga}(t) = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \left(\cos(\alpha) + \Re_e \left(\sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left[\frac{e^{j(2n+1)\alpha}}{2n+1} - \frac{e^{j(2n-1)\alpha}}{2n-1} \right] \cdot e^{-jn2\omega t} \right) \right)$$

7.8. Simulación

```

1  % Onda Completa Controlado Monofásico con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \text{sen}(\omega t)$ 
3  % Carga tip RLE
4
5  % Entrada de datos
6  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
7  R=input('Resistencia [Ohm] ');
8  L=input('Inductancia [H] ');
9  E=input('Tension de la carga ');
10 f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
11
12 % Constantes
13 m=E/(sqrt(2)*V)
14 Z=sqrt(R^2+(2*pi*f*L)^2)
15 fi=atan((2*pi*f*L)/R)
16 alfa1=asin(m); % Alfa mínimo
17 alfa2=pi-alfa1; % Alfa máximo
18 disp('Limite de Controlabilidad en grados')
19 [alfa1*180/pi, alfa2*180/pi]
20
21 % Angulo de disparo
22 alfa=input('ángulo de disparo en grados ');
23 alfa=alfa*pi/180;
24
25 % Limite de controlabilidad
26 if (alfa1>alfa)|(alfa>alfa2)

```

```

27     disp('El ángulo de disparo está fuera del límite de contrabilidad
28         se fijo en alfa minimo');
29     alfa=alfa1;
30 end
31
32 % Cálculo del beta
33 b=fsolve(@(t) sin(t-fi)-m/cos(fi)+(m/cos(fi)-sin(alfa-fi))*exp(-(t-
34     alfa)/tan(fi)), [pi])
35 g=b-alfa;          % Angulo de Conducción
36 a=alfa;
37 Imin=sqrt(2)*V/Z*sin(fi-a)*((1+exp(-pi/tan(fi)))/(1-exp(-pi/tan(fi)))
38     )-E/R;
39
40 if Imin<0
41     disp('El puente esta trabajando en condición no continuada')
42
43     % Funciones en el tiempo
44     t=linspace(a,b,1000);
45     i=sqrt(2)*V/Z*(sin(t-fi)-m/cos(fi)+(m/cos(fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/
46         tan(fi))));
47     v=sqrt(2)*V*sin(t);
48
49     tdes=linspace(b,pi+a,300);
50     t=[t,tdes];
51
52     v=[v,E*ones(size(tdes))];
53     i=[i,zeros(size(tdes))];
54
55 else
56     disp('El puente esta trabajando en condición continuada')
57     Imin
58     % Funciones en el Tiempo
59     t=linspace(a,a+pi,1000);
60     i=sqrt(2)*V/Z*(sin(t-fi)-m/cos(fi)-(2*sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan(fi))
61         )/(1-exp(-pi/tan(fi))));
62     v=sqrt(2)*V*sin(t);
63 end

```

```

62
63 % Valores Medios
64 Io=1/(pi)*trapz(t,i)
65 Vo=1/pi*trapz(t,v)
66
67 % Rizo
68 Rizo=0.5*(max(i)-min(i))
69
70 % Valores Efectivos
71 Irms=sqrt(1/(pi)*trapz(t,i.^2))
72 Vrms=sqrt(1/(pi)*trapz(t,v.^2))
73
74 % Potencia
75 S=V*Irms % Fuente
76 Pe=E*Io
77 Pr=R*Irms^2
78 fp=(Pe+Pr)/S
79
80 %Factor de rizado
81 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
82 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
83
84 % Primera Armónica carga
85 Vrms_1=abs(2/pi*(trapz(t,v.*exp(2*j*t))))/sqrt(2)
86 Irms_1=abs(2/pi*(trapz(t,i.*exp(2*j*t))))/sqrt(2)
87
88 % THD carga
89 THDv=sqrt(Vrms^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
90 THDi=sqrt(Irms^2-Irms_1^2)/Irms_1
91
92 % Graficas
93 figure(1)
94 clf
95 t1=[t,t+pi];
96 vf=sqrt(2)*V*sin(t1);
97 vx=[v,v];
98 ix=[i,i];
99 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
100 legend('Fuente','Carga');
101 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');

```

```

102 xlim([alfa 2*pi+alfa]);
103 set(gca,'XTick',alfa:pi/6:2*pi+alfa);
104 if alfa~=0
105 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
106 else
107 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
108 end
109
110 set(gca,'YTickLabel',{' '})
111 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
112 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
113 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
114
115 figure(2)
116 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
117 xlim([alfa 2*pi+alfa]);
118 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
119 set(gca,'XTick',alfa:pi/6:2*pi+alfa);
120 if alfa~=0
121 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
122 else
123 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
124 end
125 set(gca,'YTickLabel',{' '})
126 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
127 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
128
129 ix=[i,-i];
130 figure(3)
131 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
132 xlim([alfa 2*pi+alfa]);
133 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
134 set(gca,'XTick',alfa:pi/6:2*pi+alfa);
135 if alfa~=0
136 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})

```

```

137 else
138 set(gca,'XTickLabel',{ '0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
139 end
140 set(gca,'YTickLabel',{' '})
141 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
142 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
143
144 % Primera Armónica fuente
145 Irms_f_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
146
147 % THD fuente
148 THDi_f=sqrt(Irms^2-Irms_f_1^2)/Irms_f_1

```

7.9. Puente Semicontrolado

En la figura 7.12 se presenta el esquema del puente rectificador semicontrolado alimentando una carga resistiva inductiva. Este puente esta conformado por dos tiristores y dos diodos a diferencia del puente controlado.

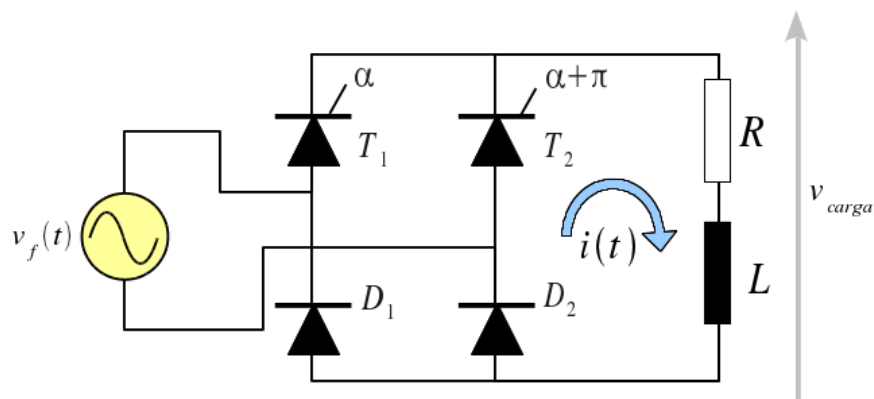


Figura 7.12: Puente rectificador semicontrolado

Durante la operación del puente en cada semiciclo de la forma de onda de la fuente, el diodo inferior del tiristor que se encuentra encendido queda conectado en paralelo a la carga realizando funciones de descarga libre. En la figura 7.13 se presentan las topologías de conducción del puente para los semiciclos positivos y negativos de la fuente.

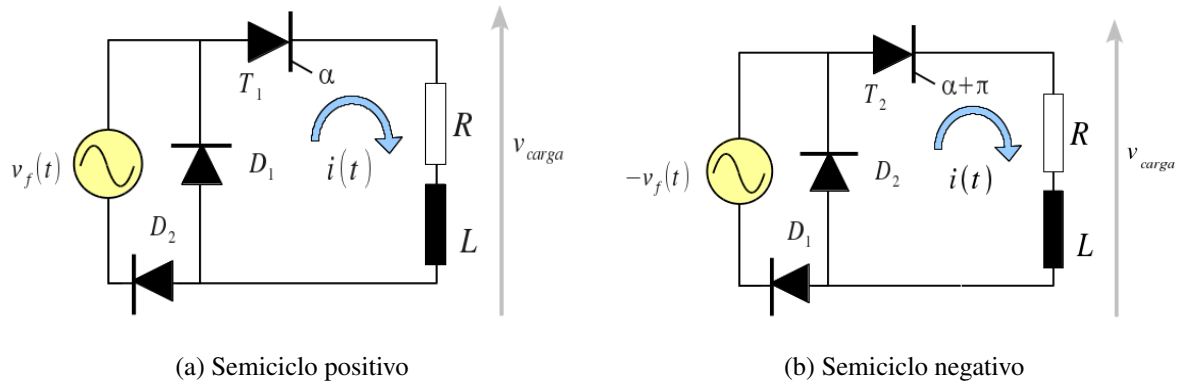


Figura 7.13: Topología del rectificador semicontrolado para cada semiciclo de la fuente

El diodo de descarga libre origina que la carga no pueda ver tensión negativa ($v_{carga}(t)$). La operación de este convertidor en condición continuada de corriente depende de la constante de tiempo de la carga (τ), el periodo de operación de la fuente (T) y del retardo en el encendido (α) del puente. Para garantizar condición continuada de operación para una carga resistiva inductiva, se debe garantizar que:

$$\tau = \frac{L}{R} \geq \frac{\alpha T}{10\pi} \quad (7.36)$$

En las figuras 7.14 y 7.15 se presentan las formas de onda de tensión y corriente sobre la carga con su respectivo contenido armónico. Se puede observar en las figuras como el diodo de descarga libre impide la aplicación de tensión negativa sobre la carga y da un camino de circulación a la corriente hasta que se realice el encendido de la otra componente.

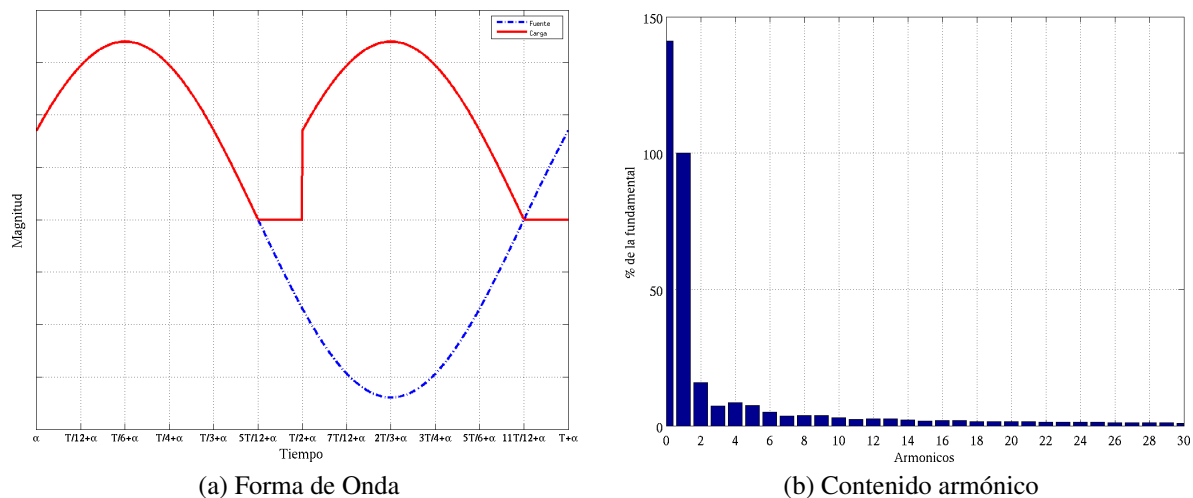
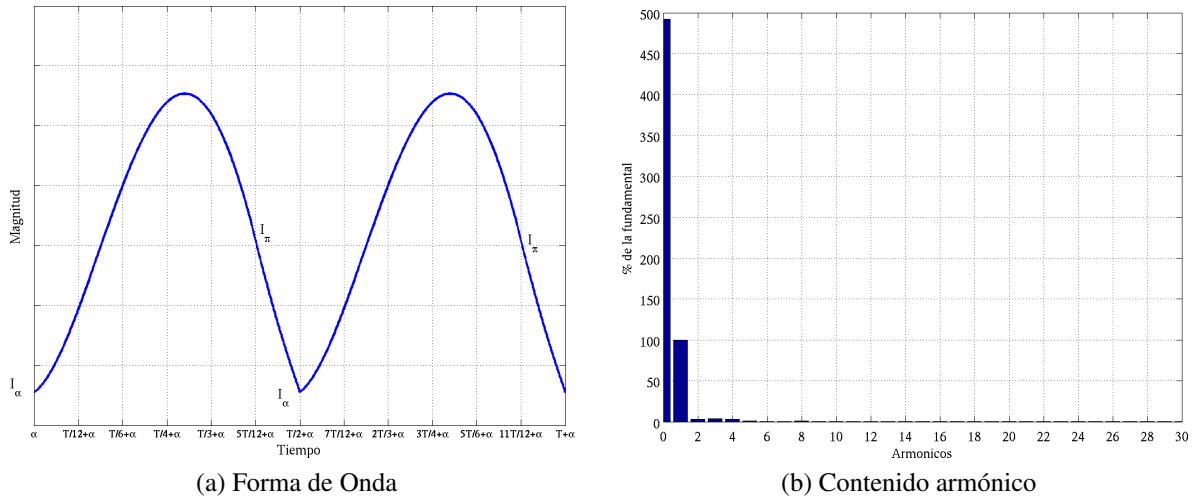


Figura 7.14: Tensión sobre la carga RL

Figura 7.15: Corriente sobre la carga RL

En la figura 7.16 se presenta la forma de onda de corriente en la fuente de alimentación con su respectivo contenido armónico. Por la simetría de la forma de onda el espectro está constituido por únicamente armónicas impares.

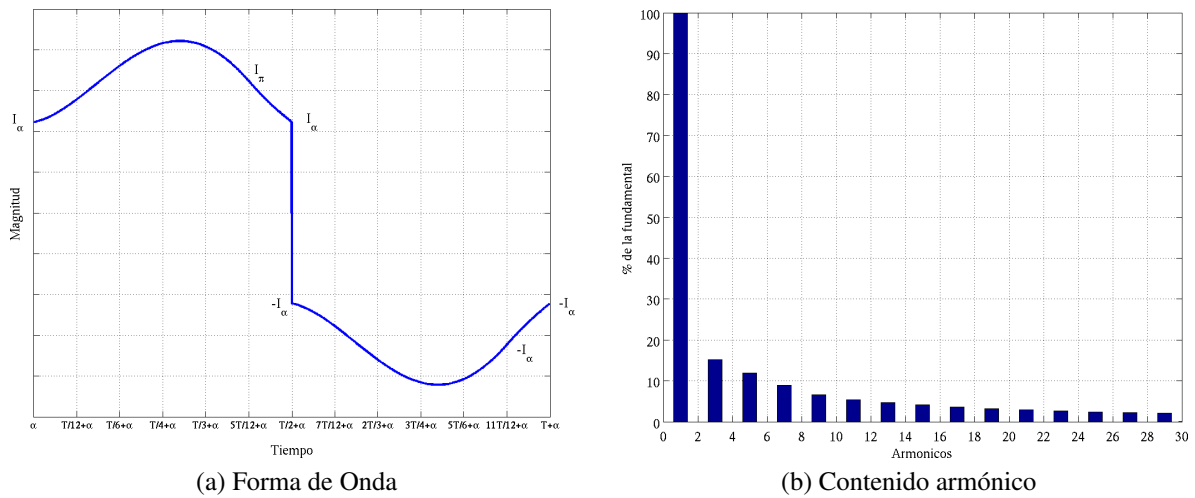


Figura 7.16: Corriente en la fuente de alimentación

7.9.1. Corriente

Para el análisis del puente se supondrá que se satisface la condición de la expresión 7.36 y que la tensión de alimentación del puente es de la forma: $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$.

7.9.1.1. Corriente para el intervalo $\alpha \leq \omega t \leq \pi$

En este intervalo que corresponde a la operación del tiristor y del diodo, la ecuación diferencial que describe el circuito de la figura 7.12 es:

$$v_f(t) = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (7.37)$$

Resolviendo la ecuación diferencial 7.37 con la condición inicial de corriente $i(\alpha/\omega) = I_\alpha$ se obtiene:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) + \left[I_\alpha - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) \right] e^{-\frac{\omega t - \alpha}{\tan(\varphi)}} \quad (7.38)$$

Donde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (7.39)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (7.40)$$

Evaluando la condición final de corriente en el intervalo se obtiene:

$$i(\pi/\omega) = I_\pi = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\pi - \varphi) + \left[I_\alpha - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\alpha - \varphi) \right] e^{-\frac{\pi - \alpha}{\tan(\varphi)}} \quad (7.41)$$

7.9.1.2. Corriente para el intervalo $\pi \leq \omega t \leq \pi + \alpha$

En este intervalo que corresponde a la operación del diodo de descarga libre, la ecuación diferencial que describe el circuito de la figura 7.12 es:

$$0 = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (7.42)$$

Resolviendo la ecuación diferencial 7.42 con la condición inicial de corriente $i(\pi/\omega) = I_\pi$ se obtiene:

$$i(t) = I_\pi e^{-\frac{\omega t - \pi}{\tan(\varphi)}} \quad (7.43)$$

Evaluando la condición final de corriente en el intervalo se obtiene:

$$i\left(\frac{\alpha + \pi}{\omega}\right) = I_\pi e^{-\frac{\alpha}{\tan(\varphi)}} \quad (7.44)$$

7.9.1.3. Condición continuada de corriente

En régimen permanente se debe cumplir que la corriente al inicio y al final de un periodo debe ser igual ($i(\frac{\alpha+\pi}{\omega}) = I_\alpha$) por lo tanto de las expresiones 7.41 y 7.44 se obtiene:

$$I_\pi = \frac{\sqrt{2}V}{Z \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}\right)} \left[\sin(\pi - \alpha) - \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{\pi - \alpha}{\tan(\varphi)}} \right] \quad (7.45)$$

$$I_\alpha = I_\pi e^{-\frac{\alpha}{\tan(\varphi)}}$$

7.9.2. Tensión media

De la forma de onda de tensión de la figura 7.14 se puede calcular la tensión media sobre la carga como:

$$V_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} (1 - \cos(\alpha)) \quad (7.46)$$

7.9.3. Tensión efectiva

De la forma de onda de tensión de la figura 7.14 se puede calcular la tensión efectiva sobre la carga como:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} (\sqrt{2}V \sin(\omega t))^2 d\omega t} = V \sqrt{\frac{1}{\pi} \left(\pi - \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right)} \quad (7.47)$$

7.9.4. Corriente media

La corriente media sobre la carga se puede calcular a partir de la expresión 7.46 correspondiente a la tensión media como:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{\sqrt{2}V}{\pi R} (1 - \cos(\alpha)) \quad (7.48)$$

7.9.5. Simulación

```

1  % Onda Completa Semi Controlado Monofásico con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \sin(\omega t)$ 
3  % Carga tip RL

```

```

4
5 % Entrada de datos
6 V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
7 R=input('Resistencia de carga [Ohm] ');
8 L=input('Inductancia de filtro [H] ');
9 f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
10 a=input('Ángulo de disparo en grados ')*pi/180;
11
12 % Constantes
13 w=2*pi*f;
14 Z=sqrt(R^2+(w*L)^2);
15 fi=atan((w*L)/R);
16 tau=L/R;
17 alfa=a;
18
19 % Tiempo
20 t1=linspace(a,pi,300);
21 t2=linspace(pi,a+pi,100);
22 t=[t1,t2];
23
24 % Tensión sobre la carga
25 v1=sqrt(2)*V*sin(t1);
26 v2=zeros(size(t2));
27 v=[v1,v2];
28
29 % Corriente en los límites de intervalos
30 I_pi=sqrt(2)*V/Z*(sin(pi-fi)-sin(a-fi)*exp(-(pi-a)/tan(fi)))/(1-exp(-
    pi/tan(fi)))
31 I_alfa=I_pi*exp(-a/tan(fi))
32
33 % Corriente en el Tiempo
34 i1=sqrt(2)*V/Z*sin(t1-fi)+(I_alfa-sqrt(2)*V/Z*sin(a-fi))*exp(-(t1-a)/
    tan(fi));
35 i2=I_pi*exp(-(t2-pi)/tan(fi));
36 i=[i1,i2];
37
38 % Valores Medios
39 Io=1/(pi)*trapz(t,i)
40 Vo=1/pi*trapz(t,v)
41

```

```

42 % Rizo
43 Rizo=0.5*(max(i)-min(i))
44
45 % Valores Efectivos
46 Irms=sqrt(1/(pi)*trapz(t,i.^2))
47 Vrms=sqrt(1/(pi)*trapz(t,v.^2))
48
49 % Potencia
50 S=V*Irms % Fuente
51 Pr=R*Irms^2
52 fp=(Pr)/S
53
54 %Factor de rizado
55 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
56 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
57
58 % Primera Armónica
59 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t,v.*exp(j*t))))/sqrt(2)
60 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t,i.*exp(j*t))))/sqrt(2)
61
62 % THD
63 THDv=sqrt(Vrms^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
64 THDi=sqrt(Irms^2-Irms_1^2)/Irms_1
65
66 % Graficas
67 figure(1)
68 clf
69 t1=[t,t+pi];
70 vf=sqrt(2)*V*sin(t1);
71 vx=[v,v];
72 ix=[i,i];
73 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
74 legend('Fuente','Carga');
75 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
76 xlim([alfa 2*pi+alfa]);
77 set(gca,'XTick',alfa:pi/6:2*pi+alfa);
78 if alfa~=0
79 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
      'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
80 else

```

```

81 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
82 end
83
84 set(gca,'YTickLabel',{' '})
85 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
86 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
87 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
88
89 figure(2)
90 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
91 xlim([alfa 2*pi+alfa]);
92 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
93 set(gca,'XTick',alfa:pi/6:2*pi+alfa);
94 if alfa~=0
95 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
96 else
97 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
98 end
99 set(gca,'YTickLabel',{' '})
100 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
101 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
102
103 ix=[i,-i];
104 figure(3)
105 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
106 xlim([alfa 2*pi+alfa]);
107 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
108 set(gca,'XTick',alfa:pi/6:2*pi+alfa);
109 if alfa~=0
110 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
111 else
112 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
113 end
114 set(gca,'YTickLabel',{' '})
115 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');

```

```

116 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
117
118 % Primera Armónica
119 Irms_f_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
120
121 % THD
122 THDi_f=sqrt(Irms^2-Irms_f_1^2)/Irms_f_1

```

7.10. Ejemplos

7.10.1. Puente Rectificador de Diodos con Carga Resistiva

En la figura 7.17, se presenta el puente rectificador monofásico de onda completa no controlado con carga resistiva. Este convertidor es un caso particular del puente rectificador monofásico controlado analizado en la sección 7.7, donde:

$$\begin{aligned}
 L &= 0 \\
 E &= 0 \\
 \alpha &= 0 \\
 \beta &= \pi
 \end{aligned}
 \tag{7.49}$$

El puente rectificador monofásico no controlado con carga resistiva trabaja en condición continuada de corriente debido a que cumple la condición de la expresión (7.13).

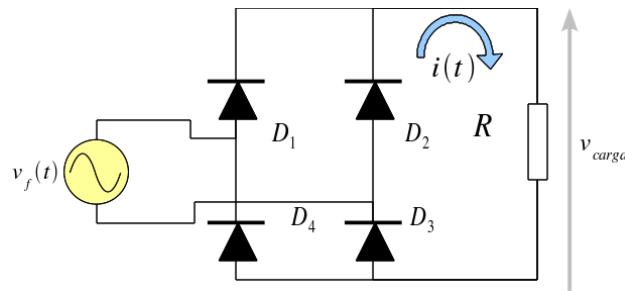


Figura 7.17: Puente rectificador monofásico con carga R

Sustituyendo las condiciones de la expresión (7.49) en los resultados de la sección 7.7, se obtiene:

- Corriente para $0 \leq \omega t \leq \pi$:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{R} [\sin(\omega t)] \tag{7.50}$$

■ Tensión Media

$$V_0 = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \approx 0,9V \quad (7.51)$$

■ Corriente Media

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi R} \approx 0,9\frac{V}{R} \quad (7.52)$$

■ Tensión Efectiva

$$V_{rms} = V \quad (7.53)$$

■ Corriente Efectiva

$$I_{rms} = \frac{V}{R} \quad (7.54)$$

En las figuras 7.22 y 7.19, se presenta la forma de onda de tensión y corriente sobre la carga con su respectivo contenido armónico. Adicionalmente, en la figura 7.20, se muestra la corriente en la fuente de alimentación con su respectivo contenido armónico.

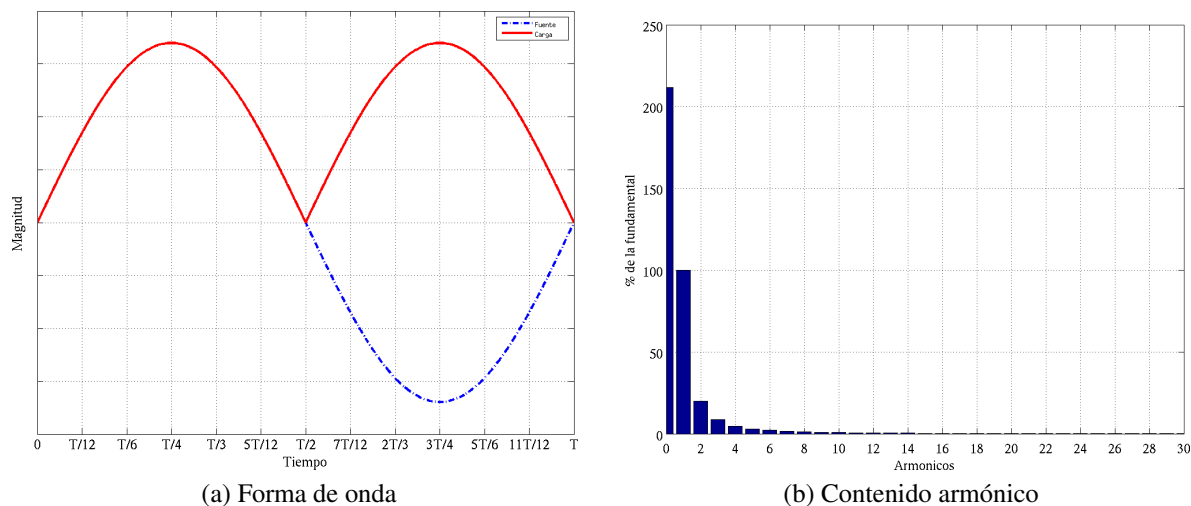
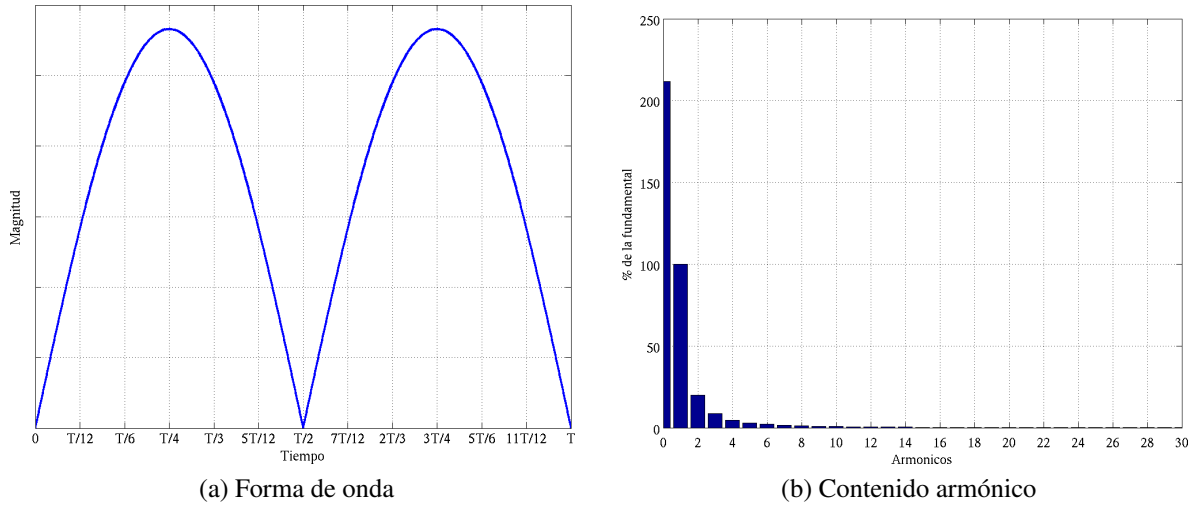
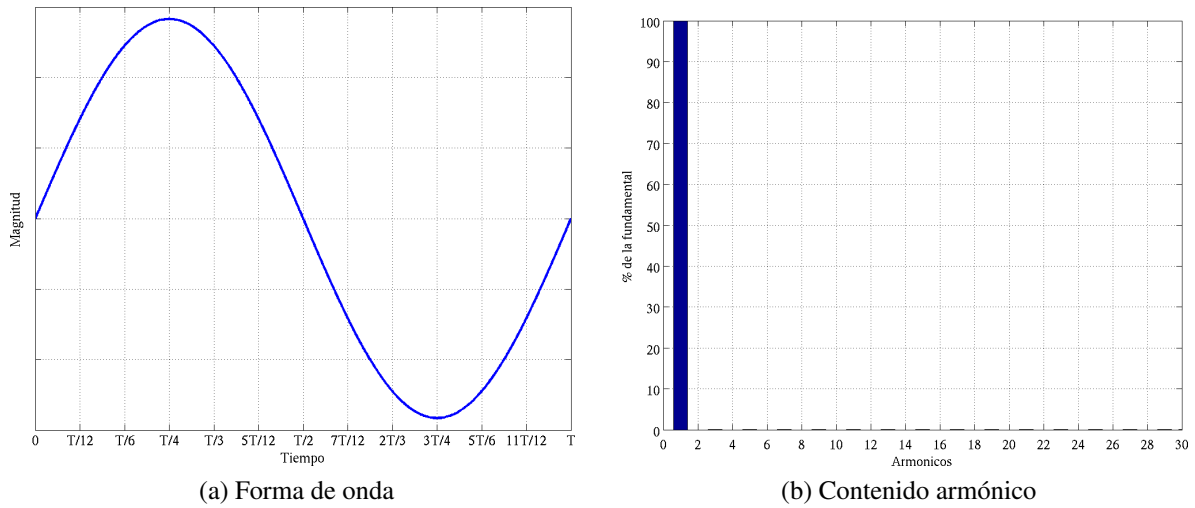


Figura 7.18: Tensiones en la carga R

Figura 7.19: Corriente en la carga R Figura 7.20: Corriente en la fuente con Carga R

7.10.2. Puente Rectificador de Diodos con Carga RL

En la figura 7.21, se presenta el puente rectificador monofásico de onda completa no controlado con carga resistiva inductiva. Este convertidor es un caso particular del puente rectificador monofásico controlado analizado en la sección 7.7, donde:

$$\begin{aligned} E &= 0 \\ \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (7.55)$$

El puente rectificador monofásico no controlado con carga resistiva inductiva trabaja en condición continuada de corriente debido a que cumple la condición de la expresión (7.13).

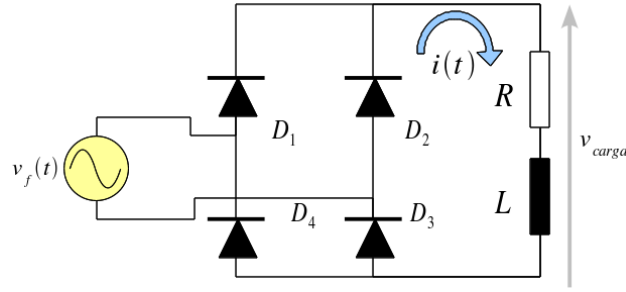


Figura 7.21: Puente rectificador monofásico con carga RL

Sustituyendo las condiciones de la expresión (7.55) en los resultados de la sección 7.7, se obtiene:

- Corriente en régimen permanente para $0 \leq \omega t \leq \pi$:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin(\varphi) e^{-\frac{(\omega t)}{\tan(\varphi)}} \right] + I_m e^{-\frac{(\omega t)}{\tan(\varphi)}} \quad (7.56)$$

$$I_m = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\varphi) \left[\frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}} \right] \quad (7.57)$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \left(\frac{2 \sin(\varphi) e^{-\frac{(\omega t)}{\tan(\varphi)}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}} \right) \right] \quad (7.58)$$

- Tensión Media

$$V_0 = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \approx 0,9V \quad (7.59)$$

- Corriente Media

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi R} \approx 0,9 \frac{V}{R} \quad (7.60)$$

- Tensión Efectiva

$$V_{rms} = V \quad (7.61)$$

- Corriente Efectiva

$$I_{rms} = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\sin(\omega t - \varphi) + \left(\frac{2 \sin(\varphi) e^{-\frac{(\omega t)}{\tan(\varphi)}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi)}}} \right) \right]^2 d\omega t} \quad (7.62)$$

■ Serie de Fourier de la tensión sobre la carga

$$V_{carga}(t) = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \left(1 - \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{2}{4n^2 - 1} \right\} \cos(2n\omega t) \right)$$

En las figuras 7.22 y 7.23, se presenta la forma de onda de tensión y corriente sobre la carga con su respectivo contenido armónico. Adicionalmente, en la figura 7.24, se muestra la corriente en la fuente de alimentación con su respectivo contenido armónico.

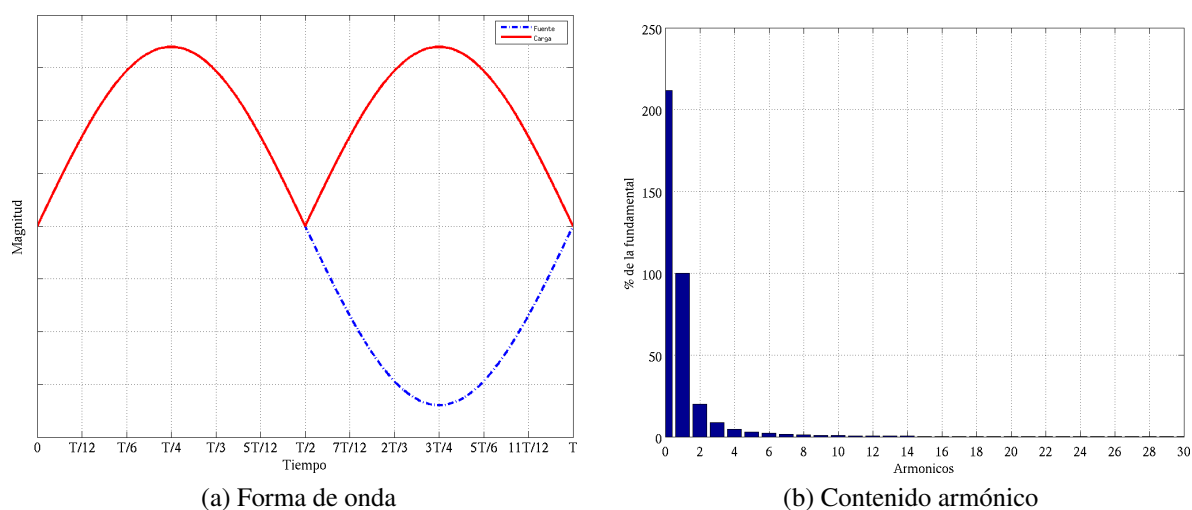


Figura 7.22: Tensiones en la carga RL

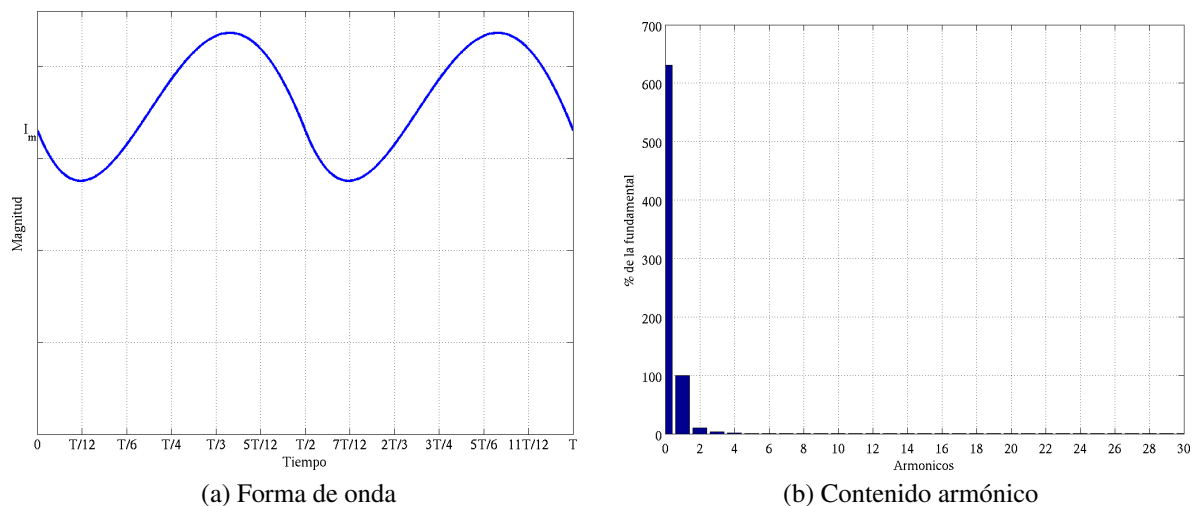


Figura 7.23: Corriente en la carga R

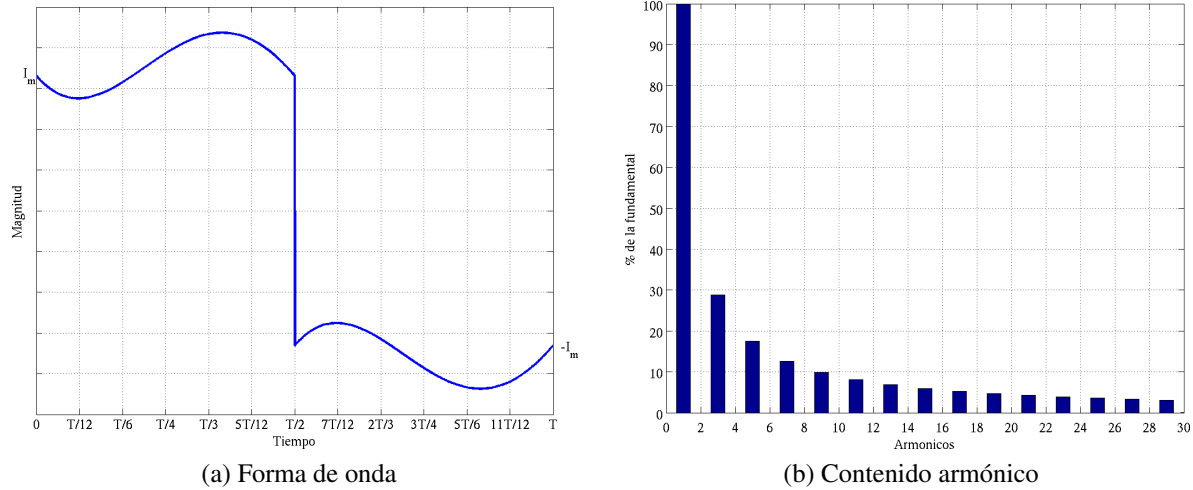


Figura 7.24: Corriente en la fuente con Carga R

7.10.3. Puente Rectificador de Diodos con Carga RC

En la figura 7.25, se presenta un puente rectificador de onda completa monofásico con carga del tipo resistiva capacitiva (RC). El puente esta alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal ($v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$).

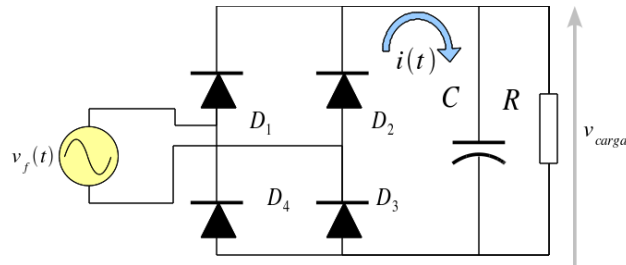


Figura 7.25: Puente rectificador monofásico con carga RC

Analizando en puente rectificador de onda completa de la figura 7.25, se obtiene:

- Ecuación de corriente:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_{carga}}{dt} + \frac{v_{carga}}{R} \quad (7.63)$$

- Tensión en el intervalo: $\alpha \leq \omega t \leq \beta$

$$v_{carga}(t) = v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t) \quad (7.64)$$

- Sustituyendo la expresión (7.64) en (7.63), se obtiene:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{R} \cdot (\omega CR \cdot \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \quad (7.65)$$

- Definiendo:

$$q = \omega CR \quad (7.66)$$

- Se puede escribir la expresión (7.65) como:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{R} \cdot (q \cdot \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \quad (7.67)$$

- La corriente pasa naturalmente por cero en el ángulo de apagado (β):

$$i\left(\frac{\beta}{\omega}\right) = 0 = \frac{\sqrt{2}V}{R} \cdot (q \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta)) \quad (7.68)$$

- Despejando el ángulo de pagado de la expresión (7.68) y recordando que la solución se encuentra $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi$ por ser una carga resistiva capacitiva, se obtiene:

$$\beta = \pi - \arctan(q) \quad (7.69)$$

- Para encontrar el ángulo de encendido (α) se debe evaluar la corriente sobre la carga cuando el diodo se apaga ($\beta \leq \omega t \leq \alpha + \pi$).

$$i(t) = 0 = C \cdot \frac{dv_{carga}}{dt} + \frac{v_{carga}}{R} \quad (7.70)$$

- Resolviendo la ecuación diferencial (7.70) y evaluando su condición inicial, se obtiene:

$$v_{carga}(t) = \sqrt{2}V \sin(\beta) e^{-\frac{(\omega t - \beta)}{q}} \quad (7.71)$$

- Para encontrar el ángulo de encendido (α) se iguala la tensión en la carga en $\alpha + \pi$:

$$\sqrt{2}V \sin(\beta) e^{-\frac{(\alpha + \pi - \beta)}{q}} = -\sqrt{2}V \sin(\alpha + \pi) \quad (7.72)$$

La ecuación (7.72) no posee respuesta analítica y se debe resolver por métodos numéricos.

- Tensión media en la carga:

$$V_0 = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left(\cos(\alpha) - \cos(\beta) + q \cdot \sin(\beta) \cdot \left(1 - e^{-\frac{(\pi+\alpha-\beta)}{q}} \right) \right) \quad (7.73)$$

En las figuras 7.26 y 7.27, se presenta la forma de onda de tensión y corriente sobre la carga con su respectivo contenido armónico. Adicionalmente, en la figura 7.28 se muestra la corriente en la fuente de alimentación con su respectivo contenido armónico.

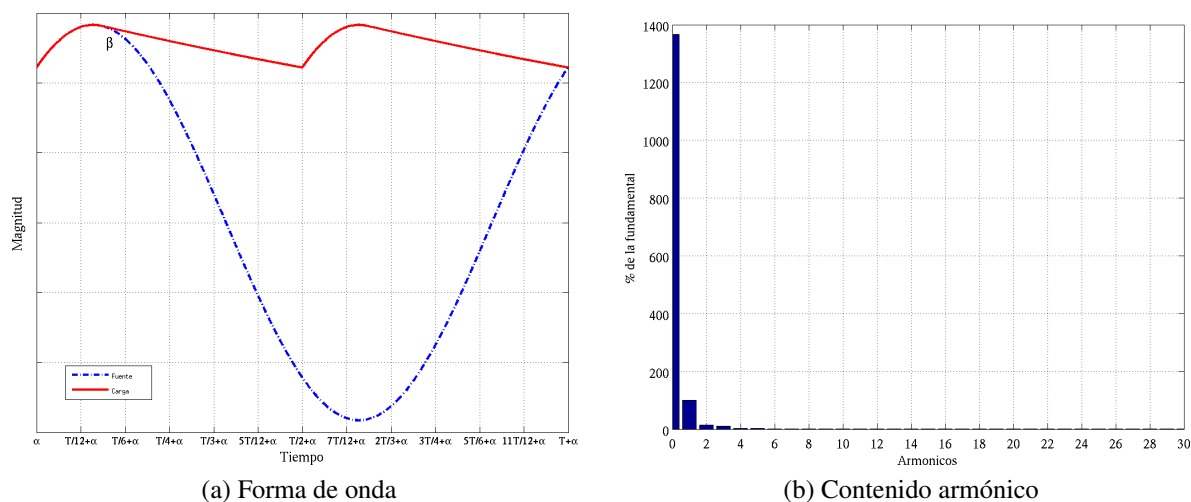


Figura 7.26: Tensión en la carga RC

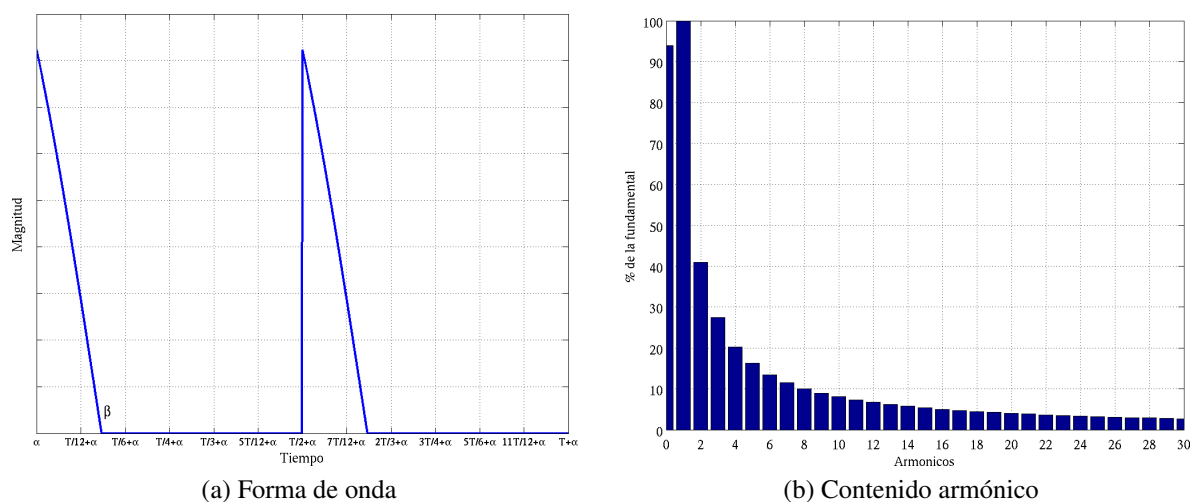


Figura 7.27: Corriente en la carga RC

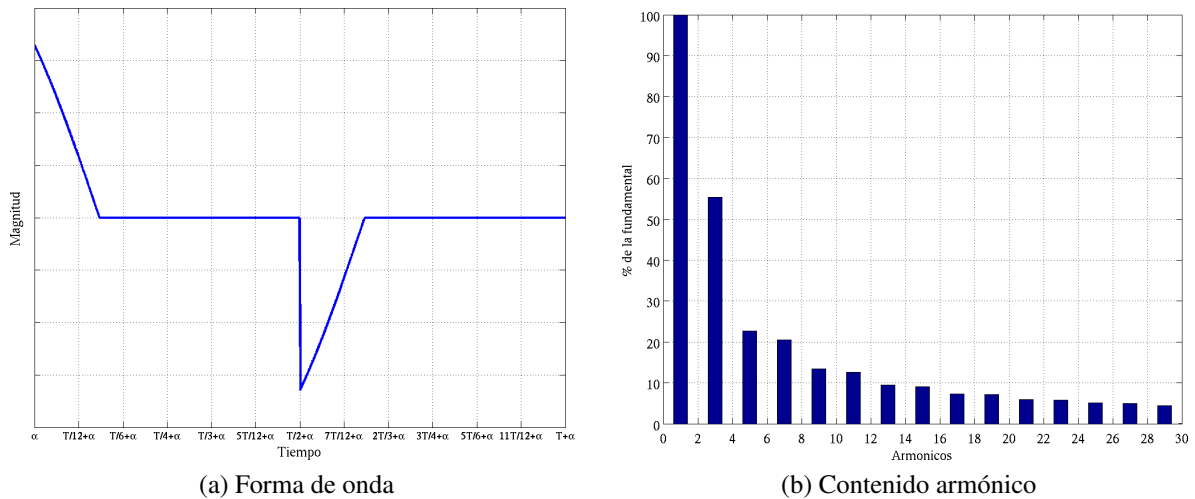


Figura 7.28: Corriente en la fuente con carga RC

7.10.3.1. Simulación

```

1  % Media Onda No Controlado con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \text{sen}(\omega t)$ 
3  % Carga tip RC
4
5  % Entrada de datos
6  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
7  R=input('Resistencia [Ohm] ');
8  C=input('Capacitancia [F] ');
9  f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
10
11
12  % Parámetros
13  q=2*pi*f*R*C;
14  % Angulo de apagado
15  b=pi - atan(q)
16  % Angulo de encendido
17  a=fsolve(@(t) sin(b)*exp(-(t+pi-b)/q)-sin(t), [0.01])
18
19  % Función en el tiempo
20  t1=linspace(a,b,500);
21  v1=sqrt(2)*V*sin(t1);
22  i1=sqrt(2)*V/R*(q*cos(t1)+sin(t1));
23  t2=linspace(b,a+pi,500);

```

```

24 v2=sqrt(2)*V*sin(b)*exp(-(t2-b)/q);
25 i2=zeros(size(t2));
26 t=[t1,t2];
27 v=[v1,v2];
28 i=[i1,i2];
29 gama=b-a
30
31 % Valores Medios
32 Io=1/(pi)*trapz(t,i)
33 Vo=1/(pi)*trapz(t,v)
34
35
36 % Valores Efectivos
37 Irms=sqrt(1/(pi)*trapz(t,i.^2))
38 Vrms=sqrt(1/(pi)*trapz(t,v.^2))
39
40 %Factor de rizado
41 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
42 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
43
44 % Rizado de tensión
45 Dv=(sqrt(2)*V-sqrt(2)*sin(b)*V)/2
46
47 % Graficas
48 figure(1)
49 t1=[t,t+pi];
50 vf=sqrt(2)*V*sin(t1);
51 vx=[v,v];
52 ix=[i,i];
53 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
54
55 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
56 xlim([a 2*pi+a]);
57 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
58 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
59 set(gca,'YTickLabel',{' '})
60 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
61 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
62 legend('Fuente','Carga');

```

```

63 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
64
65 figure(2)
66 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
67 xlim([a 2*pi+a]);
68 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
69 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
70 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
71 set(gca,'YTickLabel',{' '})
72 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
73 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
74
75 ix=[i,-i];
76 figure(3)
77 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
78 xlim([a 2*pi+a]);
79 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
80 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
81 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
82 set(gca,'YTickLabel',{' '})
83 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
84 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
85
86 % Primera Armónica
87 Irms_f_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
88
89 % THD
90 THDi_f=sqrt(Irms^2-Irms_f_1^2)/Irms_f_1

```

7.10.4. Puente Rectificador de Diodos con filtro LC y Carga RL

En la figura 7.29, se presenta el puente rectificador monofásico de onda completa no controlado con filtro LC en la barra de corriente continua y carga resistiva inductiva.

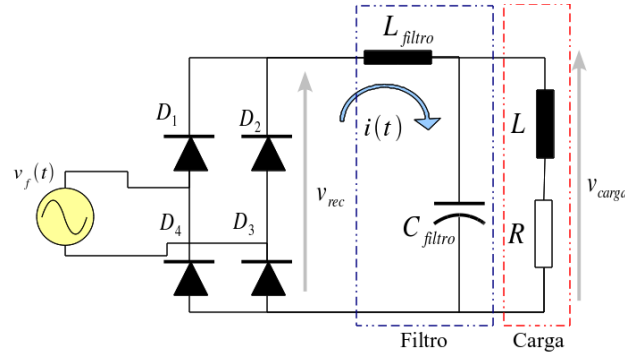


Figura 7.29: Puente rectificador monofásico con filtro LC y carga RL

Para analizar el convertidor de la figura 7.29, se utilizara la técnica de resolución de circuitos mediante series de Fourier. La forma de onda de la tensión v_{rec} en los bornes del filtro se muestra en la figura 7.30, esta tensión se puede representar en series de Fourier como:

$$v_{rec}(t) = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} |v_n| \cos(n\omega t + \angle v_n) \quad (7.74)$$

donde:

$$v_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{2}V \sin(\omega t) e^{j2n\omega t} d\omega t \quad (7.75)$$

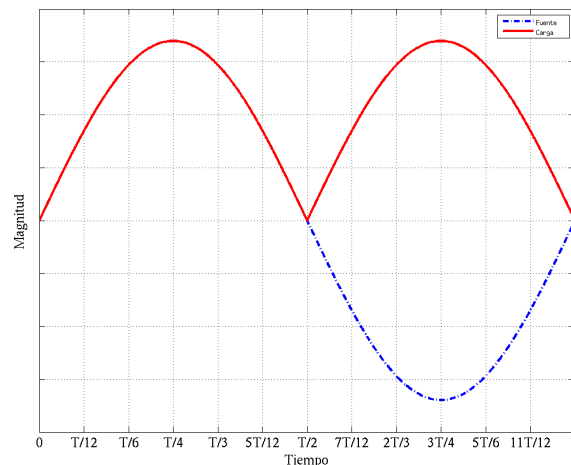


Figura 7.30: Forma de onda de tensión en la barra DC v_{rec}

Calculando v_n de la expresión (7.75), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 v_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sqrt{2}V}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{j2n\omega t} d\omega t \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot V \cdot \left(\frac{e^{j(2n-1)\pi} - 1}{2n-1} - \frac{e^{j(2n+1)\pi} - 1}{2n+1} \right) \\
 &= -\frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{4n^2 - 1} \right) \quad \forall n
 \end{aligned} \tag{7.76}$$

Reemplazando los resultados de la expresión (7.76) en la ecuación (7.74), se obtiene la expresión de la serie de Fourier de la tensión en bornes del filtro:

$$v_{rec}(t) = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \left(1 - \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{2}{4n^2 - 1} \right\} \cos(2n\omega t) \right) \tag{7.77}$$

Para calcular la corriente $i(t)$ suministrada por el rectificador al filtro se utiliza el cálculo de la serie de Fourier de corriente a partir de la tensión.

$$i(t) = \frac{i_o}{2} + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} |i_n| \cos(n\omega t + \angle i_n) \tag{7.78}$$

donde:

$$i_n = \frac{v_n}{Z_n} \tag{7.79}$$

$$\begin{aligned}
 Z_n &= (R + jn\omega L) \parallel \frac{1}{j\omega C_{filtro}} + j\omega L_{filtro} \\
 Z_n &= j\omega L_{filtro} + \frac{R + jn\omega L}{jRC_{filtro}n\omega - (n\omega)^2 LC_{filtro} + 1} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

La tensión sobre la carga ($v_{carga}(t)$) se puede calcular a partir de la serie de Fourier de tensión en el rectificador ($v_{rec}(t)$) utilizando divisor de tensión como:

$$v_{carga}(t) = \frac{v_{c0}}{2} + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} |v_{cn}| \cos(n\omega t + \angle v_{cn}) \tag{7.81}$$

donde:

$$v_{c_n} = v_c \cdot \frac{(R + jn\omega L) \parallel \frac{1}{j\omega C_{filtro}}}{Z_n} \quad (7.82)$$

A partir de la serie de Fourier de tensión sobre la carga de la expresión (7.81), dividiendo sobre la impedancia armónica de la carga ($Z_{carga} = R + jn\omega L$) se puede obtener la serie de Fourier de la corriente por la carga.

$$i_{carga}(t) = \frac{i_{c_0}}{2} + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} |i_{c_n}| \cos(n\omega t + \angle i_{c_n}) \quad (7.83)$$

donde:

$$i_{c_n} = \frac{v_{c_n}}{R + jn\omega L} \quad (7.84)$$

En la figura (7.31), se presenta la corriente $i(t)$, $i_{carga}(t)$ e $i_f(t)$ para el puente de la figura (7.29), con $R = 50\Omega$, $L = 15mH$, $L_{filtro} = 100mH$, $C_{filtro} = 200\mu F$ y una tensión efectiva de $120V$ a $60Hz$. En la figura (7.32), se presenta la tensión en la carga RL .

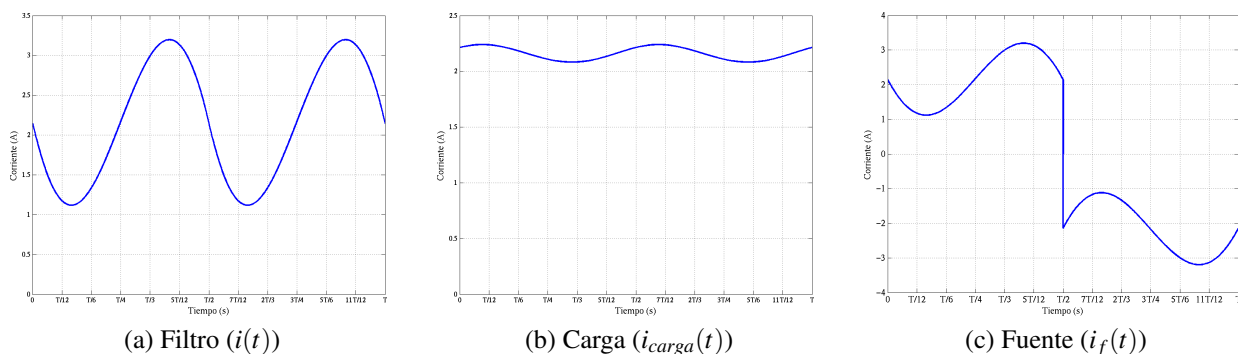


Figura 7.31: Corrientes en el rectificador con filtro LC

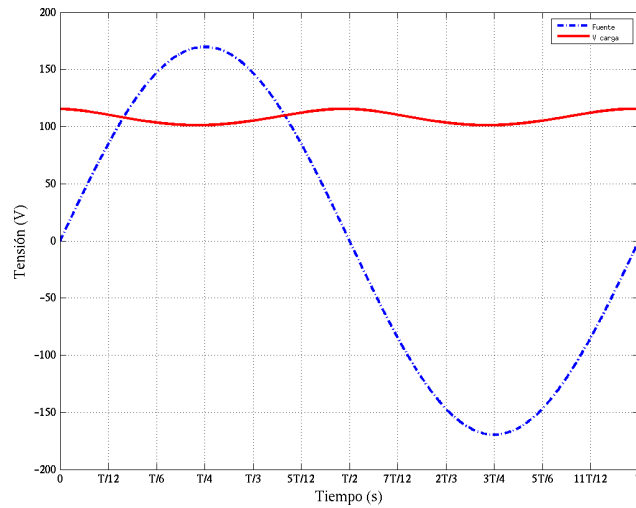


Figura 7.32: Tensión en la carga

7.10.4.1. Simulación

```

1  % Rectificador Onda Completa Monofásico con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2}v_s \sin(\omega t)$ 
3  % Carga tip  $RL$ , con filtro  $LC$ 
4
5  % Entrada de datos
6  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
7  R=input('Resistencia de carga [Ohm] ');
8  L2=input('Inductancia de carga [H] ');
9  L=input('Inductancia de filtro [H] ');
10 C=input('Capacitancia del filtro [F] ');
11 f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
12 w=2*pi*f;
13
14 % Valores Medios
15 Vo=0.9*V
16 Io=Vo/R
17
18 % Armonicas
19 n=1:30;
20 ln=length(n);
21 t=linspace(0,pi/w,1000);
22 vrec(1,:)=Vo*ones(size(t));
23 is(1,:)=Io*ones(size(t));
24 vr(1,:)=Vo*ones(size(t));

```

```

25 ic(1,:)=Io*ones(size(t));
26 for i=1:ln
27     s=j*n(i)*w;
28     % Filtro LC Carga RL
29     %  $Z_n = (R + jn\omega L) \parallel \frac{1}{j\omega C_{filtro}} + j\omega L_{filtro}$ 
30     Zs=((s^2*C*L+1)*R+(s^3*C*L+s)*L2+s*L)/(s*C*R+s^2*C*L2+1);
31     %  $Z_{1n} = \frac{1}{Z_n} \left( (R + jn\omega L) \parallel \frac{1}{j\omega C_{filtro}} \right)$ 
32     Z1=(R+s*L2)/((s^2*C*L+1)*R+(s^3*C*L+s)*L2+s*L);
33     Zc=R+s*L;
34
35     vc=0.9*V*(-2/(4*n(i)^2-1));
36     vrec(i+1,:)=vc*cos(n(i)*w*t);
37     is(i+1,:)=vc/abs(Zs)*cos(n(i)*w*t-angle(Zs)); % Corriente en el filtro
38     vr(i+1,:)=vc*abs(Z1)*cos(n(i)*w*t+angle(Z1)); % Tensión en la Carga
39     ic(i+1,:)=vc*abs(Z1)/abs(Zc)*cos(n(i)*w*t+angle(Z1)-angle(Zc)); %
        Corriente en la Carga
40 end
41
42 i=sum(is); %  $i(t)$ 
43 v=sum(vrec); %  $v_{rec}(t)$ 
44 vcarga=sum(vr); %  $v_{carga}(t)$ 
45 icarga=sum(ic); %  $i_{carga}(t)$ 
46 t=t*w;
47
48 % Valores medios en la carga
49 Vo_carga=1/pi*trapz(t,vcarga);
50 Io_carga=1/pi*trapz(t,icarga)
51
52 % Rizo
53 Rizoi_rec=0.5*(max(i)-min(i))
54 Rizov_carga=0.5*(max(vcarga)-min(vcarga))
55 Rizoi_carga=0.5*(max(icarga)-min(icarga))
56 %
57 % Valores Efectivos
58 Irms_rec=sqrt(1/(pi)*trapz(t,i.^2))
59 Vrms_rec=sqrt(1/(pi)*trapz(t,v.^2))
60 Vrms_carga=sqrt(1/(pi)*trapz(t,vcarga.^2))
61 Irms_carga=sqrt(1/(pi)*trapz(t,icarga.^2))
62 %
63 % Potencia

```

```

64 S=V*Irms_rec % Fuente
65 Pcarga=Irms_carga^2*R
66 fp=(Pcarga)/S
67 %
68 %Factor de rizado
69 FR_i_rec=sqrt(Irms_rec^2-Io_carga^2)/Io
70 FR_v_rec=sqrt(Vrms_rec^2-Vo_carga^2)/Vo
71 FR_v_carga=sqrt(Vrms_carga^2-Vo_carga^2)/Vo_carga
72 FR_i_carga=sqrt(Irms_carga^2-Io_carga^2)/Io_carga
73 %
74 % Primera Armónica en el filtro
75 Vrms_1=abs(2/pi*(trapz(t,v.*exp(2*j*t))))/sqrt(2)
76 Irms_1=abs(2/pi*(trapz(t,i.*exp(2*j*t))))/sqrt(2)
77
78 % THD a la entrada del filtro
79 THDv=sqrt(Vrms_rec^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
80 THDi=sqrt(Irms_rec^2-Irms_1^2)/Irms_1
81
82 % Graficas
83 figure(1) %  $v_{rec}(t)$ 
84 t1=[t,t+pi];
85 vf=sqrt(2)*V*sin(t1);
86 vx=[v,v];
87 ix=[i,i];
88 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
89 legend('Fuente','V rec');
90 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
91 xlim([0 2*pi]);
92 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
93 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T/12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'});
94 % set(gca,'YTickLabel',' ');
95 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
96 ylabel('Tensión (V)','fontsize',14,'fontname','Times');
97 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
98 %
99 figure(2) %  $i(t)$ 
100 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
101 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
102 xlim([0 2*pi]);

```

```

103 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
104 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
105 % set(gca,'YTickLabel',' ')
106 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
107 ylabel('Corriente (A)','fontsize',14,'fontname','Times');
108 %
109 figure(5) %  $i_{carga}(t)$ 
110 plot(t1,[icarga,icarga],'LineWidth',2);grid
111 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
112 xlim([0 2*pi]);
113 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
114 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
115 % set(gca,'YTickLabel',' ')
116 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
117 ylabel('Corriente (A)','fontsize',14,'fontname','Times');
118 %
119 ix=[i,-i];
120 figure(3) %  $i_f(t)$ 
121 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
122 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Symbol');
123 xlim([0 2*pi]);
124 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
125 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
126 % set(gca,'YTickLabel',' ')
127 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
128 ylabel('Corriente (A)','fontsize',14,'fontname','Times');
129
130 % Primera Armónica en la fuente
131 Irms_f_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
132
133 % THD en la fuente
134 THDi_f=sqrt(Irms_rec^2-Irms_f_1^2)/Irms_f_1
135
136 figure(4) %  $v_{carga}(t)$ 
137 plot(t1,vf,'-.',t1,[vcarga,vcarga],'r','LineWidth',2);grid
138 legend('Fuente','V carga');
139 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');

```

```

140 xlim([0 2*pi]);
141 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
142 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
143 % set(gca,'YTickLabel',' ')
144 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
145 ylabel('Tensión (V)','fontsize',14,'fontname','Times');
146 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');

```

7.11. Ejercicios

1. Un puente rectificador de onda completa monofásico presenta una carga RL de 30Ω y $75mH$. El puente se alimenta de un sistema de $120V$ a $60Hz$. Determine la potencia consumida por la carga, rizado, factor de rizado de tensión y corriente y el factor de potencia en la fuente para $\alpha = 25^\circ$ y $\alpha = 75^\circ$.
2. Se modela un electro imán conectando una bobina de $120mH$ en serie con una resistencia de 5Ω . La corriente media en la bobina debe ser de $10A$ para establecer el campo magnético necesario. Determine:
 - a) El ángulo de disparo necesario para que el rectificador controlado produzca esta corriente media, si el rectificador se alimenta de un transformador reductor de relación $2:1$ desde un sistema de $240V$ a $60Hz$ (lado de alta) y su reactancia de cortocircuito es de 6% . Nota: el rectificador se conecta del lado de baja.
 - b) Determine el tiempo de conmutación de los tiristores.
 - c) Rizado de corriente.
 - d) Es valida la aproximación $I_0 \approx I_{rms}$. Comente su respuesta.
3. Un rectificador monofásico de onda completa no controlado, alimenta una carga activa de 3Ω , $35mH$ y $24V$. La tensión efectiva de la fuente que alimenta el rectificador es $120V$ a $60Hz$. Determine:
 - a) Corriente media y efectiva por la carga.
 - b) La potencia absorbida por la fuente de corriente continua.
 - c) Potencia disipada en forma de calor por la carga.
 - d) Factor de potencia en la fuente de alterna.

- e) Calcule el rizado de corriente en la carga.
4. Encontrar el factor de potencia del rectificador monofásico controlado con carga RL . Asuma que la inductancia es lo suficientemente grande para considerar que la corriente de carga es continua.
5. Calcule el condensador necesario del puente de la figura 7.25 para que el puente suministre una potencia de 500 W con una tensión de entrada de 220 V efectivos. El puente debe tener un rizado en tensión menor al 20% .
6. Para el puente semicontrolado de la figura 7.33 determine:

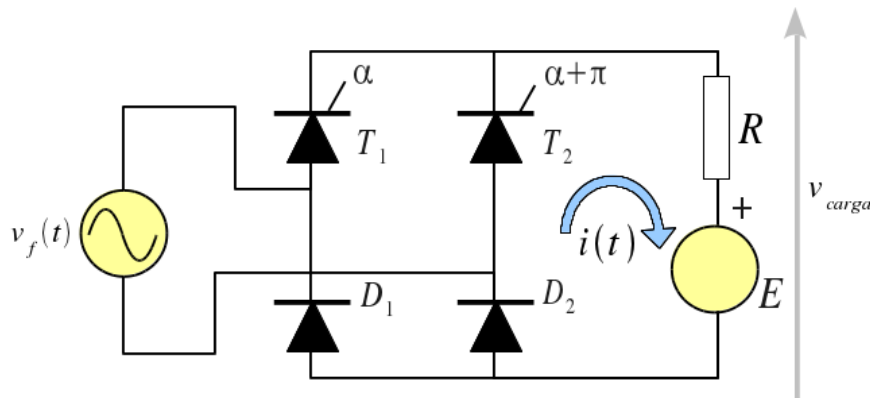


Figura 7.33: Ejercicio 5

- a) Límites de controlabilidad del puente.
- b) Expresiones de corriente.
- c) Potencia instantánea y media entregada por la fuente.
- d) Factor de potencia consumido por el convertidor.
7. Para el puente semicontrolado de la figura 7.34 realice un programa simulación que calcule:

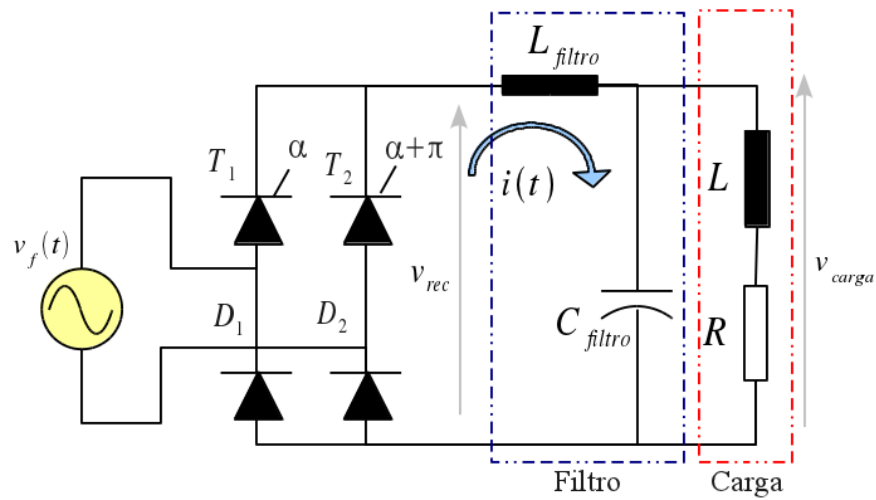


Figura 7.34: Ejercicio 6

- Formas de onda de tensión y corriente a la entrada del filtro y a la salida.
- Valor medio y efectivo de la corriente y tensión e la carga.
- THD de tensión y corriente en la fuente y carga.
- Contenido armónico de las tensiones y corrientes a la entrada y salida del filtro.
- Contenido armónico de la corriente de la fuente.

Rectificador Trifásico

8.1. Aspectos Generales

La finalidad de los rectificadores trifásicos es la misma que los de media onda y onda completa monofásica, generar una tensión o corriente continua específica, a partir de una fuente de corriente alterna. Los rectificadores trifásicos, presentan mejores ventajas comparativas que los de media onda. La ventaja más importante, es que la corriente en el sistema alterno de alimentación del rectificador es cero, evitando así los problemas asociados al fenómeno de saturación de las máquinas eléctricas conectadas a la misma barra de alimentación en corriente alterna. Adicionalmente, disminuye el rizado en las corrientes de salida en la barra de corriente continua y se obtiene un mayor valor de tensión y corriente continua.

En este capítulo se analizará el puente rectificador trifásico controlado, el análisis del rectificador no controlado o de diodos es análogo al controlado si sustituimos el ángulo de disparo por cero.

8.2. Aplicaciones

- Cargadores de batería.
- Fuentes de poder.
- Control de velocidad y posición de máquinas de corriente continua.
- Transmisión en Corriente Continua (HVDC).
- Excitación de máquinas sincrónicas.
- Electro filtros.
- Entre otras.

8.3. Esquema del Rectificador Trifásico

En la figura 8.1, se presenta el esquema de un rectificador controlado trifásico. Este puente está compuesto por seis interruptores electrónicos de potencia, los cuales son encendidos alternadamente en parejas cada medio ciclo de las tres ondas alternas de la fuente de poder.

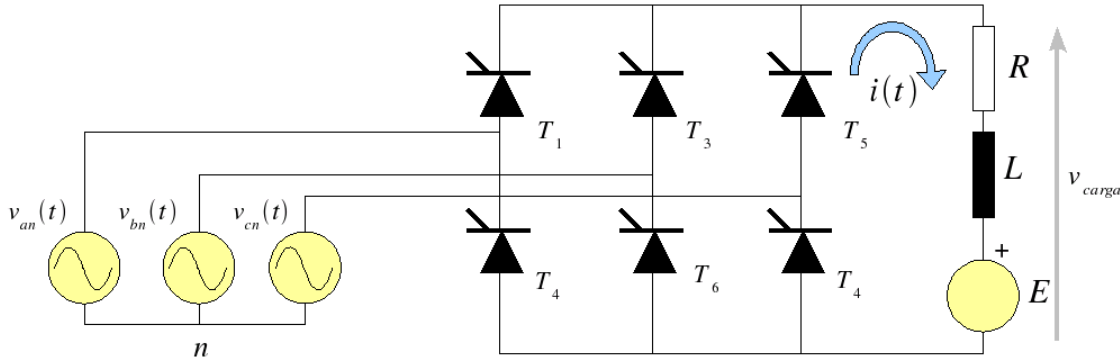


Figura 8.1: Diagrama del puente rectificador trifásico

8.4. Operación del Puente Rectificador

En el análisis inicial del circuito de la figura 8.1, se considera que el generador trifásico es equilibrado, de secuencia positiva (a, b, c) e ideal al igual que los Tiristores. En este circuito se tiene:

1. En los terminales eléctricos del puente se aplica la tensión línea a línea del sistema trifásico generado por la fuente de poder. (v_{ab}, v_{bc}, v_{ca})
2. Aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones sobre el circuito, se demuestra que sólo puede conducir un tiristor en la mitad superior del puente (T_1, T_3, T_5). El tiristor en estado de conducción corresponde al que presenta la mayor tensión instantánea de fase en su cátodo y tiene pulso de encendido en la compuerta.
3. De igual forma, la ley de Kirchhoff de tensiones muestra que sólo puede conducir a la vez un tiristor de la mitad inferior (T_2, T_4, T_6). El tiristor en estado de conducción tendrá su cátodo conectado a la tensión de fase de menor valor en ese instante.
4. Los Tiristores de la misma rama no pueden conducir al mismo tiempo debido a que originarían un cortocircuito en la barra de corriente continua.
5. La tensión de salida del puente sobre la carga, se obtiene como la superposición de las tensiones línea a línea del sistema trifásico y de sus complementos.

6. Debido a que la transición de la tensión línea a línea más elevada se realiza cada sexto del periodo del generador el puente se denomina: rectificador de seis pulsos.

En la figura 8.2 se muestra las tensiones línea a línea que genera este sistema de tensiones trifásicas línea a neutro con su respectivo complemento. En la figura 8.3 se presenta la secuencia de disparo del puente convertidor de la figura 8.1.

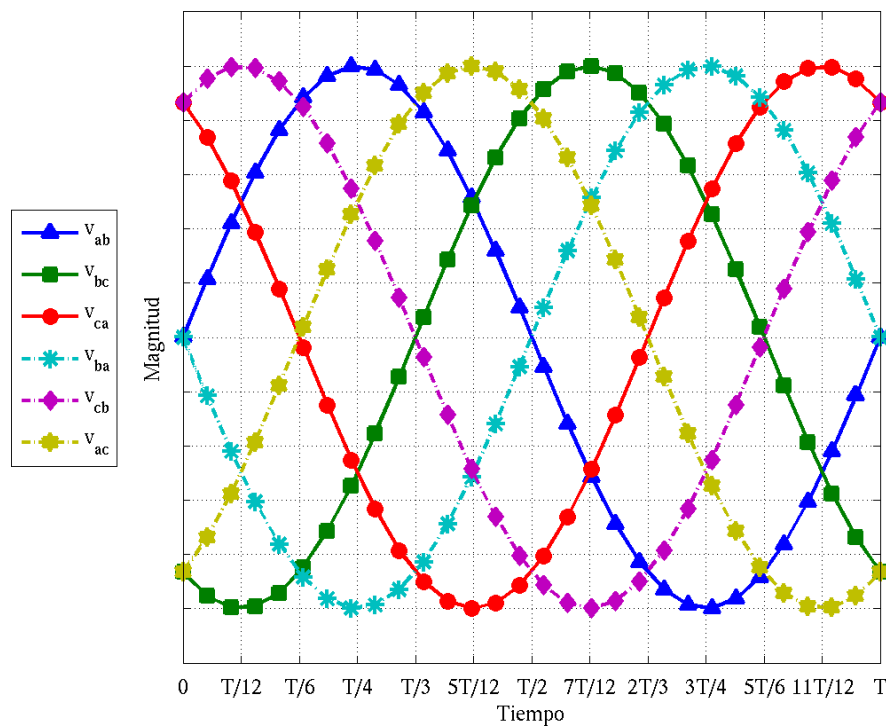


Figura 8.2: Tensiones línea a línea del generador trifásico con sus complementos

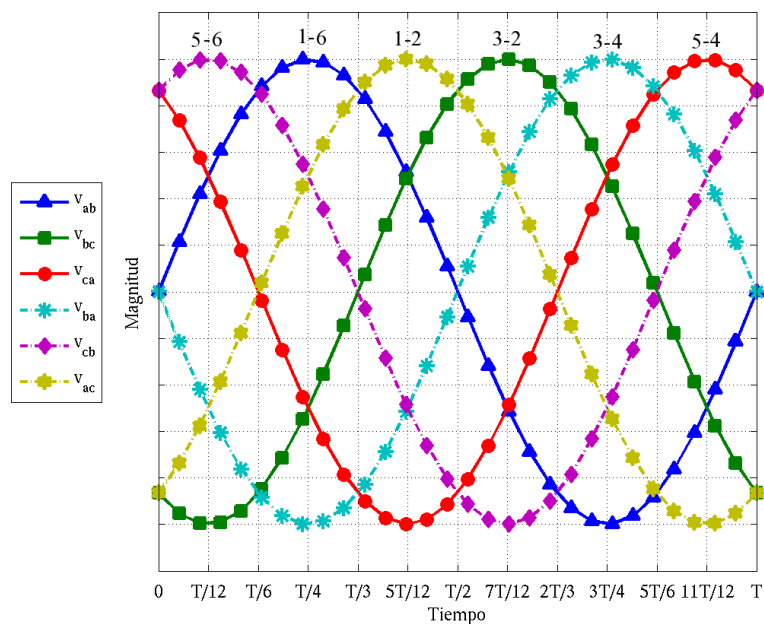
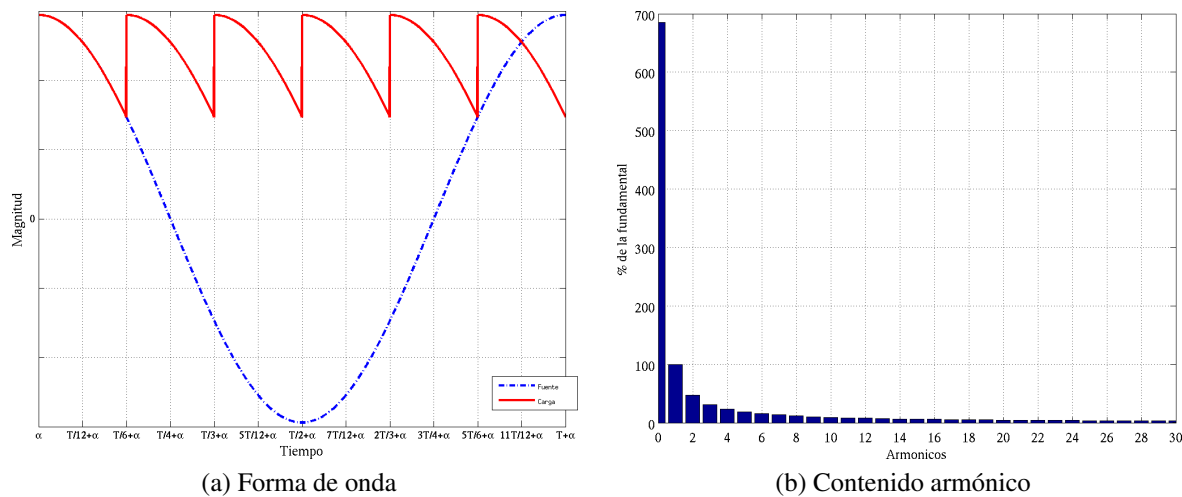


Figura 8.3: Secuencia de disparo del puente

En las figuras 8.4, 8.5 se presenta la forma de onda y contenido armónico de tensión y corriente sobre la carga *RLE*.

Figura 8.4: Tensión en la carga *RLE* del puente trifásico

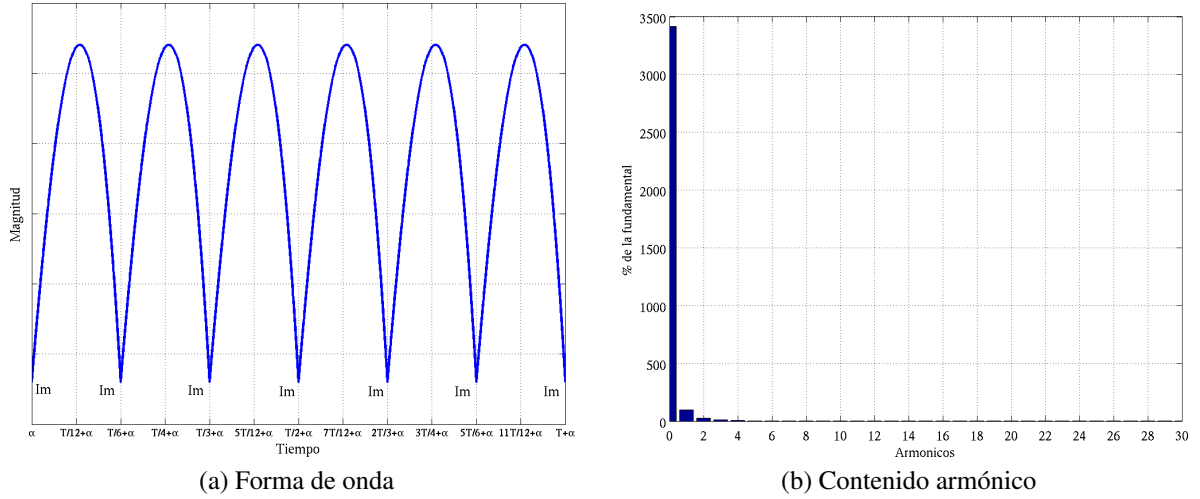


Figura 8.5: Corriente en la carga *RLE* del puente trifásico

En la figura 8.6, se presenta la corriente por cada tiristor del puente. La corriente en un tiristor en conducción es igual a la corriente en la carga, cada componente conduce una tercera parte del periodo de la fuente. Para calcular la corriente en cada fase del generador se aplicara la ley de Kirchhoff de corriente en los terminales eléctricos del puente rectificador.

$$\begin{aligned}
 i_a &= i_{T_1} - i_{T_4} \\
 i_b &= i_{T_3} - i_{T_6} \\
 i_c &= i_{T_5} - i_{T_2}
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

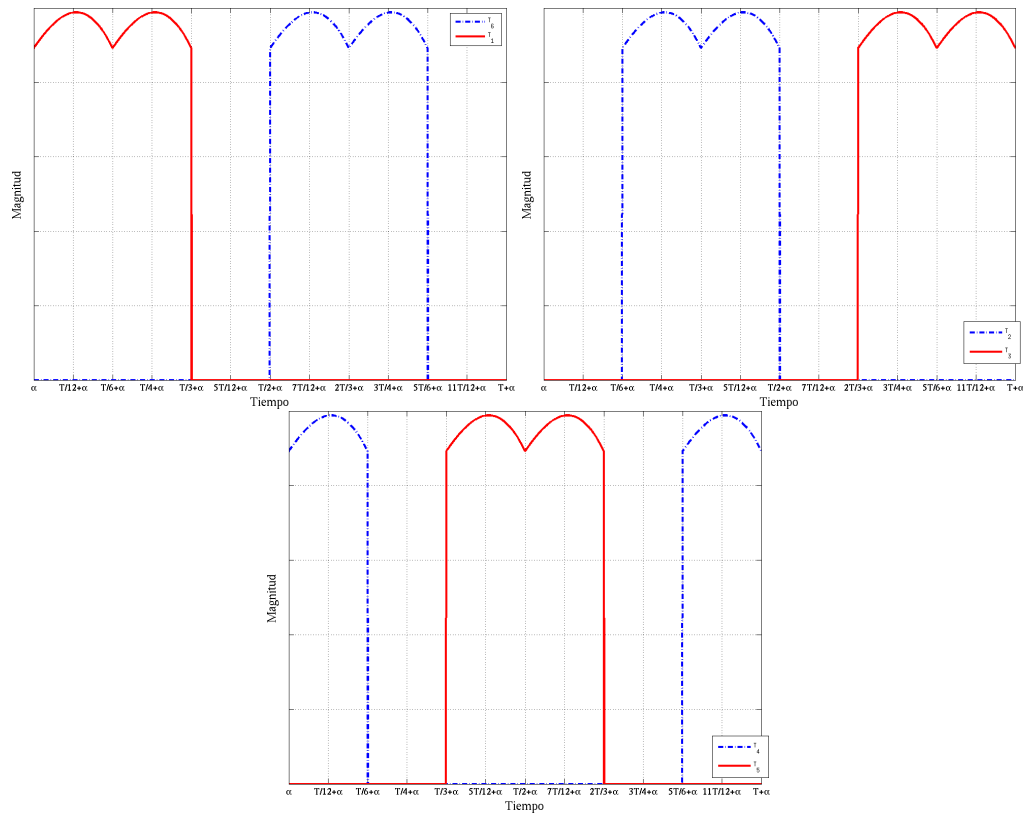


Figura 8.6: Corriente por los tiristores del puente

En la figura 8.7, se presenta las corriente en la fase "a" de la fase del generador para la carga *RLE* considerada con un ángulo de disparo de 30° , en régimen permanente de operación.

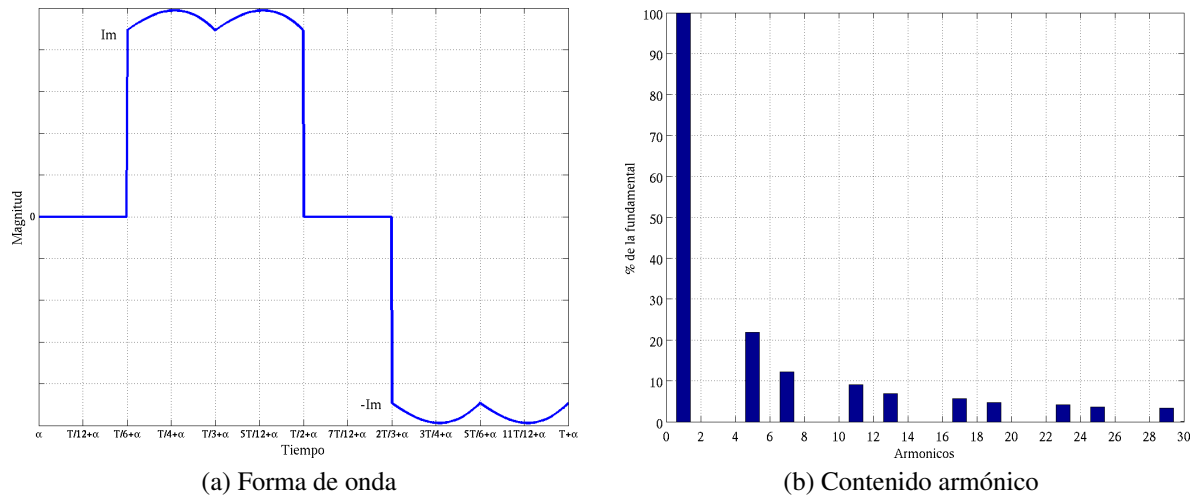


Figura 8.7: Corriente en la fase "a" para una carga *RLE* del puente trifásico

De la operación del puente rectificador se puede determinar la corriente media y efectiva de operación de los tiristores y la corriente efectiva sobre las fases del sistema alterno de alimentación.

Asumiendo, que el valor de inductancia de la carga garantiza que el cociente entre el valor medio y efectivo de la corriente sobre esta, en régimen permanente de operación, este cercano a uno se puede determinar estos valores como:

$$I_{0Tiristor} = \frac{1}{3} I_0 \quad (8.2)$$

$$I_{rmsTiristor} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_0 \quad (8.3)$$

$$I_{rmsSistema} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_0 \quad (8.4)$$

La potencia aparente entregada por el generador trifásico es:

$$S_T = \sqrt{3} V_{ll} I_{rmsSistema} \quad (8.5)$$

Comercialmente los rectificadores poseen filtro pasabajos en el lado de corriente continua, en la figura 8.8, se presenta la forma de onda típica de tensión línea a línea y corriente en la fase “a” de un sistema de potencia que alimenta un rectificador trifásico no controlado (diodos) el cual posee en la barra de corriente continua un filtro pasabajos (LC) para disminuir el rizado de la tensión de continua sobre la carga. Adicionalmente en la figura 8.9, se presenta el contenido armónico introducido al sistema por la operación de este puente convertidor.

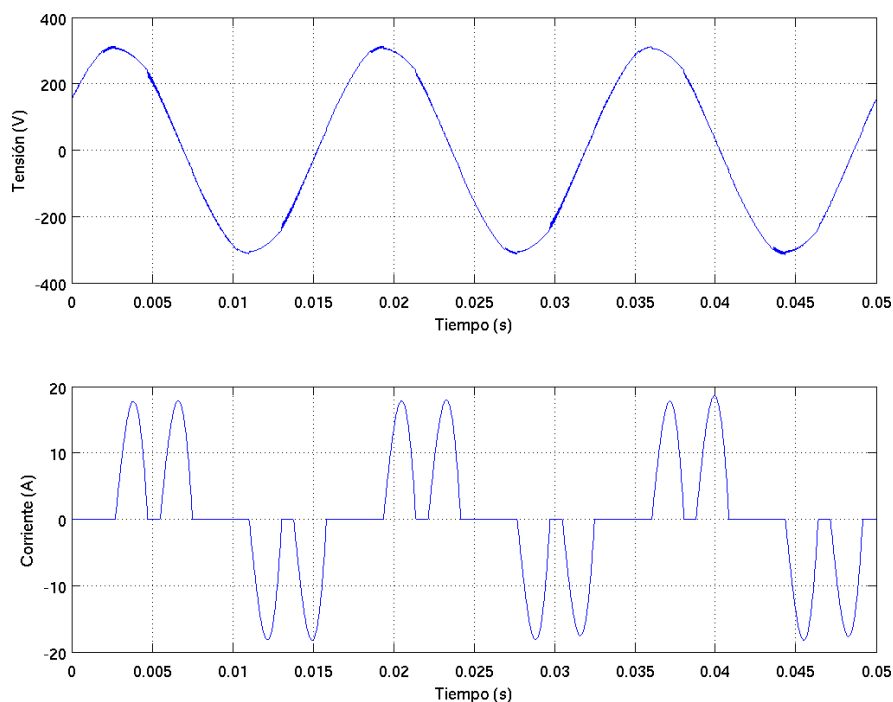


Figura 8.8: Forma de onda de tensión y corriente en el sistema de alimentación del rectificador de diodos

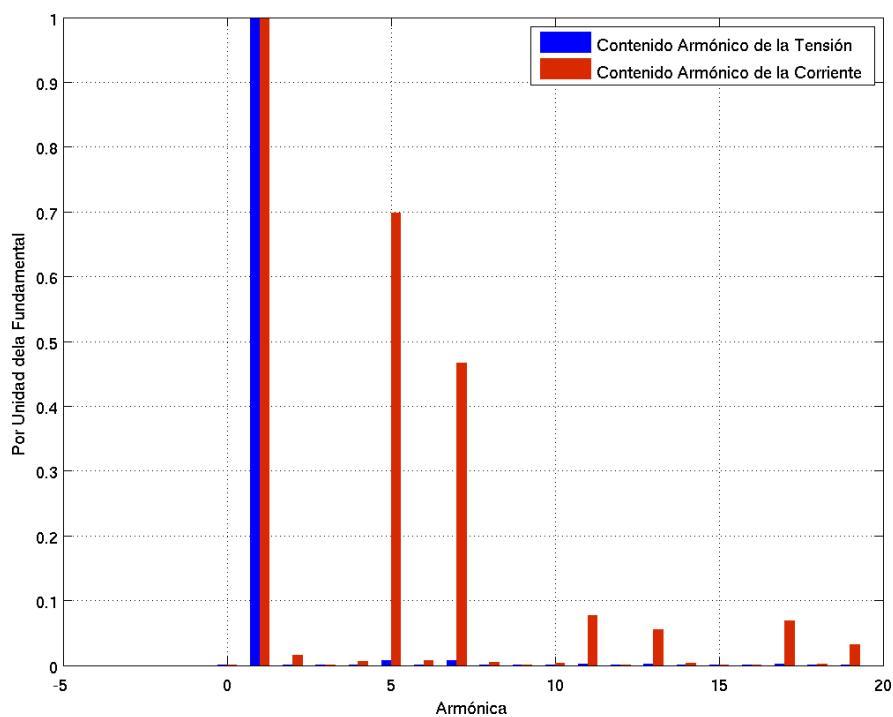


Figura 8.9: Contenido armónico introducido al sistema por la operación del rectificador de diodos

Si comparamos el contenido armónico de la corriente de la figura 8.7, que corresponde a la operación de un rectificador sin filtro pasabajos (*LC*) en la barra de corriente continua, con el de la

figura 8.9 el cual posee filtro, vemos como la utilización del filtro en el lado de continua incrementa notoriamente el contenido armónico de la corriente en especial la 5^{ta} y 7^{ma} armónica.

8.5. Análisis de la Operación del Puente

La condición de operación del puente de seis pulsos puede ser analizada en régimen transitorio y régimen permanente de operación. En esta sección se analizará el puente en régimen permanente de operación.

Analizando el circuito de la figura 8.1 y considerando los Tiristores ideales, es decir que su tensión de ruptura es cero, el rango de controlabilidad del puente esta determinado por aquellos valores del ángulo de encendido donde el tiristor se encuentre polarizado en directo ($v_{ak} \geq 0$), garantizando de esta forma la conducción de la componente, esto ocurre cuando la fuente de tensión sinusoidal iguala y supera a la fuente de tensión continua (E) de la carga por lo cual el ángulo de encendido mínimo es función de la magnitud de las fuentes sinusoidal y continua del circuito. El rango de control del tiristor esta comprendido para este caso particular de fuente sinusoidal entre el ángulo de disparo mínimo y máximo ($\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$).

8.5.1. Cálculo del Límite de Controlabilidad

El tiristor comienza a conducir cuando su tensión ánodo cátodo es mayor a cero, en este caso esta condición se alcanza para:

$$v_f(t) \geq E \quad (8.6)$$

Sustituyendo la expresión de la fuente en la ecuación 8.6, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}V \sin(\omega t) &\geq E \\ \sin(\omega t) &\geq \frac{E}{\sqrt{2}V} \\ \sin(\alpha) &\geq \frac{E}{\sqrt{2}V} \\ \alpha &\geq \arcsen\left(\frac{E}{\sqrt{2}V}\right) \\ \alpha_{min} &\leq \alpha \leq \alpha_{max} \end{aligned} \quad (8.7)$$

donde:

$$\alpha_{min} = \arcsen(m)$$

$$m = \frac{E}{\sqrt{2}V}$$

$$\alpha_{max} = \pi - \alpha_{min}$$

La expresión de la corriente en la carga en régimen permanente para $\alpha + \pi/3 \leq \omega t \leq \alpha + 2\pi/3$ y considerando la condición inicial de corriente $i(t_{\alpha+\pi/3}) = I_{min}$, viene dada por:

8.5.2. Solución Homogénea.

$$i(t)_h = k e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi)}} \quad (8.8)$$

donde:

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}$$

8.5.3. Solución Particular Fuente Constante:

$$i(t)_p = -\frac{E}{R} \quad (8.9)$$

8.5.4. Solución Particular (Régimen Sinusoidal Permanente)

Encontrando la corriente en régimen permanente, utilizando fasores obtenemos:

$$i(t)_p = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \quad (8.10)$$

donde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

8.5.5. Solución Total:

Condición inicial del circuito debido a que el tiristor se encuentra abierto o en no conducción:

$$i(t_{\alpha+\pi/3}) = I_{min}$$

$$\begin{aligned}
i(t_{\alpha+\pi/3}) &= I_{min} = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3} - \varphi\right) - \frac{E}{R} + k e^{-\frac{\alpha+\pi/3}{\tan(\varphi)}} \\
&\downarrow \\
k &= \left(I_{min} - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3} - \varphi\right) + \frac{E}{R}\right) e^{\frac{\alpha+\pi/3}{\tan(\varphi)}} \\
&\downarrow \\
i(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin(\omega t - \varphi) - \frac{E}{R} + \left(I_{min} - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3} - \varphi\right) + \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha - \pi/3)}{\tan(\varphi)}}
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Sacando factor común $\sqrt{2}V/Z$ tenemos:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3} - \varphi\right) \right) e^{-\frac{(\omega t - \alpha - \pi/3)}{\tan(\varphi)}} \right] + I_{min} e^{-\frac{(\omega t - \alpha - \pi/3)}{\tan(\varphi)}} \tag{8.12}$$

donde:

$$m = \frac{E}{\sqrt{2}V}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z}$$

Como el puente se encuentra trabajando en régimen permanente, debe satisfacer la condición:

$$i(t) = i(t + T) \tag{8.13}$$

Aplicando la condición de régimen permanente en el punto final del intervalo se puede encontrar el valor de la condición inicial de corriente (I_{min}).

$$i(t_{\alpha+2\pi/3}) = I_{min} \tag{8.14}$$

Sustituyendo la expresión (8.14) en la ecuación (8.12) se obtiene:

$$\begin{aligned}
I_{min} &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3} - \varphi\right)\right) e^{-\frac{(\alpha + \frac{2\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{3})}{\tan(\varphi)}} \right] \\
&\quad + I_{min} e^{-\frac{(\alpha + \frac{2\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{3})}{\tan(\varphi)}} \\
I_{min} \left(1 - e^{-\frac{\pi}{3 \tan(\varphi)}}\right) &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) - \frac{m}{\cos(\varphi)} \right] \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\left(\frac{m}{\cos(\varphi)} - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3} - \varphi\right)\right) e^{-\frac{\pi}{3 \tan(\varphi)}} \right] \\
I_{min} &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\frac{\sin(\alpha + \frac{2\pi}{3} - \varphi) - \sin(\alpha + \frac{\pi}{3} - \varphi) e^{-\frac{\pi}{3 \tan(\varphi)}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{3 \tan(\varphi)}}} \right] - \frac{E}{R}
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Reemplazando la expresión (8.15) en la ecuación (8.12) y simplificando se obtiene la corriente total como:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{1 - e^{-\frac{\pi}{3 \tan(\varphi)}}} e^{-\frac{(\omega t - \alpha - \frac{\pi}{3})}{\tan(\varphi)}} \right] \tag{8.16}$$

Para encontrar la tensión y corriente media y efectiva se aplicaran las definiciones vistas en el capítulo 1.

8.5.6. Tensión Media

$$\begin{aligned}
V_0 &= \frac{3}{\pi} \left[\int_{\alpha + \frac{\pi}{3}}^{\alpha + \frac{2\pi}{3}} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \right] \\
V_0 &= \frac{3}{\pi} \left[\sqrt{2}V - \cos(\omega t) \Big|_{\alpha + \frac{\pi}{3}}^{\alpha + \frac{2\pi}{3}} \right] \\
V_0 &= \frac{3\sqrt{2}V}{\pi} \left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\
V_0 &= \frac{3\sqrt{2}V}{\pi} \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(\alpha) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin(\alpha) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) \\
V_0 &= \frac{3\sqrt{2}V}{\pi} \left(\frac{1}{2} \cos(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cos(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha) \right) \\
V_0 &= \frac{3\sqrt{2}V}{\pi} \cos(\alpha) \\
V_0 &\approx 1,35V \cos(\alpha)
\end{aligned} \tag{8.17}$$

8.5.7. Corriente Media

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{3}{\pi} \int_{\alpha+\frac{\pi}{3}}^{\alpha+\frac{2\pi}{3}} i(t) d\omega t \\
 I_0 &= \frac{3}{\pi} \int_{\alpha+\frac{\pi}{3}}^{\alpha+\frac{2\pi}{3}} \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{1 - e^{-\frac{\pi}{3} \tan(\varphi)}} e^{-\frac{(\omega t - \alpha - \frac{\pi}{3})}{\tan(\varphi)}} \right] d\omega t \\
 I_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\frac{3}{\pi} \int_{\alpha+\frac{\pi}{3}}^{\alpha+\frac{2\pi}{3}} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{1 - e^{-\frac{\pi}{3} \tan(\varphi)}} e^{-\frac{(\omega t - \alpha - \frac{\pi}{3})}{\tan(\varphi)}} \right] d\omega t \right] \\
 I_0 &= \frac{V_0 - E}{R}
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

8.5.8. Tensión Efectiva

$$\begin{aligned}
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{3}{\pi} \int_{\alpha+\frac{\pi}{3}}^{\alpha+\frac{2\pi}{3}} \left(\sqrt{2}V \sin(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{3V^2}{\pi} \int_{\alpha+\frac{\pi}{3}}^{\alpha+\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{3V^2}{\pi} \left(1 - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) \Big|_{\alpha+\frac{\pi}{3}}^{\alpha+\frac{2\pi}{3}}} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{3V^2}{\pi} \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{3} - \frac{\sin(2(\alpha + \frac{\pi}{3}))}{2} + \frac{\sin(2(\alpha + \frac{2\pi}{3}))}{2} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \left(\pi - \frac{\sin(2\alpha + 2\pi)}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right)} \\
 V_{rms} &= \sqrt{2}V \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \cos(2\alpha)}
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

8.5.9. Corriente Efectiva

$$\begin{aligned}
 I_{rms} &= \sqrt{\frac{3}{\pi} \int_{\alpha+\frac{\pi}{3}}^{\alpha+\frac{2\pi}{3}} i(t)^2 d\omega t} \\
 I_{rms} &= \frac{\sqrt{6}V}{Z\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{\alpha+\frac{\pi}{3}}^{\alpha+\frac{2\pi}{3}} \left[\sin(\omega t - \varphi) - \frac{m}{\cos(\varphi)} + \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{1 - e^{-\frac{\pi}{3} \tan(\varphi)}} e^{-\frac{(\omega t - \alpha - \frac{\pi}{3})}{\tan(\varphi)}} \right]^2 d\omega t}
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

8.5.10. Simulación

```

1 % Puente rectificador Trifasico controlado
2 %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \sin(\omega t)$ 
3 % Carga tipo RLE

```

```

4
5
6 % Entrada de datos
7 V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
8 R=input('Resistencia [Ohm] ');
9 L=input('Inductancia [H] ');
10 E=input('Tension de la carga ');
11 f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
12 % Constantes
13 m=E/(sqrt(2)*V)
14 Z=sqrt(R^2+(2*pi*f*L)^2)
15 fi=atan((2*pi*f*L)/R)
16 alfa1=asin(m); % Alfa mínimo
17 alfa2=pi-alfa1; % Alfa máximo
18 disp('Limite de Controlabilidad en grados')
19 [alfa1*180/pi, alfa2*180/pi]
20
21 % Angulo de disparo
22 alfa=input('ángulo de disparo en grados ');
23 alfa=alfa*pi/180;
24 if alfa<alfa1-pi/3
25     alfa=alfa1-pi/3;
26     disp('angulo fuera del limite de controlabilidad se fija alfa_min')
27 end
28
29 % Corriente Mínima
30 Imin=sqrt(2)*V/Z*((sin(alfa+2*pi/3-fi)-sin(alfa+pi/3-fi)*exp(-(pi/3)/tan(fi)))/(1-exp(-(pi/3)/tan(fi))))-E/R
31 % Funciones en el tiempo
32 t=linspace(pi/3+alfa,2*pi/3+alfa,1000);
33 i=(sqrt(2)*V/Z*(sin(t-fi)-m/cos(fi)+(sin(fi-alfa)/(1-exp(-(pi/3)/tan(fi)))-sin(alfa+pi/3-fi))*exp(-(t-alfa-pi/3)/tan(fi))));
34 v=sqrt(2)*V*sin(t);
35
36 % Valores sobre la Carga
37 Io=(3/pi*trapz(t,i))
38 Irms=sqrt(3/pi*trapz(t,i.^2))
39 Vo=1.35*V*cos(alfa)
40 Vrms=sqrt(2)*V*sqrt(1/2+3*sqrt(3)/(4*pi)*cos(2*alfa))
41 % Potencia

```

```

42 PR=R*Irms^2
43 Po=E*Io
44
45
46
47 %Factor de rizado
48 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
49 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
50
51 % Rizo
52 Rizo=0.5*(max(i)-min(i))
53
54 % Graficas
55 figure(1)
56 xp=length(t);
57 t1=linspace(alfa+pi/3, alfa+pi/3+2*pi, 6*length(t));
58 vf=sqrt(2)*V*sin(t1);
59 vx=[v,v,v,v,v,v];
60 ix=[i,i,i,i,i,i];
61 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
62 legend('Fuente','Carga');
63 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
64 xlim([alfa+pi/3 2*pi+alfa+pi/3]);
65 set(gca,'XTick',alfa+pi/3:pi/6:2*pi+alfa+pi/3);
66 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
67 %set(gca,'YTickLabel',' ')
68 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
69 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
70 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
71
72 figure(2)
73 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
74 xlim([alfa+pi/3 2*pi+alfa+pi/3]);
75 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
76 set(gca,'XTick',alfa+pi/3:pi/6:2*pi+alfa+pi/3);
77 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
78 %set(gca,'YTickLabel',' ')
79 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');

```

```

80 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
81
82 ix=zeros(1,1000),i,i,zeros(1,1000),-i,-i];
83 figure(3)
84 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
85 xlim([alfa+pi/3 2*pi+alfa+pi/3]);
86 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
87 set(gca,'XTick',alfa+pi/3:pi/6:2*pi+alfa+pi/3);
88 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
89 %set(gca,'YTickLabel',' ')
90 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
91 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
92
93 %Potencias en la fuente
94 Irms_fuente=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t1,ix.^2))
95 S=sqrt(3)*V*Irms_fuente
96 fp=(PR+Po)/S

```

8.6. Manejador de Disparo de los SCR

En la figura 8.10, se presenta el esquema de un manejador de disparo para los tiristores que componen el puente. Este manejador se basa en tomar una muestra de la tensión de alimentación del rectificador, detectar los cruces por cero de la señal a fin de sincronizar los disparos del SCR, a partir de esta referencia un multiplicador de frecuencia genera seis ondas con un tercio de la frecuencia original. Por otra parte un generador de funciones determina, para el valor de la tensión de corriente continua de referencia y con la limitación del ángulo máximo de disparo, el valor α que satisface el valor de referencia de continua bajo la premisa que la onda de alimentación de rectificador es puramente sinusoidal. Con la tensión de referencia, al ángulo de disparo y las seis ondas de un tercio de la frecuencia, se alimenta un circuito retardador el cual genera un pulso de disparo para cada uno de los tiristores que conforman el puente de acuerdo a su orden de encendido, este pulso se amplifica y se envía a los gate de cada tiristor. El esquema para un puente monofásico es similar con la diferencia que el multiplicador de frecuencia genera dos ondas a la mitad de la frecuencia de la referencia.

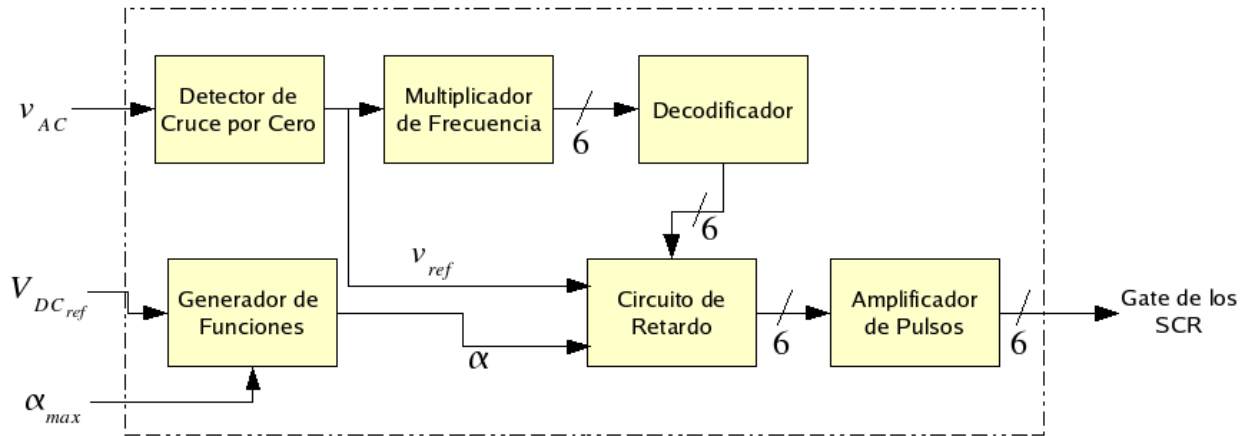


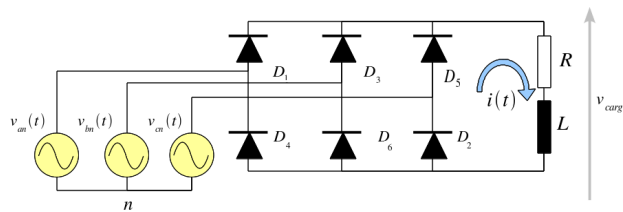
Figura 8.10: Manejador de disparo para tiristores

8.7. Ejemplos

8.7.1. Puente Rectificador de Diodos con Carga RL

En la figura 8.11, se presenta el puente rectificador trifásico de onda completa no controlado con carga resistiva inductiva. Este convertidor es un caso particular del puente rectificador trifásico controlado analizado en la sección 8.5, donde:

$$\begin{aligned} E &= 0 \\ \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

Figura 8.11: Puente rectificador trifásico con carga RL

Sustituyendo las condiciones de la expresión (8.21) en los resultados de la sección 8.5, se obtiene:

- Corriente en régimen permanente para $\frac{\pi}{3} \leq \omega t \leq \frac{2\pi}{3}$:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{1 - e^{-\frac{\pi}{3} \tan(\varphi)}} e^{-\frac{(\omega t - \frac{\pi}{3})}{\tan(\varphi)}} \right] \quad (8.22)$$

■ Tensión Media

$$V_0 = \frac{3}{\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \right] = \frac{3\sqrt{2}V}{\pi} \approx 1,35V \quad (8.23)$$

■ Corriente Media

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{3\sqrt{2}V}{\pi R} \approx 1,35 \frac{V}{R} \quad (8.24)$$

■ Tensión Efectiva

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{3}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sqrt{2}V \sin(\omega t))^2 d\omega t} = \sqrt{2}V \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}} \quad (8.25)$$

■ Corriente Efectiva

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{3}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} i(t)^2 d\omega t} \quad (8.26)$$

8.7.2. Puente Rectificador de Diodos con Carga RC

En la figura 8.12, se presenta un puente rectificador de onda completa trifásico con carga del tipo resistiva capacitiva (RC). El puente está alimentado por una fuente alterna de forma sinusoidal ($v_{ab}(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$).

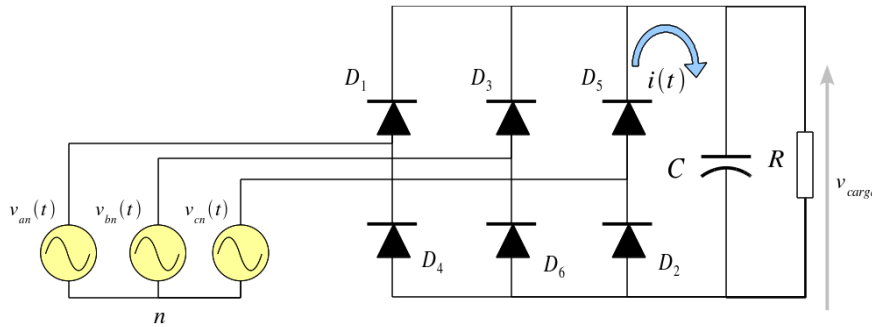


Figura 8.12: Puente rectificador trifásico con carga RC

Analizando el puente rectificador de onda completa de la figura 8.12, se obtiene:

■ Ecuación de corriente:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_{carga}}{dt} + \frac{v_{carga}}{R} \quad (8.27)$$

- Tensión en el intervalo: $\alpha + \frac{\pi}{3} \leq \omega t \leq \beta$

$$v_{carga}(t) = v_{ab}(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t) \quad (8.28)$$

- Sustituyendo la expresión (8.28) en (8.27), se obtiene:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{R} \cdot (\omega CR \cdot \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \quad (8.29)$$

- Definiendo:

$$q = \omega CR \quad (8.30)$$

- Se puede escribir la expresión (8.29) como:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{R} \cdot (q \cdot \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \quad (8.31)$$

- La corriente pasa naturalmente por cero en el ángulo de apagado (β):

$$i\left(\frac{\beta}{\omega}\right) = 0 = \frac{\sqrt{2}V}{R} \cdot (q \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta)) \quad (8.32)$$

- Despejando el ángulo de pagado de la expresión (8.32) y recordando que la solución se encuentra $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi$ por ser una carga resistiva capacitiva, se obtiene:

$$\beta = \pi - \arctan(q) \quad (8.33)$$

- Para encontrar el ángulo de encendido (α) se debe evaluar la corriente sobre la carga cuando el diodo se apaga ($\beta \leq \omega t \leq \alpha + \frac{2\pi}{3}$).

$$i(t) = 0 = C \cdot \frac{dv_{carga}}{dt} + \frac{v_{carga}}{R} \quad (8.34)$$

- Resolviendo la ecuación diferencial (8.34) y evaluando su condición inicial, se obtiene:

$$v_{carga}(t) = \sqrt{2}V \sin(\beta) e^{-\frac{(\omega t - \beta)}{q}} \quad (8.35)$$

- Para encontrar el ángulo de encendido (α) se igual la tensión en la carga en $\alpha + \frac{2\pi}{3}$:

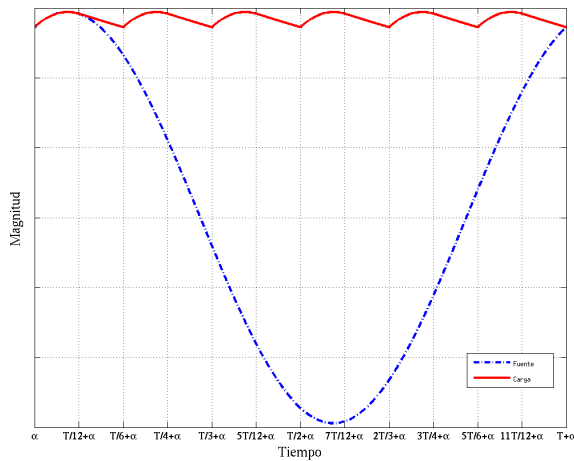
$$\sqrt{2}V \sin(\beta) e^{-\frac{(\alpha + \frac{2\pi}{3} - \beta)}{q}} = -\sqrt{2}V \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (8.36)$$

La ecuación (8.36) no posee respuesta analítica y se debe resolver por métodos numéricos.

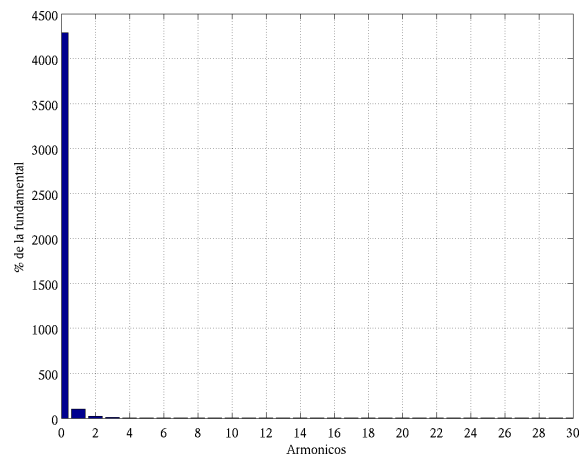
- Tensión media en la carga:

$$V_0 = \frac{3\sqrt{2}V}{\pi} \left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \cos(\beta) + q \cdot \sin(\beta) \cdot \left(1 - e^{-\frac{(\frac{\pi}{3} + \alpha - \beta)}{q}}\right) \right) \quad (8.37)$$

En las figuras 8.13 y 8.14, se presenta la forma de onda de tensión y corriente sobre la carga con su respectivo contenido armónico. Adicionalmente, en la figura 8.15, se muestra la corriente en la fuente de alimentación con su respectivo contenido armónico.

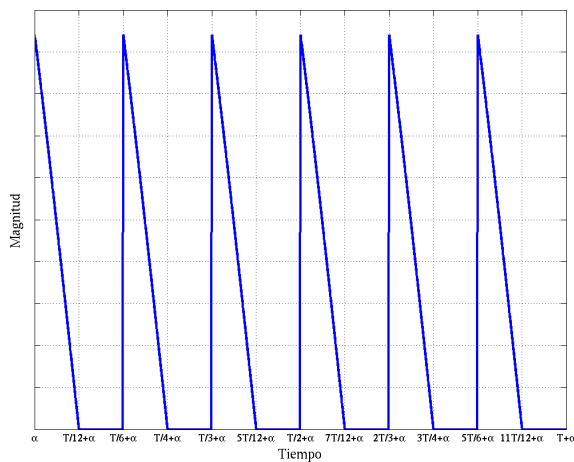


(a) Forma de onda

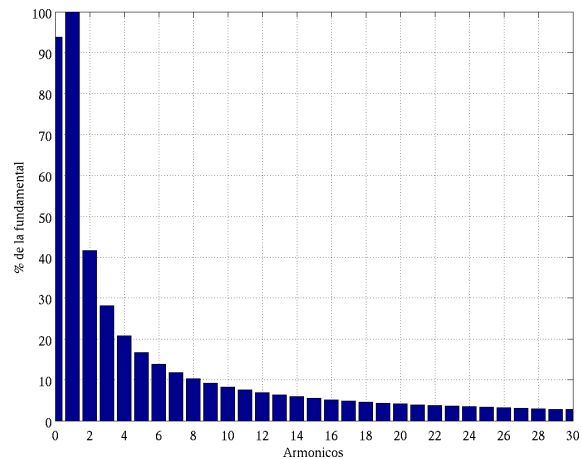


(b) Contenido armónico

Figura 8.13: Tensión en la carga RC



(a) Forma de onda



(b) Contenido armónico

Figura 8.14: Corriente en la carga RC

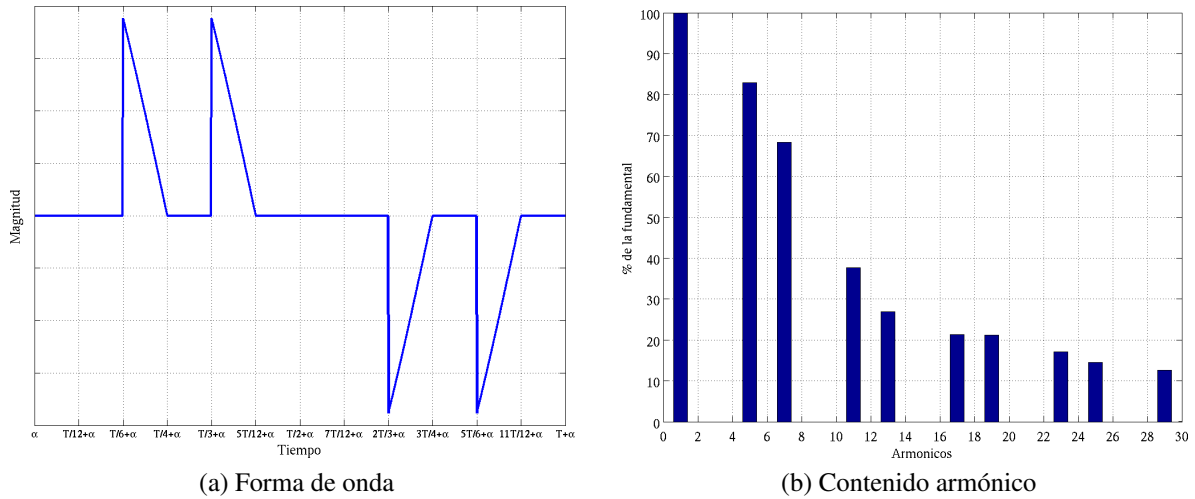


Figura 8.15: Corriente en la fase “a” para una carga RC del puente trifásico

8.7.2.1. Simulación

```

1  % Media Onda No Controlado con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \text{sen}(\omega t)$ 
3  % Carga tip RC
4
5  % Entrada de datos
6  V=input('Tension efectiva línea a línea de la fuente sinusoidal ');
7  R=input('Resistencia [Ohm] ');
8  C=input('Capacitancia [F] ');
9  f=60; %input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
10
11
12  % Parámetros
13  q=2*pi*f*R*C;
14  % Angulo de apagado
15  b=pi - atan(q)
16  % Angulo de encendido
17  a=fsolve(@(t) sin(b)*exp(-(-b+t+2*pi/3)/q)+sin(t+2*pi/3-4*pi/3)
18      , [0.001])
19
20  % Función en el tiempo
21  t1=linspace(a+pi/3,b,500);
22  v1=sqrt(2)*V*sin(t1);
23  i1=sqrt(2)*V/R*(q*cos(t1)+sin(t1));

```

```

23 t2=linspace(b,a+2*pi/3,500);
24 v2=sqrt(2)*V*sin(b)*exp(-(t2-b)/q);
25 i2=zeros(size(t2));
26 t=[t1,t2];
27 v=[v1,v2];
28 i=[i1,i2];
29 gama=b-a
30
31 % Valores Medios
32 Io=3/(pi)*trapz(t,i)
33 Vo=3/(pi)*trapz(t,v)
34
35
36 % Valores Efectivos
37 Irms=sqrt(3/(pi)*trapz(t,i.^2))
38 Vrms=sqrt(3/(pi)*trapz(t,v.^2))
39
40 %Factor de rizado
41 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
42 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
43
44 % Rizado de tensión
45 Dv=(sqrt(2)*V-sqrt(2)*sin(b)*V)/2
46
47
48 % Graficas
49 figure(1)
50 xp=length(t);
51 alfa=a;
52 t1=linspace(alfa+pi/3,alfa+pi/3+2*pi,6*length(t));
53 vf=sqrt(2)*V*sin(t1);
54 vx=[v,v,v,v,v,v];
55 ix=[i,i,i,i,i,i];
56 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
57 legend('Fuente','Carga');
58 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
59 xlim([alfa+pi/3 2*pi+alfa+pi/3]);
60 set(gca,'XTick',alfa+pi/3:pi/6:2*pi+alfa+pi/3);
61 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})

```

```

62 set(gca,'YTickLabel',{' '})
63 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
64 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
65 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
66
67 figure(2)
68 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
69 xlim([alfa+pi/3 2*pi+alfa+pi/3]);
70 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
71 set(gca,'XTick',alfa+pi/3:pi/6:2*pi+alfa+pi/3);
72 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
73 set(gca,'YTickLabel',{' '})
74 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
75 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
76
77 ix=[zeros(1,1000),i,i,zeros(1,1000),-i,-i];
78 figure(3)
79 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
80 xlim([alfa+pi/3 2*pi+alfa+pi/3]);
81 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
82 set(gca,'XTick',alfa+pi/3:pi/6:2*pi+alfa+pi/3);
83 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
84 set(gca,'YTickLabel',{' '})
85 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
86 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
87
88 %Potencias en la fuente
89 Irms_fuente=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t1,ix.^2))
90 S=sqrt(3)*V*Irms_fuente

```

8.7.3. Puente Rectificador de Diodos con filtro *LC* y Carga *RL*

En la figura 8.16, se presenta el puente rectificador trifásico de onda completa no controlado con filtro *LC* en la barra de corriente continua y carga resistiva inductiva.

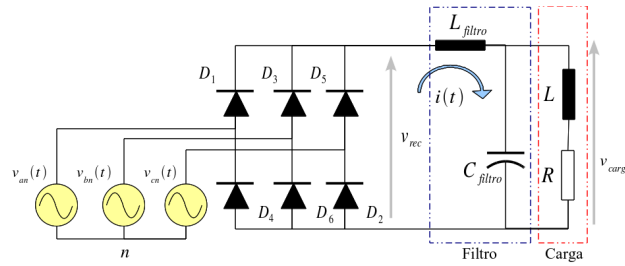


Figura 8.16: Puente rectificador trifásico con filtro LC y carga RL

Para analizar el convertidor de la figura 8.16, se utilizara la técnica de resolución de circuitos mediante series de Fourier. La forma de onda de la tensión v_{rec} en los bornes del filtro se muestra en la figura 8.17, esta tensión se puede representar como series de Fourier como:

$$v_{rec}(t) = \frac{v_0}{2} + \Re_e \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} \right) \quad (8.38)$$

donde:

$$v_n = \frac{3}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{2}V \sin(\omega t) e^{jn\omega t} d\omega t \quad (8.39)$$

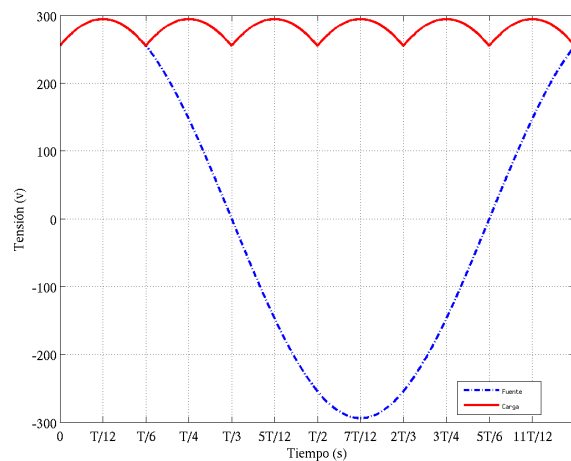


Figura 8.17: Forma de onda de tensión en la barra DC v_{rec}

Calculando v_n de la expresión (8.39), se obtiene:

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{3}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sqrt{2}V}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{j6n\omega t} d\omega t \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \cdot V \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (e^{j(6n+1)\omega t} - e^{j(6n-1)\omega t}) d\omega t \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \cdot V \cdot \left(\frac{e^{j(6n-1)\omega t}}{6n-1} - \frac{e^{j(6n+1)\omega t}}{6n+1} \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\
&= \frac{3\sqrt{2}V}{\pi} \cdot \left(\frac{e^{j(6n-1)\frac{2\pi}{3}} - e^{j(6n-1)\frac{\pi}{3}}}{6n-1} - \frac{e^{j(6n+1)\frac{2\pi}{3}} - e^{j(6n+1)\frac{\pi}{3}}}{6n+1} \right) \quad \forall n
\end{aligned} \tag{8.40}$$

Para calcular la corriente $i(t)$ suministrada por el rectificador al filtro se utiliza el cálculo de la serie de Fourier de corriente a partir de la tensión.

$$i(t) = \frac{v_o}{2R} + \Re_e \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{Z_n} e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} \right) \tag{8.41}$$

donde:

$$\begin{aligned}
Z_n &= (R + jn\omega L) \parallel \frac{1}{j\omega C_{filtro}} + j\omega L_{filtro} \\
Z_n &= j\omega L_{filtro} + \frac{R + jn\omega L}{jRC_{filtro}n\omega - (n\omega)^2 LC_{filtro} + 1} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{8.42}$$

La tensión sobre la carga ($v_{carga}(t)$) se puede calcular a partir de la serie de Fourier de tensión en el rectificador ($v_{rec}(t)$) utilizando divisor de tensión como:

$$v_{carga}(t) = \frac{v_o}{2} + \Re_e \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot Z_{1n} e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} \right) \tag{8.43}$$

donde:

$$Z_{1n} = \frac{(R + jn\omega L) \parallel \frac{1}{j\omega C_{filtro}}}{Z_n} \tag{8.44}$$

A partir de la serie de Fourier de tensión sobre la carga de la expresión (8.43), dividiendo sobre la impedancia armónica de la carga ($Z_{carga} = R + jn\omega L$) se puede obtener la serie de Fourier de la corriente por la carga.

$$i_{carga}(t) = \frac{v_o}{2R} + \Re_e \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot \frac{Z_{1n}}{Z_{carga}} e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} \right) \quad (8.45)$$

En la figura 8.18, se presenta la corriente $i(t)$, $i_{carga}(t)$ e $i_f(t)$ para el puente de la figura 8.16, con $R = 50\Omega$, $L = 15mH$, $L_{filtro} = 100mH$, $C_{filtro} = 200\mu F$ y una tensión efectiva de $208V$ a $60Hz$. En la figura 8.19, se presenta la tensión en la carga RL .

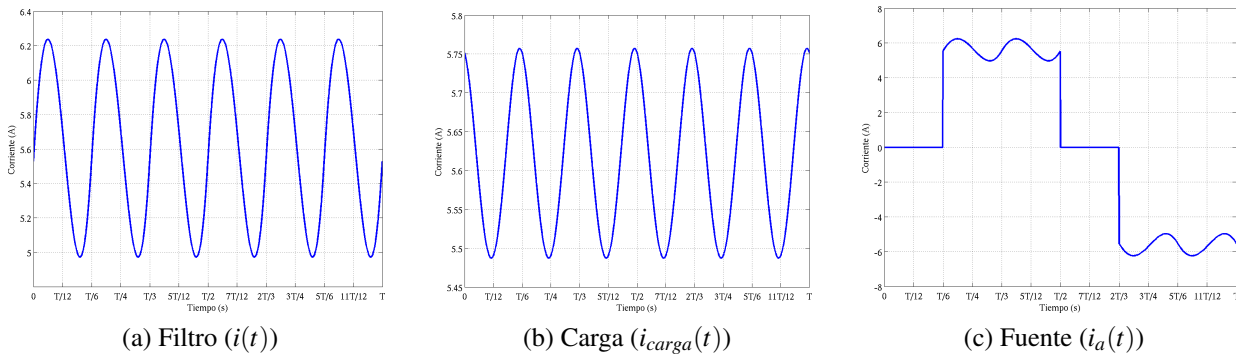


Figura 8.18: Corrientes en el rectificador con filtro LC

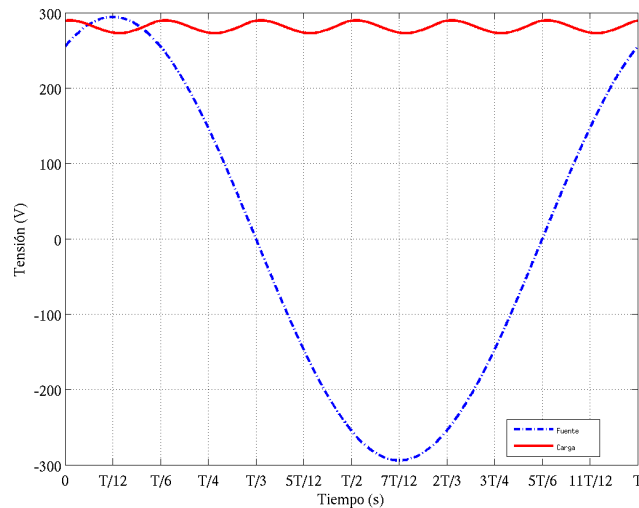


Figura 8.19: Tensión en la carga

8.7.3.1. Simulación

```

1  % Onda Completa Controlado Monofásico con fuente sinusoidal
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} \cdot v \cdot \text{sen}(\omega t)$ 
3  % Carga tip  $RL$  con filtro  $LC$ 
4  clear
5  % Entrada de datos

```

```

6  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
7  R=input('Resistencia de carga [Ohm] ');
8  L2=input('Inductancia de carga [H] ');
9  L=input('Inductancia de filtro [H] ');
10 C=input('Capacitancia del filtro [F] ');
11 f=60; %input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
12 w=2*pi*f;
13
14 % Coeficientes serie de Fourier Tensión
15 n=0:49;
16 for i=1:length(n)
17  cn(i)=3*sqrt(2)*V/pi*(1/(6*n(i)-1)*(exp(j*(6*n(i)-1)*2*pi/3)-exp(j
      *(6*n(i)-1)*pi/3))-1/(6*n(i)+1)*(exp(j*(6*n(i)+1)*2*pi/3)-exp(j
      *(6*n(i)+1)*pi/3)));
18  end
19  cn(1)=cn(1)/2;
20
21
22 % Valores Medios
23 Vo=cn(1)
24 Io=Vo/R
25
26 % Armonicas
27 n=1:49;
28 ln=length(n);
29 t=linspace(pi/(3*w),2*pi/(3*w),1000);
30 T=(t(length(t))-t(1));
31 vrec(1,:)=Vo*ones(size(t));
32 is(1,:)=Io*ones(size(t));
33 vr(1,:)=Vo*ones(size(t));
34 ic(1,:)=Io*ones(size(t));
35
36 for i=1:ln
37  s=j*n(i)*w;
38  % Filtro LC Caga RL
39  Zs=((s^2*C*L+1)*R+(s^3*C*L+s)*L2+s*L)/(s*C*R+s^2*C*L2+1);
40  Z1=(R+s*L2)/((s^2*C*L+1)*R+(s^3*C*L+s)*L2+s*L);
41  Zc=R+s*L;
42
43  vrec(i+1,:)=real(cn(i+1)*exp(-j*2*pi/T*n(i)*t));

```

```

44     is(i+1,:)=real(cn(i+1)/Zs*exp(-j*2*pi/T*n(i)*t));
45     vr(i+1,:)=real(cn(i+1)*Z1*exp(-j*2*pi/T*n(i)*t));
46     ic(i+1,:)=real(cn(i+1)*Z1/Zc*exp(-j*2*pi/T*n(i)*t));
47 end
48
49 % Sumatoria
50 i=sum(is);
51 v=sum(vrec);
52 vcarga=sum(vr);
53 icarga=sum(ic);
54 t=t*w;
55
56 % Valores medios en la carga
57 Vo_carga=3/pi*trapz(t,vcarga);
58 Io_carga=3/pi*trapz(t,icarga)
59
60 % Rizo
61 Rizoi_rec=0.5*(max(i)-min(i))
62 Rizov_carga=0.5*(max(vcarga)-min(vcarga))
63 Rizoi_carga=0.5*(max(icarga)-min(icarga))
64 %
65 % Valores Efectivos
66 Irms_rec=sqrt(3/(pi)*trapz(t,i.^2))
67 Vrms_rec=sqrt(3/(pi)*trapz(t,v.^2))
68 Vrms_carga=sqrt(3/(pi)*trapz(t,vcarga.^2))
69 Irms_carga=sqrt(3/(pi)*trapz(t,icarga.^2))
70 %
71 % Potencia
72 S=sqrt(3)*V*Irms_rec % Fuente
73 Pcarga=Irms_carga^2*R
74 fp=(Pcarga)/S
75 %
76 %Factor de rizado
77 FR_i_rec=sqrt(Irms_rec^2-Io_carga^2)/Io
78 FR_v_rec=sqrt(Vrms_rec^2-Vo_carga^2)/Vo
79 FR_v_carga=sqrt(Vrms_carga^2-Vo_carga^2)/Vo_carga
80 FR_i_carga=sqrt(Irms_carga^2-Io_carga^2)/Io_carga
81 %
82
83 % Graficas

```

```

84 figure(1) % Tensión en el filtro
85 xp=length(t);
86 t1=linspace(pi/3,pi/3+2*pi,6*length(t));
87 vf=sqrt(2)*V*sin(t1);
88 vx=[v,v,v,v,v,v];
89 ix=[i,i,i,i,i,i];
90 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
91 legend('Fuente','Carga','Location','Best');
92 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Times');
93 xlim([pi/3 2*pi+pi/3]);
94 set(gca,'XTick',pi/3:pi/6:2*pi+pi/3);
95 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
96 %set(gca,'YTickLabel',' ')
97 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
98 ylabel('Tensión (v)','fontsize',14,'fontname','Times');
99 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
100
101 figure(2) % Corriente en el filtro
102 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
103 xlim([pi/3 2*pi+pi/3]);
104 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Times');
105 set(gca,'XTick',pi/3:pi/6:2*pi+pi/3);
106 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
107 %set(gca,'YTickLabel',' ')
108 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
109 ylabel('Corriente (A)','fontsize',14,'fontname','Times');
110
111 ix=[zeros(1,1000),i,i,zeros(1,1000),-i,-i];
112 figure(3) % Corriente en la fase .a"
113 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
114 xlim([pi/3 2*pi+pi/3]);
115 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Times');
116 set(gca,'XTick',pi/3:pi/6:2*pi+pi/3);
117 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
118 %set(gca,'YTickLabel',' ')
119 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
120 ylabel('Corriente (A)','fontsize',14,'fontname','Times');

```

```

121
122 % Primera Armónica en la fase .a"
123 Irms_f_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1)))/sqrt(2)
124
125 % THD en corriente Fase .a"
126 THDi_f=sqrt(Irms_rec^2-Irms_f_1^2)/Irms_f_1
127
128 v=vcarga;
129 i=icarga;
130 vx=[v,v,v,v,v,v];
131 ix=[i,i,i,i,i,i];
132 figure(4) %Tensión en la carga
133 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
134 legend('Fuente','Carga','Location','Best');
135 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Times');
136 xlim([pi/3 2*pi+pi/3]);
137 set(gca,'XTick',pi/3:pi/6:2*pi+pi/3);
138 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
139 %set(gca,'YTickLabel',' ')
140 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
141 ylabel('Tensión (V)','fontsize',14,'fontname','Times');
142 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
143
144 figure(5) %Cooriente en la carga
145 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
146 xlim([pi/3 2*pi+pi/3]);
147 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Times');
148 set(gca,'XTick',pi/3:pi/6:2*pi+pi/3);
149 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
150 %set(gca,'YTickLabel',' ')
151 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
152 ylabel('Corriente (A)','fontsize',14,'fontname','Times');

```

8.8. Ejercicios

1. Se utiliza un generador de $V_{l-l} = 480V$ a $60Hz$ para alimentar a un rectificador trifásico no controlado. La carga RL es de 120Ω en serie con $35mH$. Determine: La corriente media y eficaz de la carga y diodos. La corriente eficaz del generador y el factor de potencia.
2. Se tiene un rectificador trifásico controlado con lazo de control PI que mantiene la tensión de continua sobre la carga constante. Por una falla del sistema eléctrico el fusible de la fase “a” se quema abriendo esta fase (No puede circular corriente por esta fase). Determine si el puente es capaz de seguir operando y en que rango de tensiones se puede mantener la operación del puente. En esta condición comente que impacto tendrá sobre la carga y el sistema la falla en la alimentación del puente.
3. Se utiliza un generador de $380V$ efectivos línea a línea a $50Hz$ para alimentar a un rectificador trifásico controlado con un ángulo de disparo de $0,5236rad$. El rectificador alimenta una carga RL serie de 90Ω y $150mH$. Determine:
 - a) La corriente media y eficaz de la carga.
 - b) La corriente media y eficaz de los diodos.
 - c) La corriente eficaz del generador.
 - d) El factor de potencia en el generador.
 - e) Potencia disipada por la carga.
 - f) Determine el valor de inductancia L adicional para que el factor de rizado sea menor del 2% de la corriente de la carga.
4. Se utiliza un generador de $416V$ efectivos línea a línea para alimentar un rectificador trifásico controlado. El ángulo de disparo es de 35° y la carga es RL de 50Ω y $50mH$. Determine:
 - a) La corriente media por la carga.
 - b) La amplitud de la sexta armónica de corriente.
 - c) La corriente efectiva por las líneas del generador
5. Para el puente de la figura 8.20 determine las expresiones de corriente en régimen permanente, condición de operación, límite de controlabilidad, tensión y corriente media y efectiva.

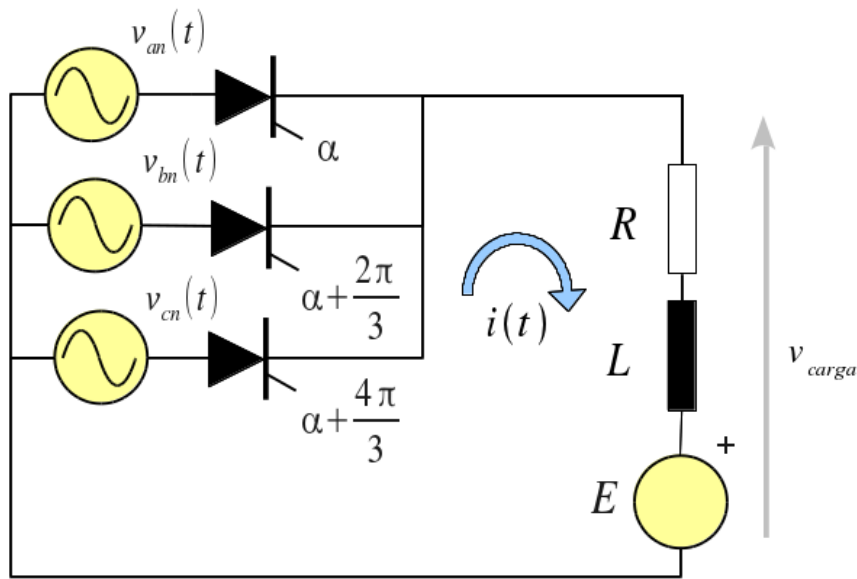


Figura 8.20: Ejercicio 5

6. Explique las ventajas y desventajas de un rectificador de 12 pulsos al compararlo con un rectificador monofásico o trifásico de onda completa.
7. Para el puente de la figura 8.21 determine las expresiones de corriente en régimen permanente, condición de operación, límite de controlabilidad, tensión y corriente media y efectiva.

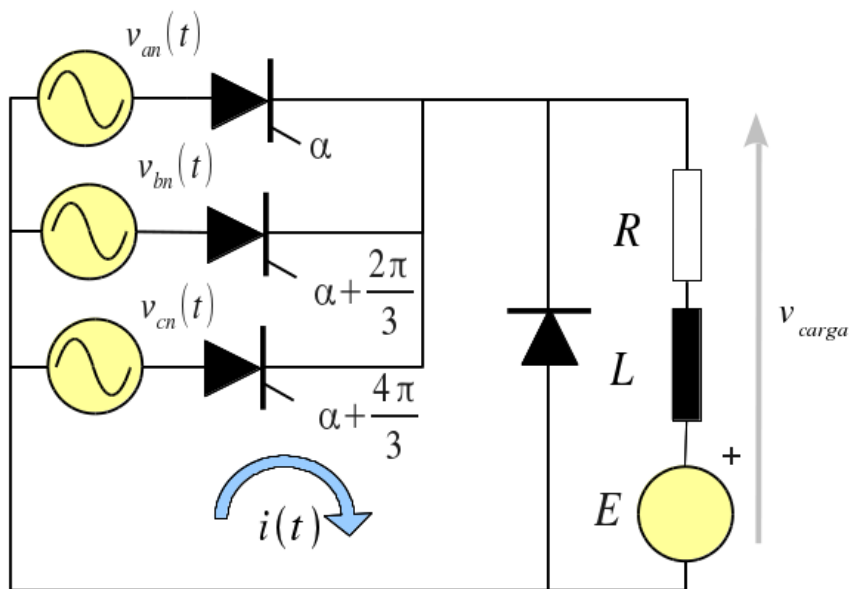


Figura 8.21: Ejercicio 7

Efecto de la Inductancia del Generador en los Rectificadores

9.1. Aspectos Generales

En este capítulo se analizará el efecto sobre la tensión de la carga que produce considerar la inductancia de la fuente sobre los rectificadores de media onda, monofásicos y trifásicos. Esta inductancia se debe al hecho de considerar la fuente no ideal, para este caso donde se analizan los sistemas de potencia, el parámetro de mayor importancia del modelo de la fuente es su inductancia asociada. Adicionalmente, si consideramos el modelo Thévening del sistema para evaluar el impacto del rectificador sobre el sistema de potencia, este está representado por una fuente y una reactancia.

La mayoría de los rectificadores no controlados y controlados son alimentados por un transformador que adecua el nivel de tensión a los requerimientos de la carga. En la figura 9.1, se presenta el modelo "T" del transformador obtenido mediante las pruebas de cortocircuito y vacío.

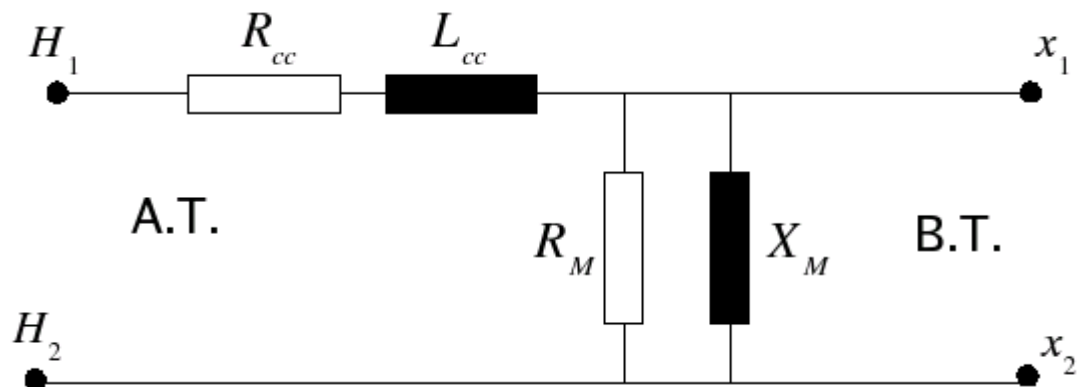


Figura 9.1: Modelo "T" del transformador

En sistemas de potencia debido a que la corriente consumida por la rama de magnetización es menor al 1 % de la nominal del transformador se tiende a despreciar su efecto el cual no repercute noto-

riamente sobre su punto de operación. Adicionalmente, la resistencia de la rama de cortocircuito se tiende a despreciar debido a que su valor es mucho menor que la reactancia. Esta aproximación del modelo del transformador en sistemas de potencia es utilizada para los cálculos de nivel de cortocircuito, estabilidad y flujo de carga. El fabricante del transformador suministra el valor de la reactancia de cortocircuito en la placa de identificación del convertidor electromecánico. El valor de la reactancia es suministrado en porcentaje (%) o por unidad (*p.u.*) de la base de impedancia del transformador (Z_{base}). Este valor en transformadores de potencia oscila entre un 6% y 12% de la base de impedancia del transformador.

$$Z_{[\Omega]} = \frac{X_{[\%]} \cdot Z_{base}}{100} = X_{[p.u.]} \cdot Z_{base} \quad (9.1)$$

donde:

$$Z_{base} = \frac{V_n^2}{S_T} \quad (9.2)$$

Por otra parte los conductores que premien acoplar el rectificador a la fuente de poder o al transformador, poseen una inductancia la cual se puede estimar a partir del calibre y distancia del conductor o ser asumida para los sistemas de baja tensión ($< 600V$) en $0,1 \frac{\mu H}{m}$ por fase.

9.2. Rectificador de Media Onda

En la figura 9.2, se presenta el esquema del rectificador de media onda con diodo de descarga libre con carga resistiva inductiva. El valor de la inductancia de la carga (L) garantiza que el cociente entre la corriente media y efectiva tiende a la unidad, es decir $I_o/I_{rms} \approx 1$. La tensión de alimentación del circuito es $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$.

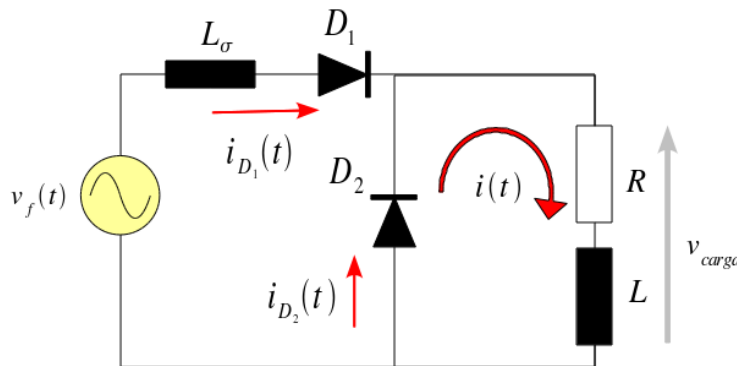


Figura 9.2: Rectificador de media onda

En la figura 9.3, se presenta la forma de onda de la corriente por la carga y los diodos D_1 y D_2 en régimen permanente. En la figura 9.4 se muestra la forma de onda de tensión sobre la carga.

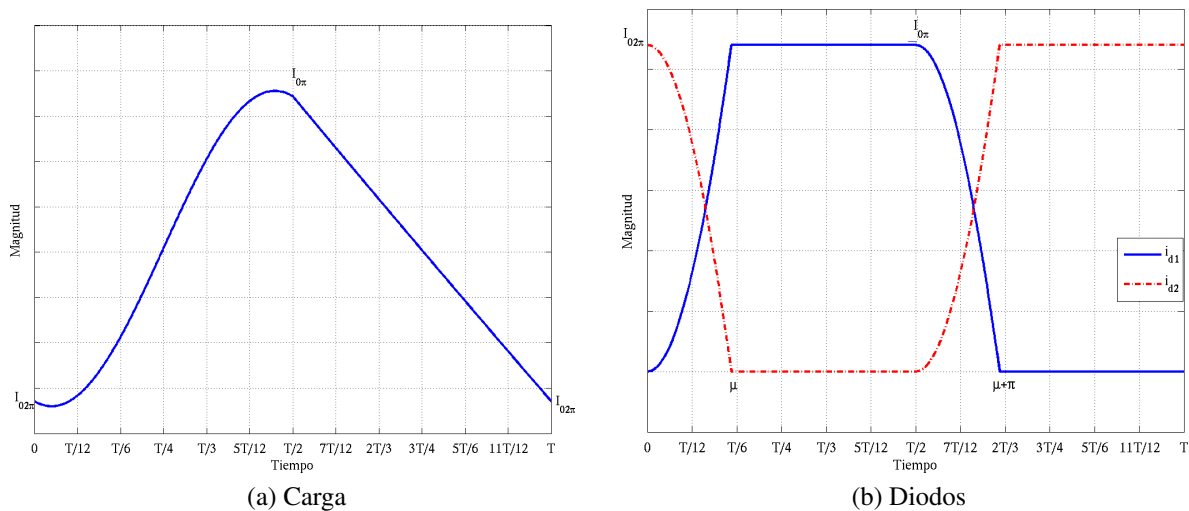


Figura 9.3: Forma de onda de corriente

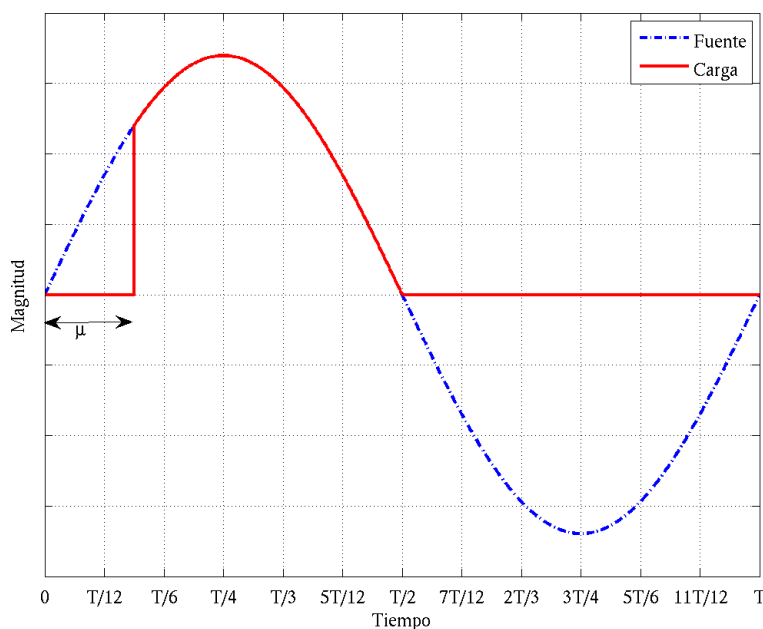


Figura 9.4: Forma de onda de tensión sobre la carga

9.2.1. Análisis del proceso de conmutación

Durante el proceso de conmutación ambos diodos D_1 y D_2 se encuentran encendidos, esta condición se mantiene hasta que la corriente por el diodo que este conmutando pase por cero. Para estudiar el fenómeno de conmutación, se analizará $t = 0$ donde el diodo D_1 está en el proceso de

encendido y D_2 en apagado. Con ambos diodos encendidos se produce un cortocircuito en la fuente y la corriente en esta viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= L_\sigma \frac{di_{D_1}}{dt} \\ \int_0^{\omega t} di_{D_1} &= \int_0^{\omega t} \frac{\sqrt{2}V}{\omega L_\sigma} \sin(\omega t) d\omega t \\ i_{D_1}(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L_\sigma} (1 - \cos(\omega t)) + i_{D_1}(0) \end{aligned} \quad (9.3)$$

La corriente en el diodo D_2 se puede calcular como:

$$\begin{aligned} i_{D_2}(t) &= i(t) - i_{D_1}(t) \\ &= I_o - \frac{\sqrt{2}V}{\omega L_\sigma} (1 - \cos(\omega t)) + \cancel{i_{D_1}(0)}^0 \end{aligned} \quad (9.4)$$

Al finalizar el tiempo de conmutación (t_μ) el diodo D_1 está encendido y asume la totalidad de la corriente por la carga, es decir $i_{D_1}(t_\mu) = I_o$ y la corriente en el diodo D_2 es cero. Evaluando la expresión (9.4) en el ángulo de conmutación $\mu = \omega t_\mu$, se obtiene:

$$\begin{aligned} i_{D_2}(t_\mu) &= I_o - \frac{\sqrt{2}V}{\omega L_\sigma} (1 - \cos(\mu)) \Rightarrow \cos(\mu) = 1 - \frac{I_o \omega L_\sigma}{\sqrt{2}V} \\ \mu &= \arccos \left(1 - \frac{I_o \omega L_\sigma}{\sqrt{2}V} \right) \end{aligned} \quad (9.5)$$

La tensión media sobre la carga al considerar la conmutación, se obtiene como:

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{1}{2\pi} \int_\mu^\pi \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \\ &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\mu) - \cos(\pi)) \\ &= \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (\cos(\mu) + 1) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Sustituyendo el valor de $\cos(\mu)$ de la expresión (9.5) en la ecuación de tensión media (9.6), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 V_o &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left(1 - \frac{I_o \omega L_\sigma}{2\sqrt{2}V} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} - \frac{I_o \omega L_\sigma}{2\pi}
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

9.2.2. Corriente en la carga

La corriente $i(t)$ por la carga en régimen permanente se puede calcular como:

Para $0 \leq \omega t \leq \pi$:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z_1} \left(\sin(\omega t - \varphi_1) + \sin(\varphi_1) e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi_1)}} \right) + I_{02\pi} e^{-\frac{\omega t}{\tan(\varphi_1)}} \tag{9.8}$$

donde:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (\omega(L_\sigma + L))^2}$$

$$\varphi_1 = \arctan \left(\frac{\omega(L_\sigma + L)}{R} \right)$$

Para $\pi \leq \omega t \leq 2\pi$:

$$i(t) = I_{0\pi} e^{-\frac{\omega t - \pi}{\tan(\varphi)}} \tag{9.9}$$

donde:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\omega L}{R} \right)$$

Corriente $I_{0\pi}$ e $I_{02\pi}$:

$$I_{02\pi} = \frac{\sqrt{2}V}{Z_1} \frac{\sin(\varphi_1) \left(1 + e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi_1)}} \right)}{e^{\frac{\pi}{\tan(\varphi_1)}} - e^{-\frac{\pi}{\tan(\varphi_1)}}} \tag{9.10}$$

$$I_{0\pi} = I_{02\pi} e^{\frac{\pi}{\tan(\varphi_1)}} \tag{9.11}$$

9.2.3. Simulación

```

1  % Programa para Diodo de descarga libre con fuente de la forma
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \text{sen}(\omega t)$ 
3  % Carga tip  $RL$ 
4
5  % Entrada de datos
6  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
7  R=input('Resistencia [Ohm] ');
8  L=input('Inductancia de la carga [H] ');
9  Ls=input('Inductancia de la fuente [H] ');
10 f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
11
12 % Parámetros
13 fi=atan(2*pi*f*(L+Ls)/R);
14 Z=sqrt((2*pi*f*(L+Ls))^2+R^2);
15 Io=sqrt(2)*V/(pi*R)
16
17 mu=acos(1-Io*2*pi*Ls/(sqrt(2)*V))
18 t1=linspace(0,mu,100);
19 id1_0=sqrt(2)*V/(2*pi*Ls)*(1-cos(t1));
20 id2_0=Io-id1_0;
21 t2=linspace(mu,pi,400);
22 id1_1=Io*ones(size(t2));
23 id2_1=Io*zeros(size(t2));
24 t3=linspace(pi,pi+mu,100);
25 id1_2=Io+sqrt(2)*V/(2*pi*Ls)*(cos(pi)-cos(t3));
26 id2_2=Io-id1_2;
27 t4=linspace(mu+pi,2*pi,400);
28 id1_3=Io*zeros(size(t2));
29 id2_3=Io*ones(size(t2));
30 t=[t1,t2,t3,t4];
31 id1=[id1_0,id1_1,id1_2,id1_3];
32 id2=[id2_0,id2_1,id2_2,id2_3];
33 v=[zeros(size(t1)),sqrt(2)*V*sin(t2),zeros(size(t3)),zeros(size(t4))
    ];
34
35 % Tensión media y efectiva
36 Vo=1/(2*pi)*trapz(t,v)
37 Vrms=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,v.^2))

```

```

38
39 %Factor de rizado
40 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
41 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
42 %
43
44
45 % Graficas
46 figure(1)
47 vf=sqrt(2)*V*sin(t);
48 ix=[id1,id2];
49 plot(t,vf,'-.',t,v,'r','LineWidth',2);grid
50 legend('Fuente','Carga');
51 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
52 xlim([0 2*pi]);
53 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
54 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'});
55 set(gca,'YTickLabel',{' '})
56 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
57 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
58
59 figure(2)
60 subplot(2,1,1)
61 plot(t,id1,'LineWidth',2);grid
62 xlim([0 2*pi]);
63 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
64 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
65 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'});
66 set(gca,'YTickLabel',{' '})
67 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
68 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
69 legend('i_d_1')
70 subplot(2,1,2)
71 plot(t,id2,'LineWidth',2);grid
72 xlim([0 2*pi]);
73 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
74 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);

```

```

75 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
76 set(gca,'YTickLabel',{' '})
77 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
78 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
79 legend('i_d_2')
80
81 figure(5)
82 % Gráficas
83 plot(t,id1,t,id2,'-.r','LineWidth',2);grid
84 legend('i_d_1','i_d_2')
85 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
86 xlim([0 2*pi]);
87 set(gca,'XTick',0:pi/6:2*pi);
88 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
89 set(gca,'YTickLabel',{' '})
90 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
91 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');

```

9.3. Rectificador Monofásico

En la figura 9.5, se presenta el esquema de un rectificador no controlado monofásico con carga resistiva inductiva y una inductancia de fuente. El valor de la inductancia de la carga garantiza que el cociente entre la corriente media y efectiva de la carga sea tendiente a la unidad.

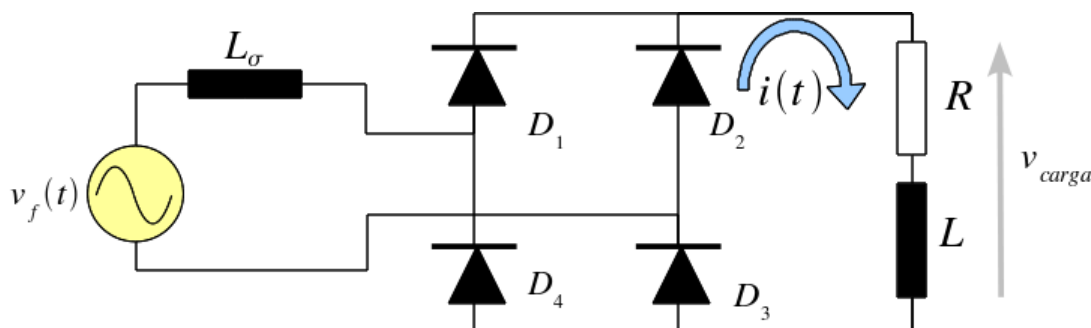


Figura 9.5: Puente rectificador monofásico con inductancia en la fuente

La inductancia de la fuente origina que al cambiar la polaridad de la tensión del generador, la corriente del mismo no podrá cambiar instantáneamente y deberá ser transferida paulatinamente

entre los diodos D_1, D_3 y D_2, D_4 . El periodo de tiempo durante el cual se realiza el proceso de transferencia de corriente entre los dos pares de diodos se denomina intervalo de conmutación y es denotado con la letra " μ ". Durante el proceso de conmutación los cuatro diodos que conforman el rectificador permanecen encendidos originando dos cortocircuitos, uno a nivel de la carga de la barra de continua y otro a nivel de la fuente. La corriente de cortocircuito de la fuente es únicamente limitada por la inductancia L_σ .

En la figura 9.6, se presenta el oscilograma de tensión en la barra de corriente continua y la corriente por el diodo número 1 y de la fuente de alterna, destacando el intervalo de conmutación del puente.

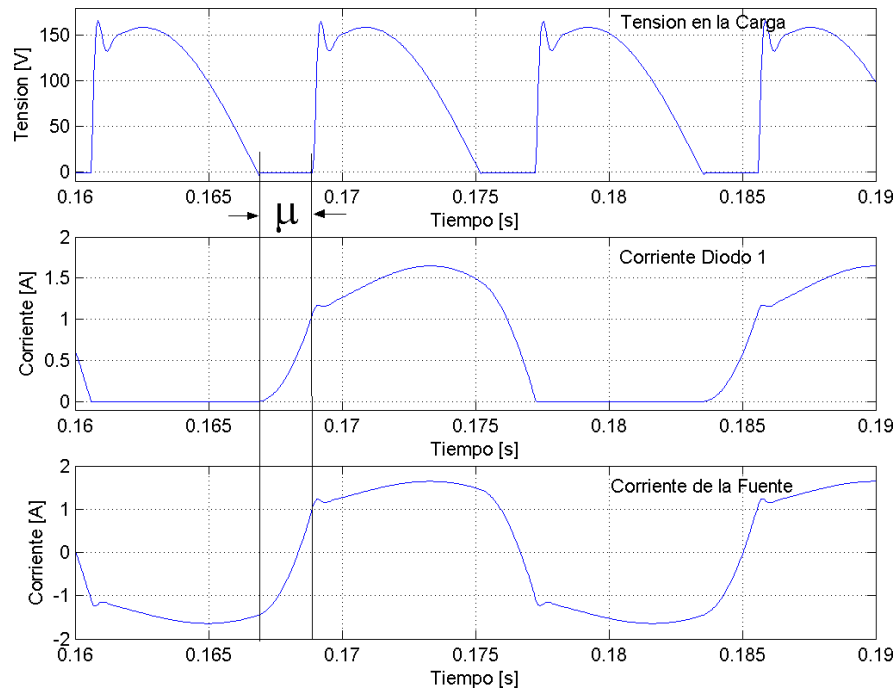


Figura 9.6: Tensión en la barra de continua y corriente durante el proceso de conmutación

En la figura 9.6, se puede observar que durante la conmutación la tensión en la barra de corriente continua cae a cero disminuyendo el valor de tensión media obtenida del rectificador.

9.3.1. Análisis del Proceso de Conmutación

Supongamos que el puente de la figura 9.5, se alimenta de una fuente de tensión sinusoidal de la forma $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$ y que la corriente en la carga es constante y de valor I_0 . La condición inicial de corriente en la inductancia de la fuente L_σ y en la fuente durante la conmutación de los diodos D_1, D_3 a D_2, D_4 es $+I_0$ y llega a $-I_0$ transcurrido el tiempo de conmutación. El intervalo de conmutación comienza cuando cambia la polaridad de la fuente para $t = T/2$. Durante la conmutación la corriente en la fuente viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
i_f(t) &= \frac{1}{\omega L_\sigma} \int_{\pi}^{\omega t} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t + I_0 \\
i_f(t) &= \frac{\sqrt{2}V}{\omega L_\sigma} (-\cos(\omega t)|_{\pi}^{\omega t}) + I_0 \\
i_f(t) &= -\frac{\sqrt{2}V}{\omega L_\sigma} (1 + \cos(\omega t)) + I_0
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Evaluando la expresión (9.12) al finalizar el intervalo de conmutación ($\omega t = \pi + \mu$) y despejando el ángulo de conmutación μ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
i_f(t_{\pi+\mu}) &= -I_0 = -\frac{\sqrt{2}V}{\omega L_\sigma} (1 + \cos(\pi + \mu)) + I_0 \\
\cos(\pi + \mu) &= 1 - \frac{2I_0\omega L_\sigma}{\sqrt{2}V} \\
\mu &= \arccos\left(1 - \frac{2I_0\omega L_\sigma}{\sqrt{2}V}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2I_0X_\sigma}{\sqrt{2}V}\right)
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Donde:

$$X_\sigma = \omega L_\sigma$$

En esta condición de operación del puente rectificador, si evaluamos la tensión media sobre la carga se obtiene:

$$\begin{aligned}
V_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\pi} \sqrt{2}V \sin(\omega t) d\omega t \\
V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} (\cos(\mu) - \cos(\pi)) \\
V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} (1 + \cos(\mu))
\end{aligned} \tag{9.14}$$

Sustituyendo el resultado de la expresión (9.13) en la ecuación (9.14), se obtiene:

$$\begin{aligned}
V_0 &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left(2 - \frac{2I_0X_\sigma}{\sqrt{2}V}\right) \\
V_0 &\approx 0,9V - \frac{2I_0X_\sigma}{\pi}
\end{aligned} \tag{9.15}$$

Por lo tanto la inductancia de la fuente reduce la tensión media en la barra de corriente continua del puente rectificador de onda completa.

9.3.2. Simulación

```

1 % Onda Completa Controlado Monofásico con fuente sinusoidal
2 %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \sin(\omega t)$ 
3 % Carga tipo RLE considerando la inductancia de fuente
4
5 % Entrada de datos
6 V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');

```

```

7  R=input('Resistencia [Ohm] ');
8  Lc=input('Inductancia [H] ');
9  Lf=input('Inductancia de la fuente [H] ');
10 E=input('Tension de la carga ');
11 f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
12
13 % Constantes
14 L=Lc+Lf;
15 m=E/(sqrt(2)*V)
16 Z=sqrt(R^2+(2*pi*f*L)^2)
17 fi=atan((2*pi*f*L)/R)
18 alfa1=asin(m); % Alfa mínimo
19 alfa2=pi-alfa1; % Alfa máximo
20 disp('Limite de Controlabilidad en grados')
21 [alfa1*180/pi, alfa2*180/pi]
22
23 % Angulo de disparo
24 alfa=input('ángulo de disparo en grados ');
25 alfa=alfa*pi/180;
26
27 % Limite de controlabilidad
28 if (alfa1>alfa)|(alfa>alfa2)
29     disp('El ángulo de disparo está fuera del límite de contrabilidad
30         se fijo en alfa minimo');
31     alfa=alfa1;
32 end
33
34 % Cálculo del beta
35 b=fsolve(@(t) sin(t-fi)-m/cos(fi)+(m/cos(fi)-sin(alfa-fi))*exp(-(t-
36     alfa)/tan(fi)), [pi])
37 g=b-alfa; % Angulo de Conducción
38 a=alfa;
39 Im=sqrt(2)*V/Z*sin(fi-a)*((1+exp(-pi/tan(fi)))/(1-exp(-pi/tan(fi))))-
40     E/R;
41
42 if Im<0
43     disp('El puente esta trabajando en condición no continuada')
44
45 % Funciones en el tiempo

```

```

44     t=linspace(a,b,1000);
45     i=sqrt(2)*V/Z*(sin(t-fi)-m/cos(fi)+(m/cos(fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/
46         tan(fi))));
47
48     v=sqrt(2)*V*sin(t);
49
50
51     tdes=linspace(b,pi+a,300);
52     t=[t,tdes];
53
54
55     v=[v,E*ones(size(tdes))];
56     i=[i,zeros(size(tdes))];
57     is=i;
58
59 else
60
61     disp('El puente esta trabajando en condición continuada')
62     Im
63     % Funciones en el Tiempo
64
65     mu=fsolve(@(t) sqrt(2)*V/(2*pi*Lf)*(cos(a)-cos(t))-Im-sqrt(2)*V/Z*(
66         sin(t-fi)-m/cos(fi)-(2*sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan(fi)))/(1-exp(-pi
67         /tan(fi)))),[a+0.001])
68     t1=linspace(a,mu,500);
69     i1=sqrt(2)*V/Z*(sin(t1-fi)-m/cos(fi)-(2*sin(a-fi)*exp(-(t1-a)/tan(
70         fi)))/(1-exp(-pi/tan(fi))));
71     is1=sqrt(2)*V/(2*pi*Lf)*(cos(a)-cos(t1))-Im;
72     v1=zeros(size(t1));
73     t2=linspace(mu,a+pi,1000);
74     i2=sqrt(2)*V/Z*(sin(t2-fi)-m/cos(fi)-(2*sin(a-fi)*exp(-(t2-a)/tan(
75         fi)))/(1-exp(-pi/tan(fi))));
76     is2=i2;
77     v2=sqrt(2)*V*sin(t2);
78     i=[i1,i2];
79     is=[is1,is2];
80     v=[v1,v2];
81     t=[t1,t2];
82
83 end
84
85 % Valores Medios

```

```

79 Io=1/(pi)*trapz(t,i)
80 Vo=1/pi*trapz(t,v)
81
82 % Rizo
83 Rizo=0.5*(max(i)-min(i))
84
85 % Valores Efectivos
86 Irms=sqrt(1/(pi)*trapz(t,i.^2))
87 Vrms=sqrt(1/(pi)*trapz(t,v.^2))
88
89 % Potencia
90 S=V*Irms % Fuente
91 Pe=E*Io
92 Pr=R*Irms^2
93 fp=(Pe+Pr)/S
94
95 %Factor de rizado
96 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
97 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
98
99 % Primera Armónica
100 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t,v.*exp(j*t))))/sqrt(2)
101 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t,i.*exp(j*t))))/sqrt(2)
102
103 % THD
104 THDv=sqrt(Vrms^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
105 THDi=sqrt(Irms^2-Irms_1^2)/Irms_1
106
107 % Graficas
108 figure(1)
109 clf
110 t1=[t,t+pi];
111 vf=sqrt(2)*V*sin(t1);
112 vx=[v,v];
113 ix=[i,i];
114 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
115 legend('Fuente','Carga');
116 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
117 xlim([alfa 2*pi+alfa]);
118 set(gca,'XTick',alfa:pi/6:2*pi+alfa);

```

```

119 if alfa~=0
120 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
121 else
122 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
123 end
124
125 set(gca,'YTickLabel',{' '})
126 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
127 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
128 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
129
130 figure(2)
131 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
132 xlim([alfa 2*pi+alfa]);
133 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
134 set(gca,'XTick',alfa:pi/6:2*pi+alfa);
135 if alfa~=0
136 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
137 else
138 set(gca,'XTickLabel',{'0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
139 end
140 set(gca,'YTickLabel',{' '})
141 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
142 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
143
144 ix=[is,-is];
145 figure(3)
146 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
147 xlim([alfa 2*pi+alfa]);
148 set(gca,'FontSize',11,'FontName','Symbol');
149 set(gca,'XTick',alfa:pi/6:2*pi+alfa);
150 if alfa~=0
151 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
152 else

```

```

153 set(gca,'XTickLabel',{ '0','T/12','T/6','T/4','T/3','5T/12','T/2','7T
    /12','2T/3','3T/4','5T/6','11T/12','T'})
154 end
155 set(gca,'YTickLabel',{' '})
156 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
157 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
158
159 % Primera Armónica
160 Irms_f_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
161
162 % THD
163 THDi_f=sqrt(Irms^2-Irms_f_1^2)/Irms_f_1

```

9.4. Rectificador Trifásico

En la figura 9.7, se presenta el esquema del rectificador trifásico no controlado con inductancia en la fuente. Para el análisis del efecto de la inductancia de la fuente sobre el valor medio de la tensión sobre la barra de corriente continua, supondremos que el cociente entre el valor medio y efectivo de la corriente en la carga tiende a la unidad.

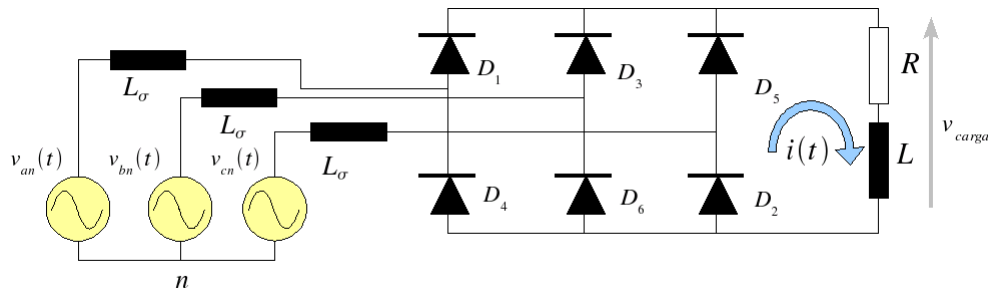


Figura 9.7: Esquema del puente rectificador trifásico no controlado con inductancia en la fuente

9.4.1. Análisis del Proceso de Conmutación

Para el análisis del puente durante el proceso de conmutación supondremos que los diodos D_1 y D_2 se encuentran encendidos y se produce una conmutación o transición de corriente entre las componentes D_1 y D_3 en la mitad superior del puente en $t = \pi/\omega$. En la figura 9.8, se presenta el circuito equivalente del puente rectificador cuando se produce la conmutación de los diodos D_1 y D_3 .

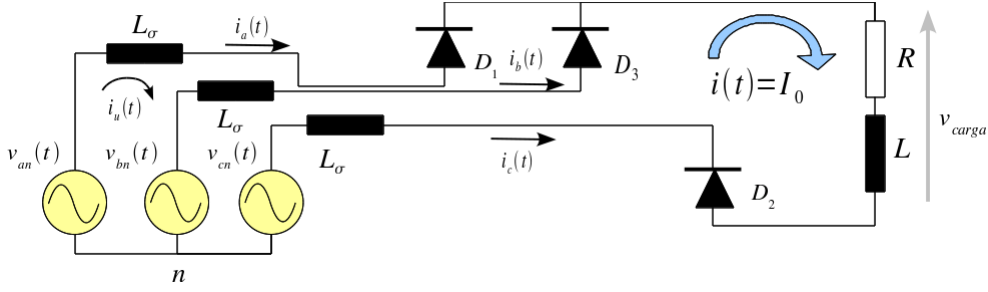


Figura 9.8: Circuito equivalente del puente rectificador para la conmutación de los diodos D_1 y D_3

Del circuito de la figura 9.8, se obtiene:

$$\begin{aligned} i_a(t) &= i_u(t) \\ i_b(t) &= I_0 - i_u(t) \\ i_c(t) &= -I_0 \end{aligned} \quad (9.16)$$

Calculando la corriente en el cortocircuito ($i_u(t)$), producida por la conducción de los diodos D_1 y D_3 , se obtiene:

$$\begin{aligned} v_{an}(t) - L_\sigma \frac{di_u(t)}{dt} + L_\sigma \frac{d}{dt} (I_0 - i_u(t)) - v_{bn}(t) &= 0 \\ L_\sigma \frac{di_u(t)}{dt} &= \frac{v_{an}(t) - v_{bn}(t)}{2} = \frac{v_{ab}(t)}{2} \\ i_u(t) &= \frac{1}{\omega L_\sigma} \int_\pi^t \frac{v_{ab}(\tau)}{2} d\omega\tau + i_u\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (9.17)$$

En la condición de conmutación estudiada, la corriente inicial por la inductancia de la fuente (L_σ) en $t = \pi/\omega$ de la fase “a” es I_0 y esta disminuye a cero al finalizar el proceso de conmutación en $t = \frac{\pi+\mu}{\omega}$. Calculando la corriente $i_a\left(\frac{\pi+\mu}{\omega}\right)$, se obtiene:

$$i_a\left(\frac{\pi+\mu}{\omega}\right) = \frac{\sqrt{2}V}{2\omega L_\sigma} (1 - \cos(\pi + \mu)) + I_0 = 0 \quad (9.18)$$

Despejando el ángulo de conmutación (μ) de la expresión 9.18, se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 + \cos(\mu) &= \frac{2\omega L_\sigma I_0}{\sqrt{2}V} \\ \Downarrow \\ \mu &= \arccos\left(1 - \frac{2\omega L_\sigma I_0}{\sqrt{2}V}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2X_\sigma I_0}{\sqrt{2}V}\right) \end{aligned} \quad (9.19)$$

Calculando la tensión sobre la carga ($v_{carga}(t)$) durante el periodo de conmutación del circuito de la figura 9.8, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 v_{an}(t) &= L_{\sigma} \frac{di_u(t)}{dt} + v_{carga}(t) + L_{\sigma} \frac{dI_0}{dt} + v_{cn}(t) \\
 &\Downarrow \\
 v_{carga}(t) &= v_{an}(t) - v_{cn}(t) - L_{\sigma} \frac{di_u(t)}{dt}
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

Reemplazando el valor de $L_{\sigma} \frac{di_u(t)}{dt}$ de la expresión (9.17) en la (9.20), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 v_{carga}(t) &= v_{an}(t) - v_{cn}(t) - \frac{v_{an}(t) - v_{bn}(t)}{2} = \frac{v_{an}(t) + v_{bn}(t)}{2} - v_{cn}(t) \\
 v_{carga}(t) &= \frac{v_{ac}(t) - v_{bc}(t)}{2}
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

En la figura 9.9, se presenta el oscilograma de tensión sobre la barra de corriente continua y la corriente por los diodos D_1 y D_3 durante el proceso de conmutación.

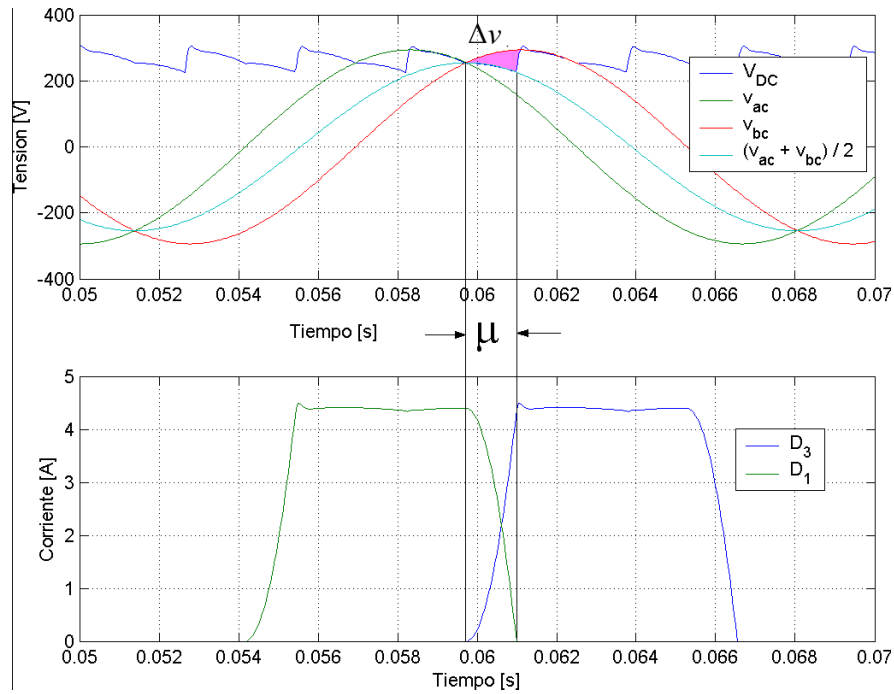


Figura 9.9: Tensión en la barra de corriente continua y corriente por los diodos D_1 y D_3

Calculando la caída de tensión (Δv) durante el proceso de conmutación, se obtiene:

$$\Delta v = v_{bc}(t) - v_{carga}(t) = v_{bc}(t) - \frac{v_{ac}(t) - v_{bc}(t)}{2} = -\frac{v_{ab}(t)}{2} \tag{9.22}$$

Calculando el valor medio de la caída de tensión en el periodo de conducción del puente, se obtiene:

$$\Delta V = \frac{3}{\pi} \int_{\pi}^{\pi+\mu} \left(-\frac{\sqrt{2}V}{2} \sin(\omega t) d\omega t \right) = \frac{3\sqrt{2}V}{2\pi} (1 - \cos(\mu)) \tag{9.23}$$

Reemplazando el resultado de la expresión (9.19) en la (9.23), se obtiene la caída de tensión media del puente como:

$$\Delta V = \frac{3}{\pi} \omega L_{\sigma} I_0 = \frac{3}{\pi} X_{\sigma} I_0 \quad (9.24)$$

Calculando la tensión media de la carga en un periodo de conducción del puente, a partir de la forma de onda de la figura 9.9 obtenemos:

$$V_0 = \frac{3}{\pi} \left(\sqrt{2}V - X_{\sigma} I_0 \right) \approx 1,35V - \frac{3}{\pi} X_{\sigma} I_0 \quad (9.25)$$

La caída de tensión producto de la inductancia de la fuente, en rectificadores monofásicos y trifásicos en análoga si los puentes son controlados.

9.5. Impacto del Rectificador sobre el Sistema Alterno

El proceso de conmutación, producto de la inductancia de fuente se refleja en el lado de corriente continua como una caída de tensión sobre la carga DC, mientras que en el lado de corriente alterna se ve como una caída de tensión en los bornes del rectificador, esta caída se denomina "Line Notching" o "Muesca" y es producto del cortocircuito transitorio en el sistema de corriente alterna a través de los dispositivos semiconductores que están en proceso de conmutación. Este fenómeno distorsiona la tensión a la entrada del rectificador como podemos apreciar a continuación.

9.5.1. Puente Monofásico Controlado

En la figura 9.10, se presenta la forma de onda de tensión en la carga y en bornes de entrada de un rectificador monofásico controlado para una carga activa de $R = 100\Omega$, $L = 223\text{mH}$ y $E = 30\text{V}$, alimentada desde un sistema monofásico sinusoidal de tensión efectiva $V = 120\text{V}$ a 60Hz . El ángulo de disparo del puente es de $\alpha = 30^\circ$. La fuente se acopla al puente mediante línea resistiva inductiva de $R_f = 0,1\Omega$ y $L_f = 10\text{mH}$.

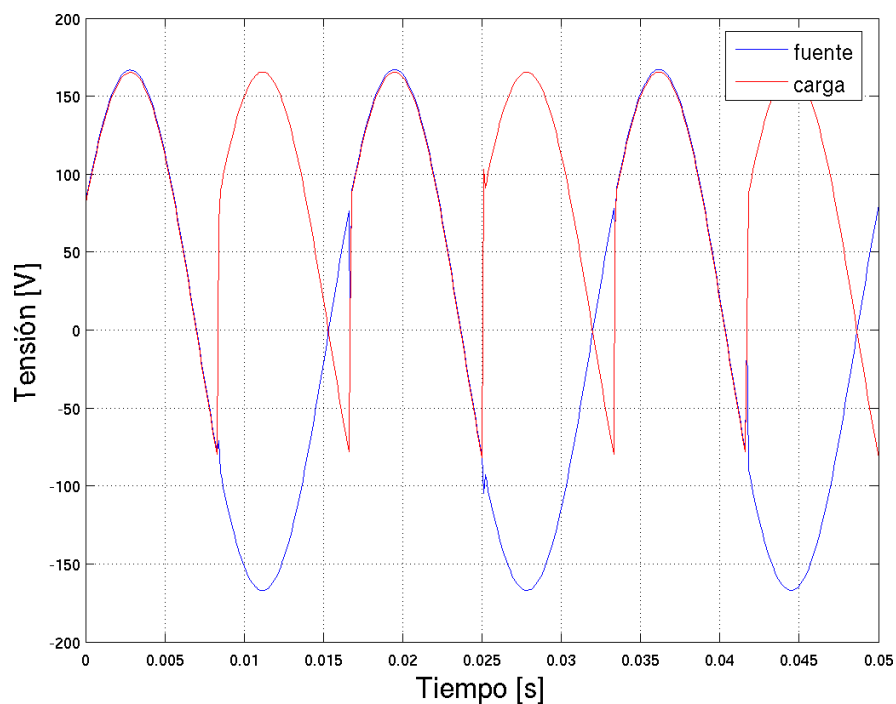


Figura 9.10: Tensión en la carga y bornes de un rectificador monofásico con fuente no ideal

En la figura 9.11, se muestra el detalle de la caída de tensión en bornes del rectificador y en la carga debido al proceso de conmutación debido a la resistencia e inductancia de la fuente.

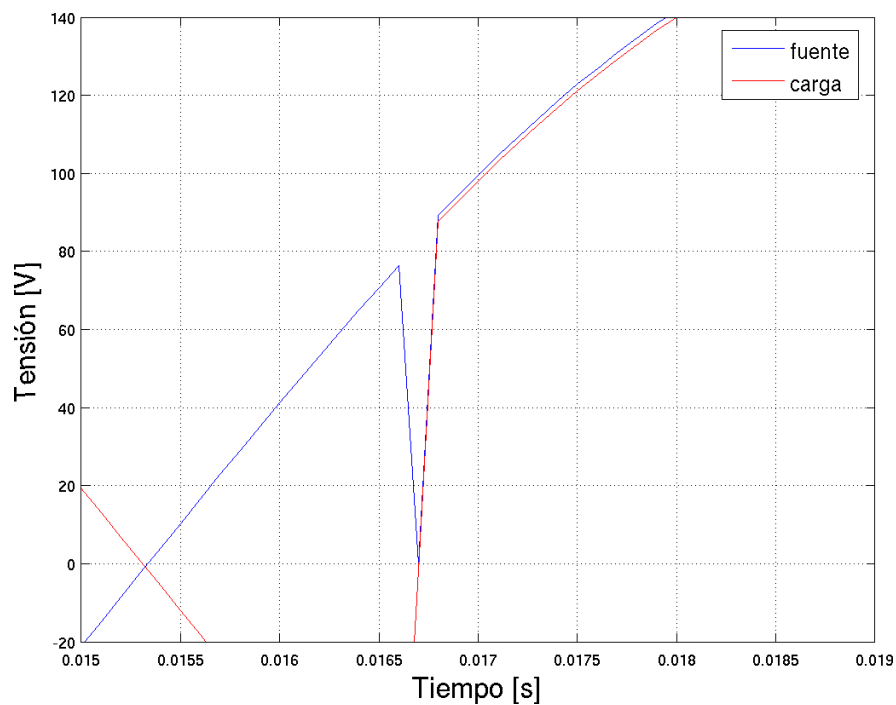


Figura 9.11: Tensión en la carga y bornes de un rectificador monofásico con fuente no ideal "detalle"

9.5.2. Puente Trifásico Controlado

En la figura 9.12, se presenta la forma de onda de tensión en la carga y en bornes de entrada de un rectificador trifásico controlado para una carga activa de $R = 60\Omega$, $L = 223\text{mH}$ y $E = 30\text{V}$, alimentada desde un sistema trifásico sinusoidal de secuencia positiva de tensión efectiva $V = 416\text{V}$ a 60Hz . El ángulo de disparo del puente es de $\alpha = 40^\circ$. La fuente trifásica se acopla al puente mediante línea resistiva inductiva de $R_f = 0,1\Omega$ y $L_f = 1\text{mH}$.

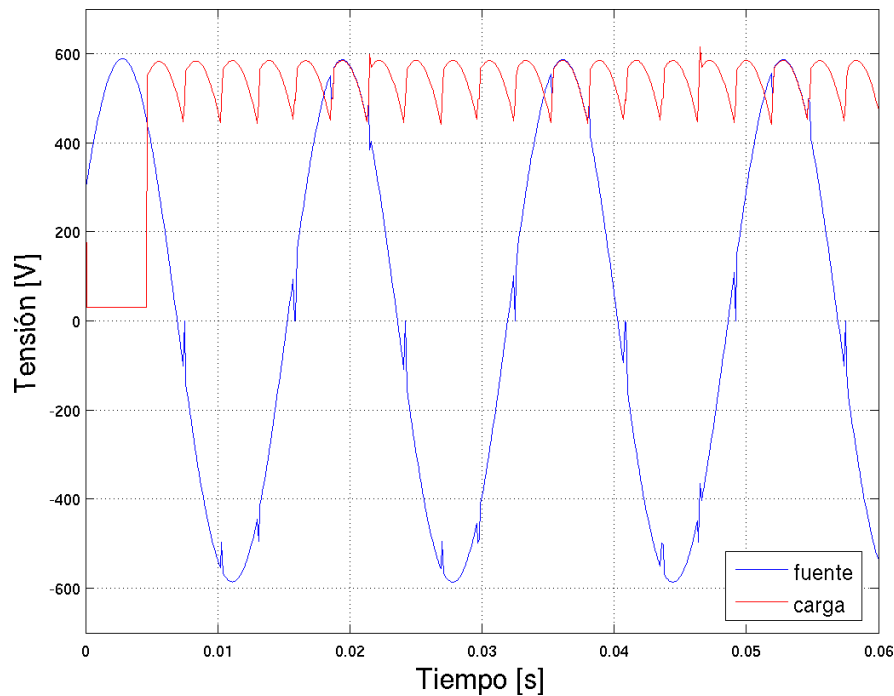


Figura 9.12: Tensión en la carga y bornes de un rectificador trifásico con fuente no ideal

En la figura 9.13, se muestra el detalle de la caída de tensión en bornes del rectificador y en la carga debido al proceso de conmutación debido a la resistencia e inductancia de la fuente.

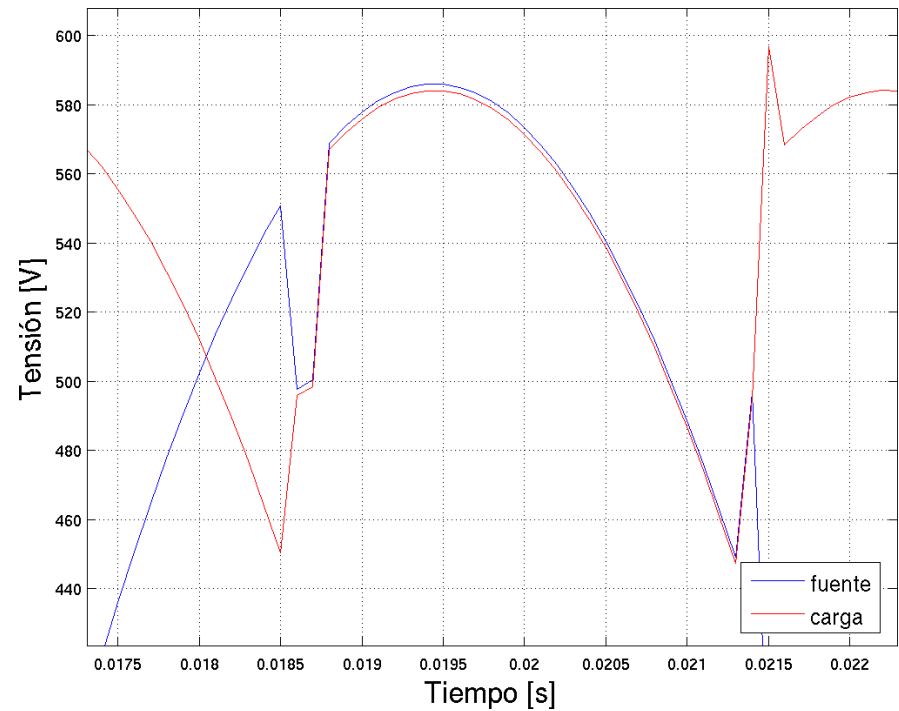


Figura 9.13: Tensión en la carga y bornes de un rectificador trifásico con fuente no ideal "detalle"

9.6. Regulación Internacional

Las recomendaciones internacionales IEEE Std. 519, establece limitaciones sobre la profundidad de la muesca, el factor de distorsión armónica total de tensión (THD_V) y el área de la muesca de la tensión línea a línea en bornes de la barra de alimentación del rectificador, esto con la finalidad de no afectar a otros equipos conectados a la misma barra de alimentación. En la tabla 9.1, se presentan los límites para sistemas de baja tensión ($< 600V$), en función del tipo de sistema alimentado.

Tabla 9.1: Límites de distorsión por muesca para sistemas de baja tensión [3]

	Aplicaciones Especiales ¹	Sistemas en General	Sistemas Dedicados ²
Profundidad de la muesca	10%	20%	50%
THD_V	3%	5%	10%
Área de la Muesca (A_N)	$16400V \cdot \mu s$	$22800V \cdot \mu s$	$36500V \cdot \mu s$

Nota: para sistemas mayores de 480V debe escalarse A_N por el factor $\frac{V}{480}$

Para calcular la profundidad de la muesca ($\%pm$) y su área (A_N) se utiliza la siguiente referencia:

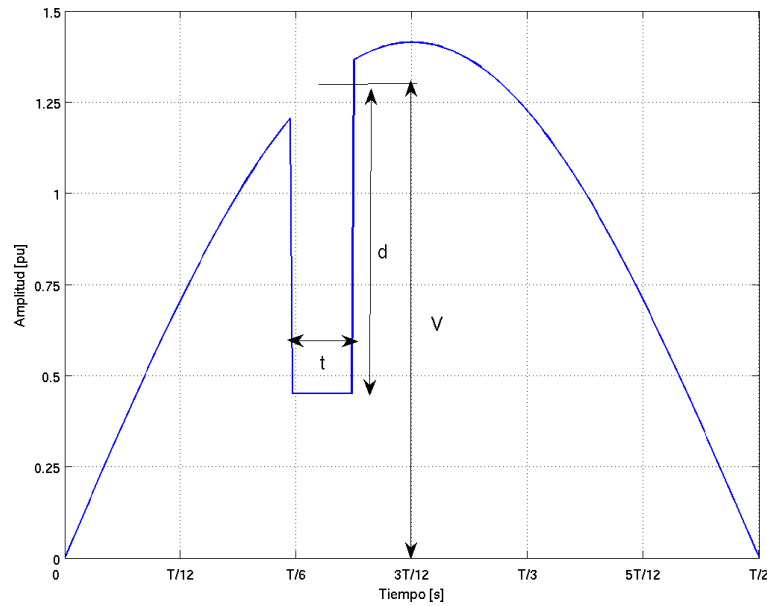


Figura 9.14: Definición de $\%pm$ y A_N

Donde:

- t Tiempo de duración de la muesca.
- d Profundidad en el punto medio con respecto a la tensión sin la muesca.
- V Tensión en el punto medio sin la muesca.

Para calcular la profundidad de la muesca y su área se utiliza las siguientes expresiones:

$$\%pm = \frac{d}{V} \cdot 100 \quad (9.26)$$

$$A_N = t \cdot d \quad (9.27)$$

9.7. Ejercicios

1. El puente de figura 9.2 se alimenta de una fuente de $240V$ a $60Hz$ con una inductancia $L_\sigma = 3mH$. Si el convertidor alimenta una carga que consume $10A$ determine:
 - a) Ángulo de conmutación.
 - b) Caída de tensión producto de L_σ .
 - c) L_σ para reducir la caída de tensión a la mitad con un incremento de la carga del 10% .

2. Determine para un puente de media onda con diodo descarga libre el tiempo de conmutación para una carga de 45Ω y $150mH$. La fuente que alimenta es puente es de $120V$ a $60Hz$ y se conecta al puente mediante un alimentador de inductancia $20mH$.
3. El puente de la figura 9.5 es alimentado por una fuente de $220V$ a $50Hz$. La fuente se conecta al rectificador mediante un alimentador de inductancia $100\mu H$. Para una carga de 8Ω y $100mH$ determine:
 - a) Ángulo de conmutación.
 - b) Tensión media y efectiva sobre la carga.
 - c) Corriente media y efectiva en la carga.
4. Determine la caída de tensión y el ángulo de conmutación para un puente rectificador monofásico controlado que alimenta una carga de 55Ω , $230mH$ y $20V$. El puente se alimenta de una fuente de $220V$ a $50Hz$ con una inductancia de dispersión de $15mH$. El ángulo de disparo del puente es de $\pi/6$.
5. Un puente rectificador monofásico controlado es alimentado por una fuente no ideal de tensión. La fuente presenta una tensión efectiva de $240V$ a $60Hz$ con una inductancia de dispersión de $10mH$. El rectificador alimenta una carga de $12A$ cuando es accionado a un ángulo de disparo de $\pi/3$. Determine:
 - a) Tensión media y efectiva sobre la carga.
 - b) Ángulo de conmutación.
 - c) Potencia consumida por la carga.
 - d) THD de la corriente en la fuente de alimentación.
6. El puente de la figura 9.8 es alimentado desde un sistema trifásico de tensión línea a línea de $416V$ a $60Hz$ con $L_\sigma = 5mH$. Si el puente alimenta una carga que consume una corriente efectiva en las fases del sistema trifásico de $16,33A$, determine:
 - a) Caída de tensión.
 - b) Tensión media y efectiva sobre la carga.
 - c) Corriente media y efectiva en la carga
 - d) Ángulo de conmutación.
 - e) Potencia consumida por la carga.

7. Determine el tiempo de conmutación para un rectificador trifásico de diodos alimentado desde un sistema de 416 V línea a línea a 60 Hz . El puente alimenta una carga de 30Ω y 300 mH . El puente se conecta a la fuente mediante un transformador de aislamiento de relación $1 : 1$ con una reactancia de cortocircuito de 4% en la base del transformador. El transformador se especifica durante su compra para suplir una carga de corriente continua de 25 A .

Efecto de los Rectificadores de Diodos sobre el Sistema de Potencia

10.1. Aspectos Generales

En este capítulo se presenta el efecto de los rectificadores de diodos de media onda y onda completa sobre el sistema de potencia, desde el punto de vista de su impacto armónico en las corrientes, corrientes de diseño y el factor de distorsión armónica en la barra de alimentación. Adicionalmente, se presenta el impacto sobre el contenido armónico de las corrientes de los diversos esquemas de conexión de los transformadores que alimentan el puente rectificador y sus aplicaciones.

Para este estudio se modelara la carga en la barra de corriente continua como fuente de corriente para simular una carga con alto contenido inductivo y como fuente de tensión para representar cargas con alto contenido capacitivo. El valor de la fuente de tensión para modelar cargas capacitivas se escoge igual a la tensión media suministrada por el puente rectificador a la barra de corriente continua.

10.2. Rectificador de media onda con diodo de descarga libre

En la figura 10.1, se presenta el esquema del rectificador de media onda con diodo de descarga libre. Este circuito se utiliza para circuitos de muy baja potencia.

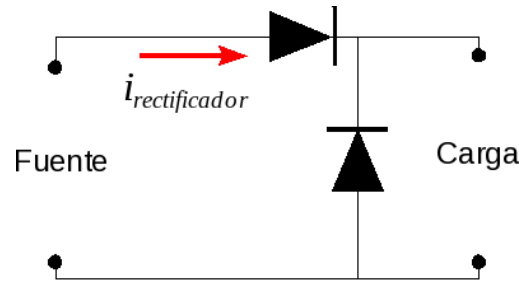
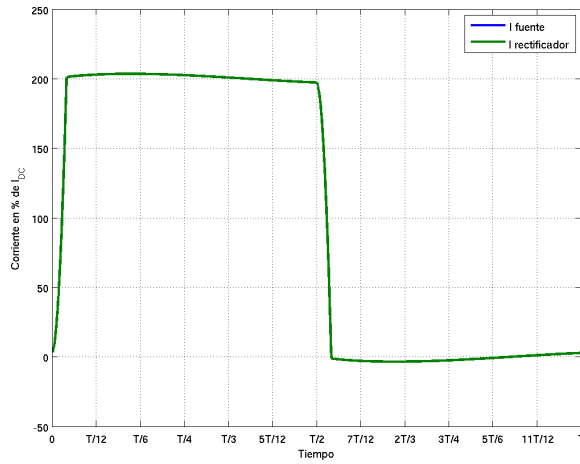
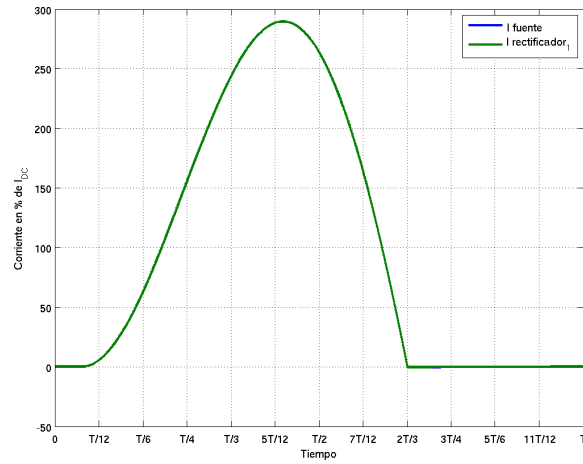


Figura 10.1: Rectificador de media onda con diodo de descarga libre

En la figura 10.2, se presenta la forma de onda de corriente sobre la fuente de alterna que alimenta el rectificador de la figura 10.1, en porcentaje del valor de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}) para una carga en corriente continua modelada como fuente de corriente y de tensión.



(a) Carga modelada como fuente de corriente



(b) Carga modelada como fuente de tensión

Figura 10.2: Forma de onda de la corriente en la fuente del rectificador de media onda con diodo de descarga libre

La corriente efectiva suministrada por la fuente se puede calcular en función de la corriente media en la barra de corriente continua (I_{DC}) como:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$I_{rms} = \frac{I_{DC}}{\sqrt{2}} \approx 0,7071 I_{DC} \quad (10.1)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$I_{rms} = 1,4926 I_{DC} \quad (10.2)$$

La tensión media suministrada por el rectificador a la carga es:

$$V_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} V \approx 0,45 V \quad (10.3)$$

donde:

V Tensión efectiva de la fuente.

En la figura 10.3, se presenta el contenido armónico de la corriente de la figura 10.2, en porcentaje del valor de la fundamental.

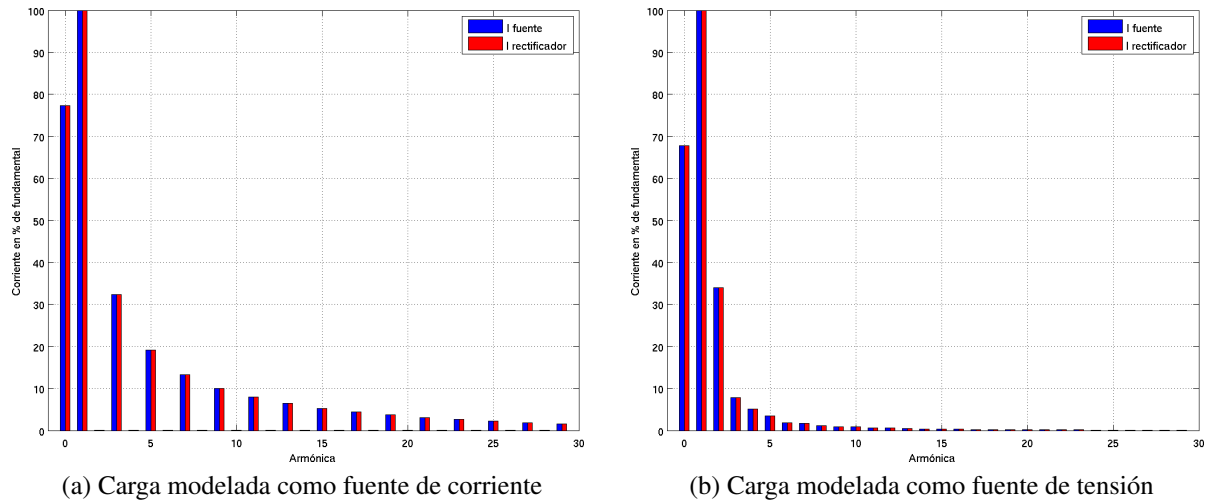


Figura 10.3: Contenido armónico de la forma de onda de la corriente de la figura 10.2

El factor de distorsión armónica de corriente de este puente en la barra de alimentación es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$THD_i = 1,1765 \quad (10.4)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$THD_i = 1,4926 \quad (10.5)$$

10.3. Rectificador de media onda bifásico

En la figura 10.4, se presenta el esquema del rectificador de media onda bifásico o con transformador de toma central. Este circuito se utiliza para circuitos de baja potencia y baja tensión. En este esquema los devanados secundarios del transformador son de la misma tensión nominal que el primario.

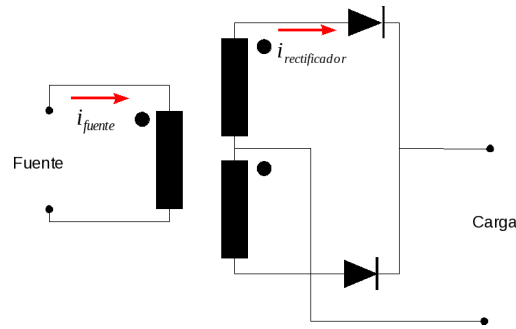


Figura 10.4: Rectificador de media onda bifásico

En la figura 10.5, se presenta la forma de onda de corriente sobre el primario del transformador (i_{fuente}) y la corriente que suministra el secundario del transformador a cada uno de los diodos ($i_{rectificador_{1,2}}$) del rectificador de la figura 10.4, las formas de onda están en porcentaje del valor de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}).

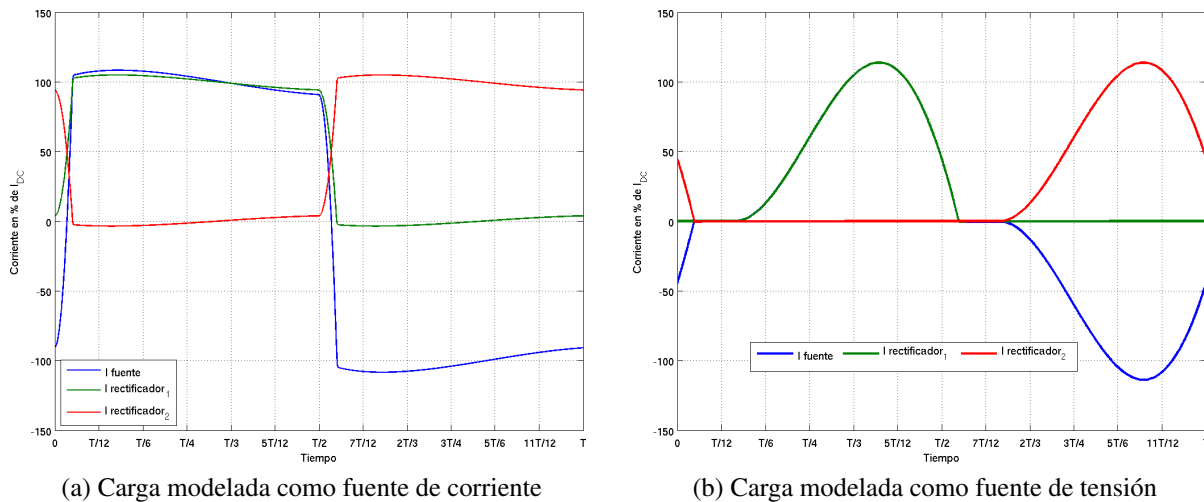


Figura 10.5: Forma de onda de la corriente en los devanados del transformador que alimenta el rectificador de media onda bifásico

La corriente efectiva en cada devanado del transformador en función de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}) es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador_{1,2}}} &= 0,7037 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.6)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 1,2735 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador_{1,2}}} &= 0,9 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.7)$$

La tensión media suministrada por el rectificador a la carga es:

$$V_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V \approx 0,9 V \quad (10.8)$$

donde:

V Tensión efectiva de la fuente.

En la figura 10.6, se presenta el contenido armónico de las corrientes de la figura 10.5, en porcentaje del valor de la fundamental.

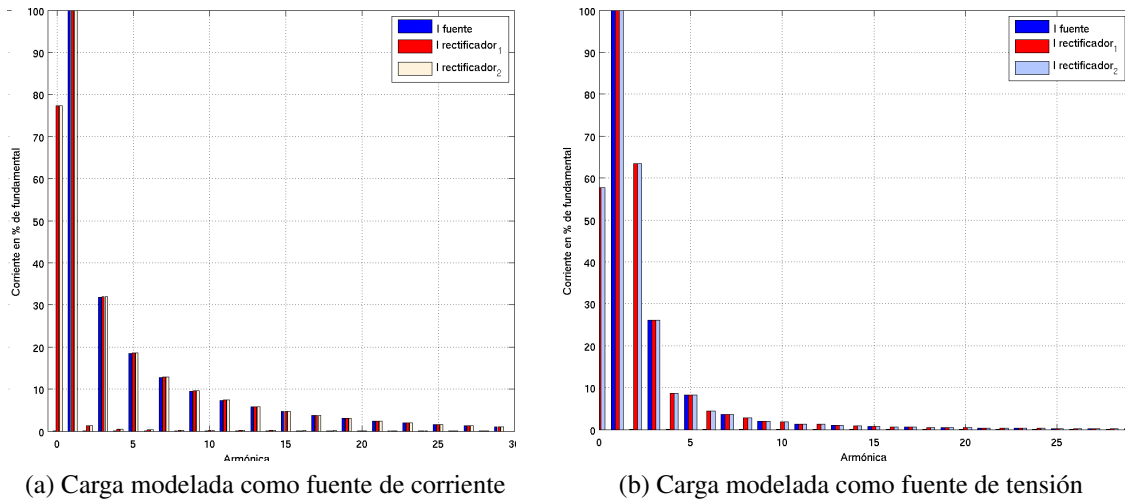


Figura 10.6: Contenido armónico de la forma de onda de la corriente de la figura 10.5

El factor de distorsión armónica de corriente en los devanados del transformador es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,4186 \\ THD_{i_{rectificador1,2}} &= 1,1716 \end{aligned} \quad (10.9)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,2776 \\ THD_{i_{rectificador1,2}} &= 1,0745 \end{aligned} \quad (10.10)$$

10.4. Rectificador monofásico

En la figura 10.7, se presenta el esquema del rectificador monofásico de onda completa. Este circuito se utiliza para circuitos de baja potencia y media tensión.

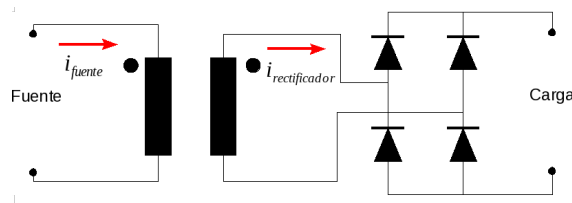


Figura 10.7: Rectificador monofásico

En la figura 10.8, se presenta la forma de onda de corriente sobre el primario del transformador (i_{fuente}) y la corriente que suministra el secundario del transformador ($i_{rectificador}$) al rectificador de la figura 10.7, las formas de onda están en porcentaje del valor de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}).

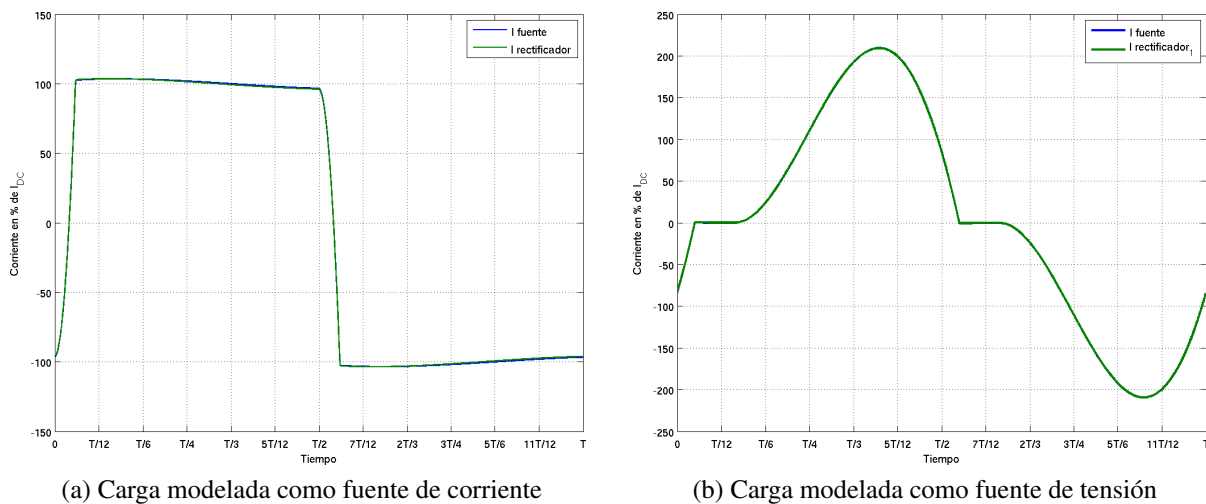


Figura 10.8: Forma de onda de la corriente en los devanados del transformador que alimenta el rectificador monofásico

La corriente efectiva en cada devanado del transformador en función de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}) es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador}} &= I_{DC} \end{aligned} \quad (10.11)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 1,2712 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador}} &= 1,2712 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.12)$$

La tensión media suministrada por el rectificador a la carga es:

$$V_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V \approx 0,9V \quad (10.13)$$

donde:

V Tensión efectiva de la fuente.

En la figura 10.9, se presenta el contenido armónico de las corrientes de la figura 10.8, en porcentaje del valor de la fundamental.

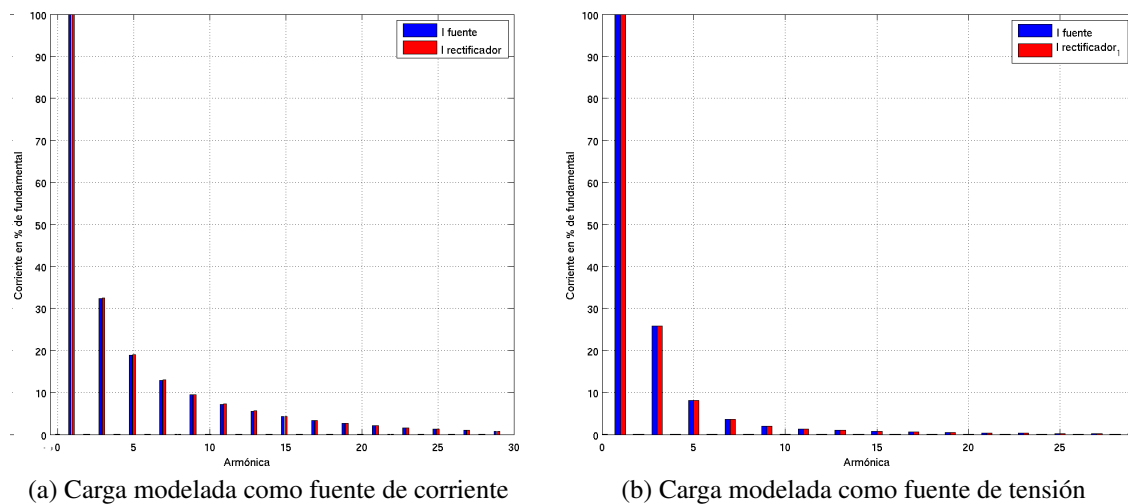


Figura 10.9: Contenido armónico de la forma de onda de la corriente de la figura 10.8

El factor de distorsión armónica de corriente en los devanados del transformador es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,4230 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 0,4230 \end{aligned} \quad (10.14)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,2725 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 0,2725 \end{aligned} \quad (10.15)$$

10.5. Rectificador trifásico de media onda

En la figura 10.10, se presenta el esquema del rectificador trifásico de media onda con transformador Yy . Este circuito se utiliza para circuitos de media potencia y baja tensión.

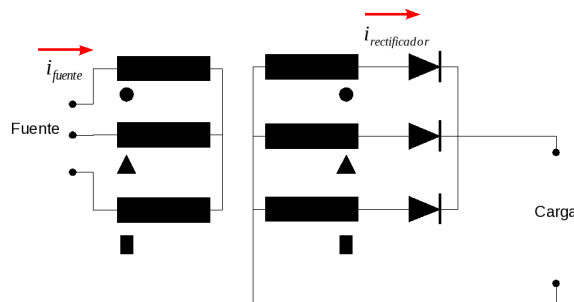


Figura 10.10: Rectificador trifásico de media onda con transformador Yy

En la figura 10.11, se presenta la forma de onda de corriente sobre el primario del transformador (i_{fuente}) y la corriente que suministra el secundario del transformador ($i_{rectificador}$) al rectificador de la figura 10.10, las formas de onda están en porcentaje del valor de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}).

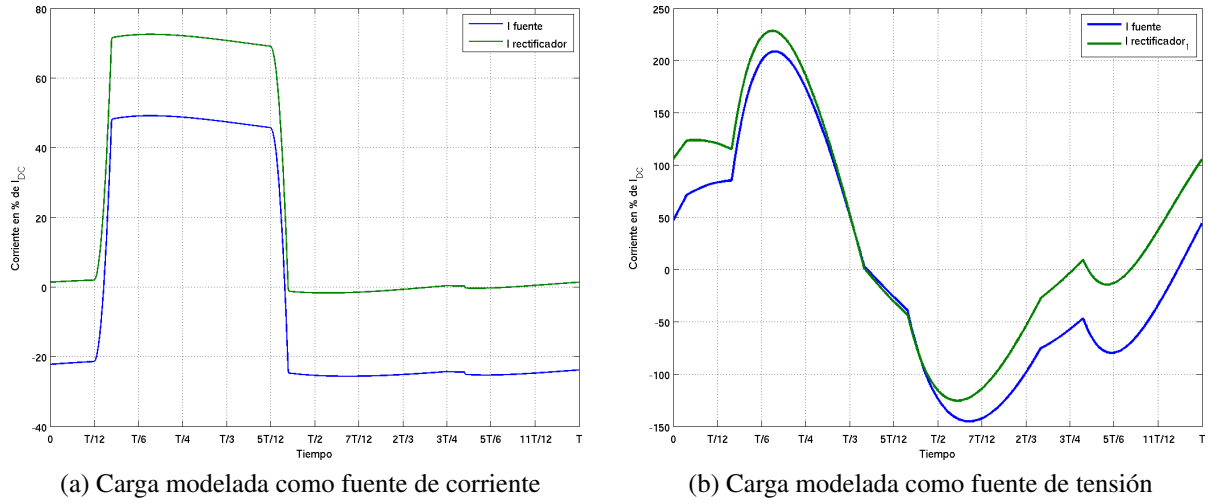


Figura 10.11: Forma de onda de la corriente en los devanados del transformador (Yy) que alimenta el rectificador trifásico de media onda

La corriente efectiva en cada devanado del transformador en función de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}) es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 0,3348 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador}} &= 0,4061 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.16)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 1,0646 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador}} &= 1,0875 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.17)$$

La tensión media suministrada por el rectificador a la carga es:

$$V_0 = \frac{3}{\pi\sqrt{2}} V \approx 0,675 V \quad (10.18)$$

donde:

V Tensión efectiva línea a línea de la fuente.

En la figura 10.12, se presenta el contenido armónico de las corrientes de la figura 10.11, en porcentaje del valor de la fundamental.

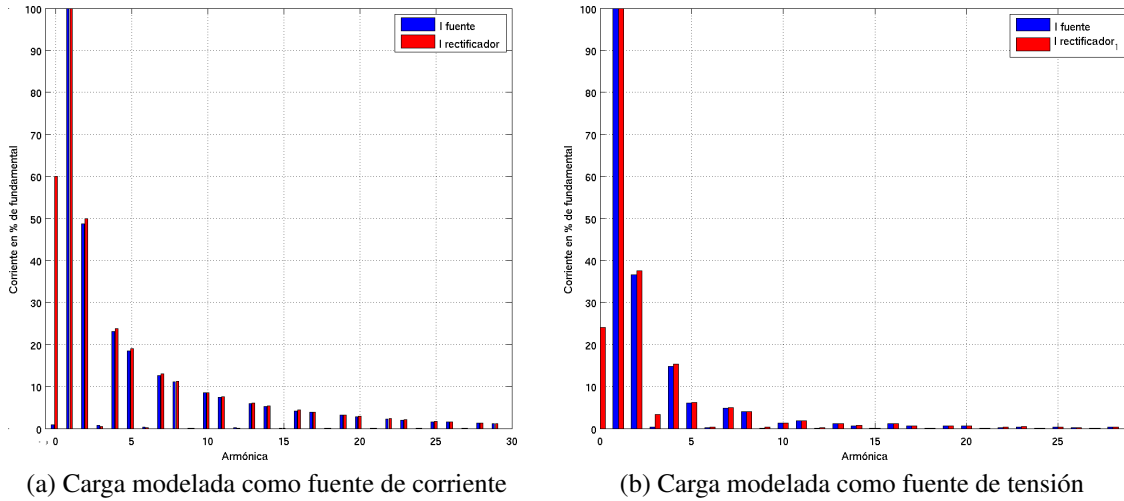


Figura 10.12: Contenido armónico de la forma de onda de la corriente de la figura 10.11

El factor de distorsión armónica de corriente en los devanados del transformador es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,6155 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 1,0571 \end{aligned} \quad (10.19)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,4052 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 0,5393 \end{aligned} \quad (10.20)$$

En la figura 10.13, se presenta el esquema del rectificador trifásico de media onda con transformador Dy . Este circuito se utiliza al igual que el anterior en circuitos de media potencia y baja tensión.

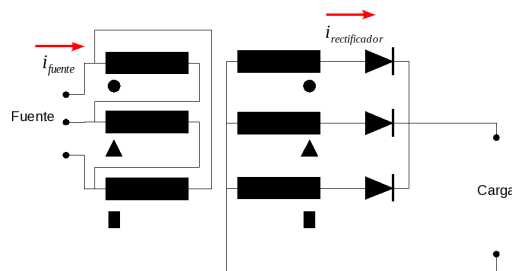


Figura 10.13: Rectificador trifásico de media onda con transformador Dy

En la figura 10.14, se presenta la forma de onda de corriente sobre el primario del transformador (i_{fuente}) y la corriente que suministra el secundario del transformador ($i_{rectificador}$) al rectificador

de la figura 10.13, las formas de onda están en porcentaje del valor de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}).

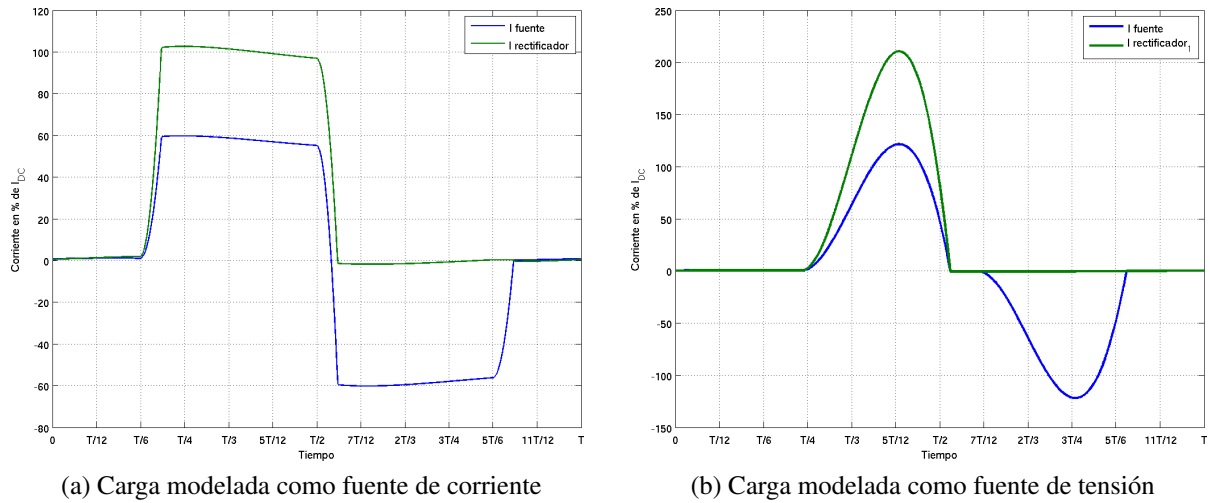


Figura 10.14: Forma de onda de la corriente en los devanados del transformador (Dy) que alimenta el rectificador trifásico de media onda

La corriente efectiva en cada devanado del transformador en función de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}) es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 0,4643 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador}} &= 0,5699 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.21)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 0,6191 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador}} &= 0,7361 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.22)$$

La tensión media suministrada por el rectificador a la carga es:

$$V_0 = \frac{3}{\pi\sqrt{2}} V \approx 0,675 V \quad (10.23)$$

donde:

V Tensión efectiva línea a línea de la fuente.

En la figura 10.15, se presenta el contenido armónico de las corrientes de la figura 10.14, en porcentaje del valor de la fundamental.

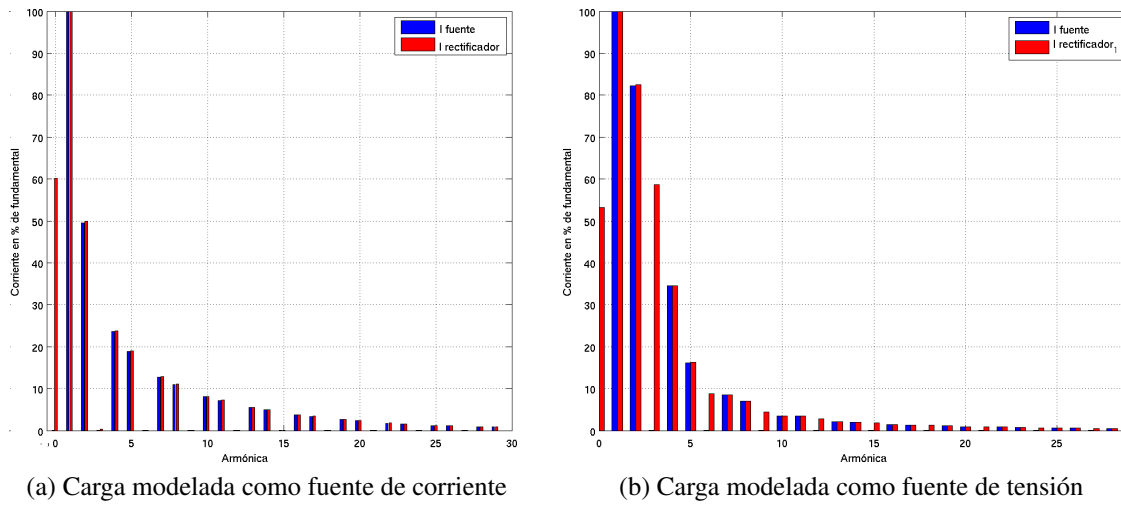


Figura 10.15: Contenido armónico de la forma de onda de la corriente de la figura 10.14

El factor de distorsión armónica de corriente en los devanados del transformador es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,6226 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 1,0569 \end{aligned} \quad (10.24)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,9161 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 1,3290 \end{aligned} \quad (10.25)$$

10.6. Rectificador trifásico

En la figura 10.16, se presenta el esquema del rectificador trifásico de media onda con transformador Yy. Este circuito se utiliza para circuitos de media potencia y media tensión.

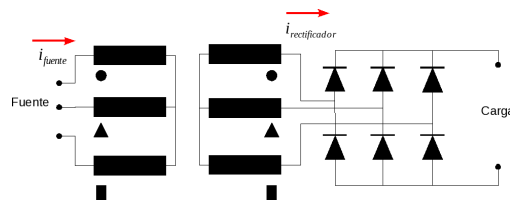


Figura 10.16: Rectificador trifásico con transformador Yy

En la figura 10.17, se presenta la forma de onda de corriente sobre el primario del transformador (i_{fuente}) y la corriente que suministra el secundario del transformador ($i_{rectificador}$) al rectificador de la figura 10.16, las formas de onda están en porcentaje del valor de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}).

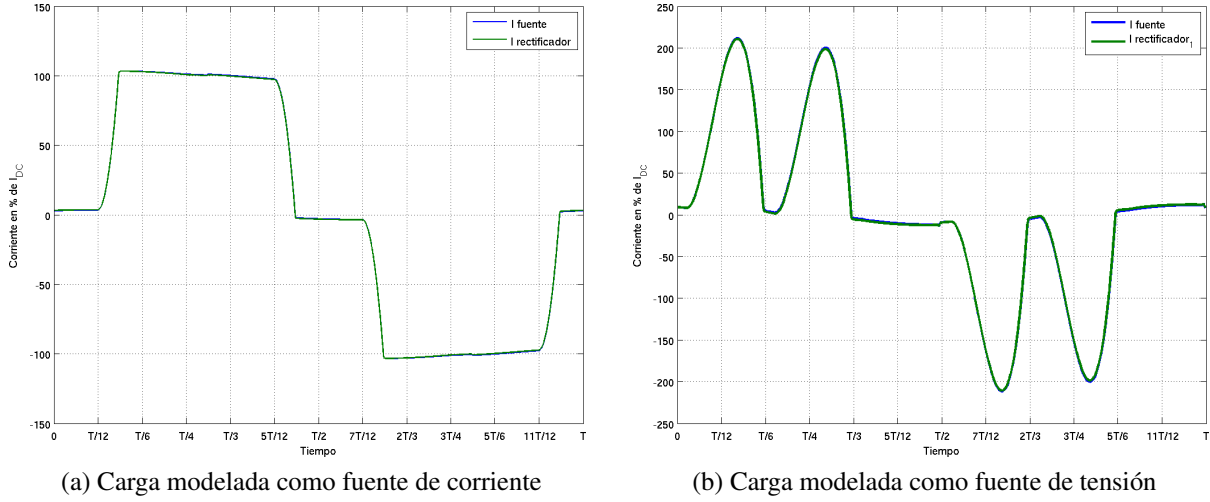


Figura 10.17: Forma de onda de la corriente en los devanados del transformador (Yy) que alimenta el rectificador trifásico

La corriente efectiva en cada devanado del transformador en función de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}) es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} I_{RMS\,fuente} &= 0,8102 I_{DC} \\ I_{RMS\,Rectificador} &= 0,8078 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.26)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} I_{RMS\,fuente} &= 1,04 I_{DC} \\ I_{RMS\,Rectificador} &= 1,033 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.27)$$

La tensión media suministrada por el rectificador a la carga es:

$$V_0 = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} V \approx 1,35 V \quad (10.28)$$

donde:

V Tensión efectiva línea a línea de la fuente.

En la figura 10.18, se presenta el contenido armónico de las corrientes de la figura 10.17, en porcentaje del valor de la fundamental.

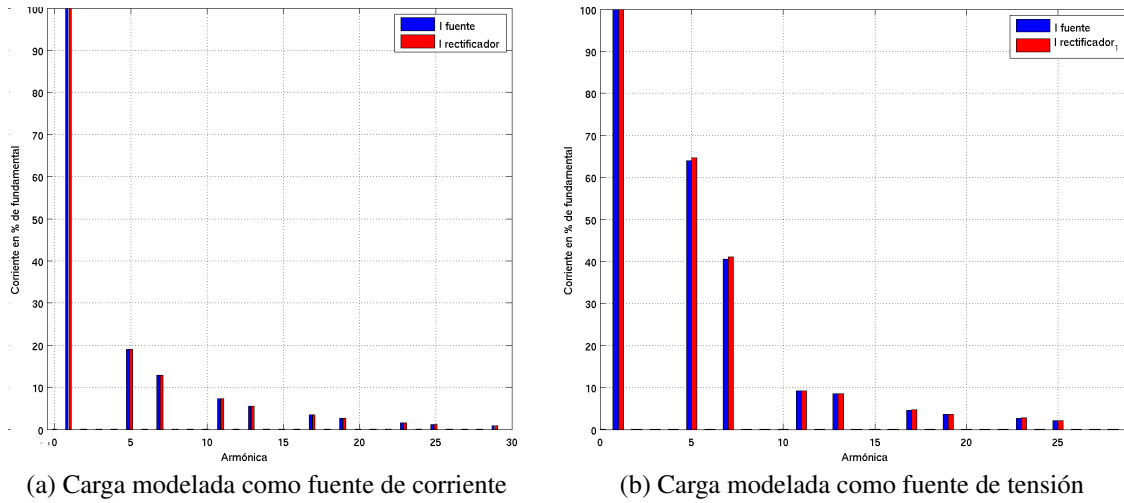


Figura 10.18: Contenido armónico de la forma de onda de la corriente de la figura 10.17

El factor de distorsión armónica de corriente en los devanados del transformador es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,2515 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 0,2515 \end{aligned} \quad (10.29)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,7706 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 0,7791 \end{aligned} \quad (10.30)$$

En la figura 10.19, se presenta el esquema del rectificador trifásico de media onda con transformador *Dy*. Este circuito se utiliza al igual que el anterior en circuitos de media potencia y media tensión.

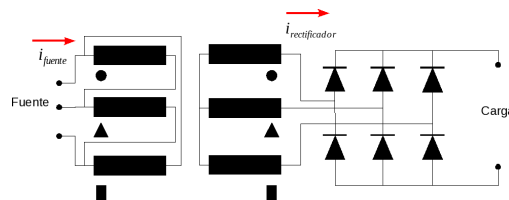


Figura 10.19: Rectificador trifásico con transformador *Dy*

En la figura 10.20, se presenta la forma de onda de corriente sobre el primario del transformador (i_{fuente}) y la corriente que suministra el secundario del transformador ($i_{rectificador}$) al rectificador de la figura 10.19, las formas de onda están en porcentaje del valor de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}).

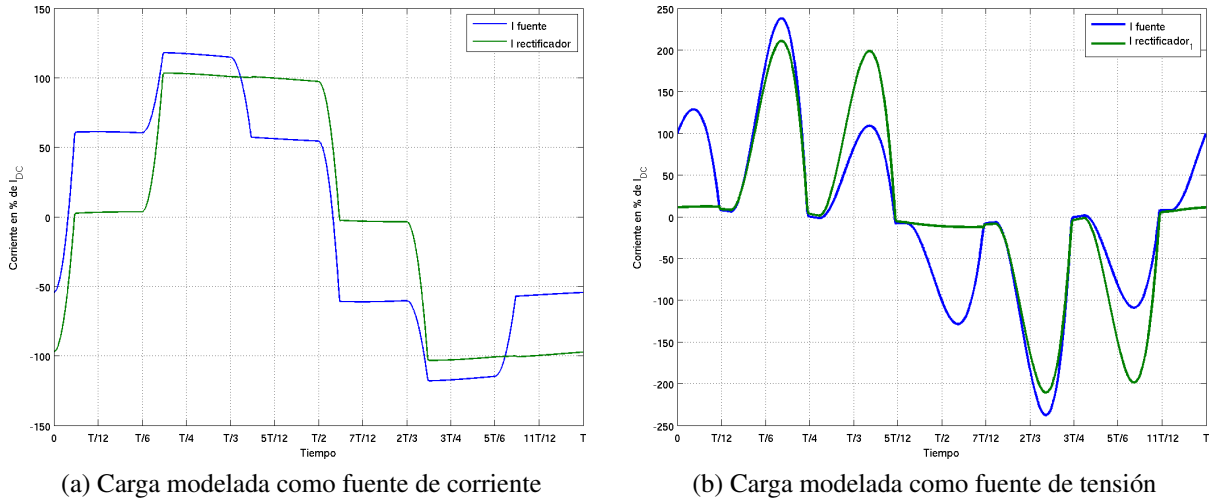


Figura 10.20: Forma de onda de la corriente en los devanados del transformador (Dy) que alimenta el rectificador trifásico

La corriente efectiva en cada devanado del transformador en función de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}) es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 0,8102 I_{DC} \\ I_{RMS_{rectificador}} &= 0,8078 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.31)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 1,0401 I_{DC} \\ I_{RMS_{rectificador}} &= 1,0333 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.32)$$

La tensión media suministrada por el rectificador a la carga es:

$$V_0 = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} V \approx 1,35 V \quad (10.33)$$

donde:

V Tensión efectiva línea a línea de la fuente.

En la figura 10.21, se presenta el contenido armónico de las corrientes de la figura 10.20, en porcentaje del valor de la fundamental.

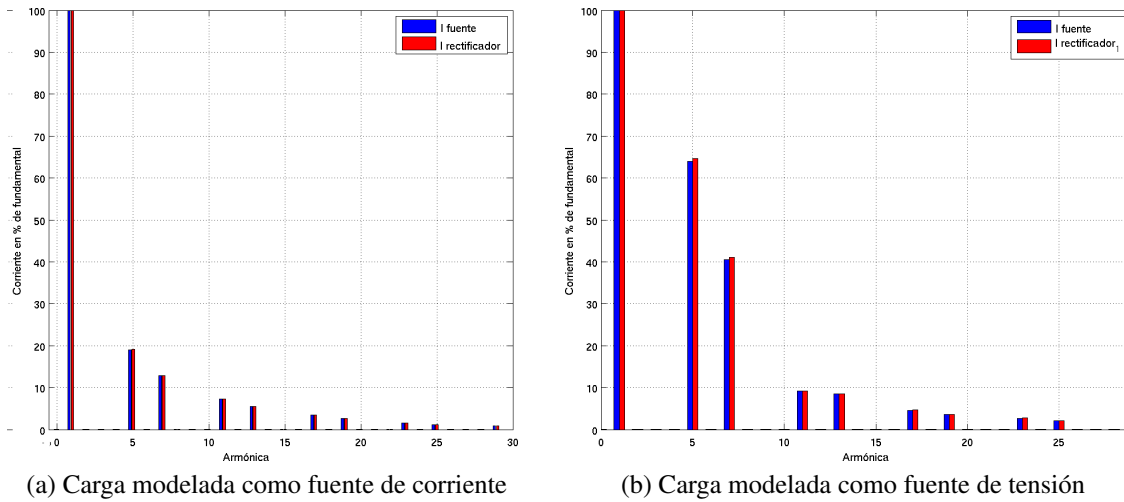


Figura 10.21: Contenido armónico de la forma de onda de la corriente de la figura 10.20

El factor de distorsión armónica de corriente en los devanados del transformador es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

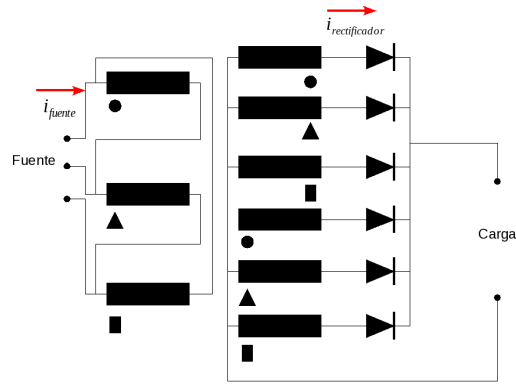
$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,2515 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 0,2524 \end{aligned} \quad (10.34)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

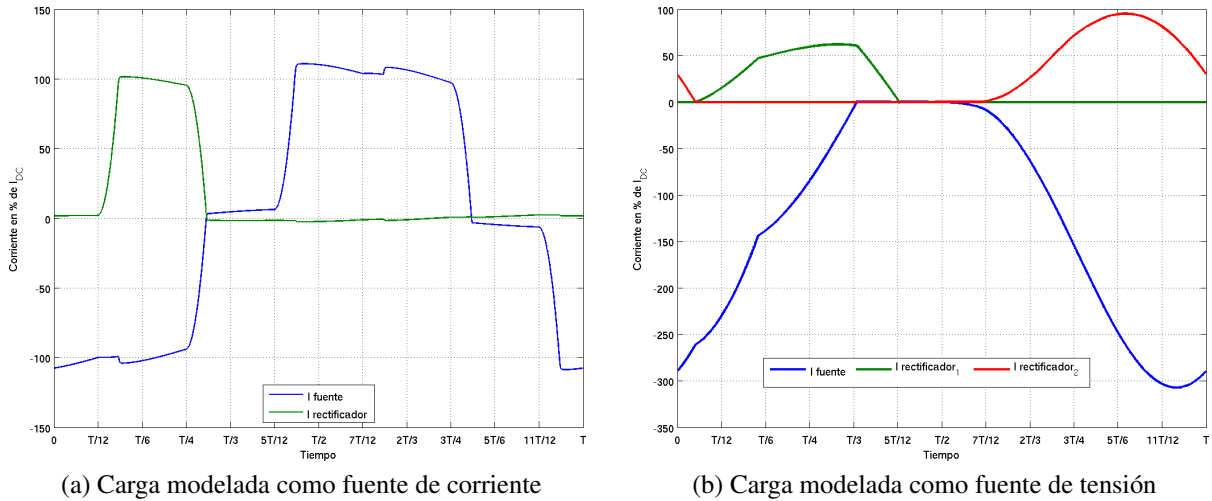
$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,7707 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 0,7792 \end{aligned} \quad (10.35)$$

10.7. Rectificador hexafásico de media onda

En la figura 10.22, se presenta el esquema del rectificador Hexafásico de media onda con transformador Dy . Este circuito se utiliza para circuitos de alta potencia y baja tensión.

Figura 10.22: Rectificador hexafásico de media onda con transformador Dy

En la figura 10.23, se presenta la forma de onda de corriente sobre el primario del transformador (i_{fuente}) y la corriente que suministra el secundario del transformador ($i_{rectificador}$) al rectificador de la figura 10.22, las formas de onda están en porcentaje del valor de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}).

Figura 10.23: Forma de onda de la corriente en los devanados del transformador (Dy) que alimenta el rectificador hexafásico de media onda

La corriente efectiva en cada devanado del transformador en función de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}) es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 0,8336 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador}} &= 0,3902 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.36)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 1,6923 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador}} &= 0,2826 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.37)$$

La tensión media suministrada por el rectificador a la carga es:

$$V_0 \approx 0,780V \quad (10.38)$$

donde:

V Tensión efectiva línea a línea de la fuente.

En la figura 10.24, se presenta el contenido armónico de las corrientes de la figura 10.23, en porcentaje del valor de la fundamental.

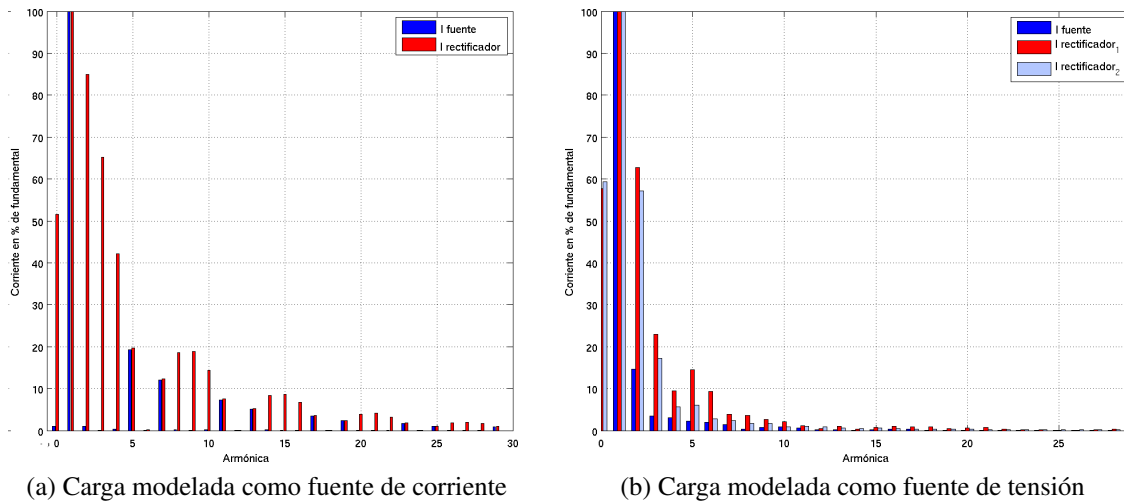


Figura 10.24: Contenido armónico de la forma de onda de la corriente de la figura 10.23

El factor de distorsión armónica de corriente en los devanados del transformador es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,2494 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 1,4279 \end{aligned} \quad (10.39)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 1,1700 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 1,0748 \end{aligned} \quad (10.40)$$

10.8. Rectificador hexafásico

En la figura 10.25, se presenta el esquema del rectificador Hexafásico de onda completa con transformador Dd . Este circuito se utiliza para circuitos de alta potencia y media tensión.

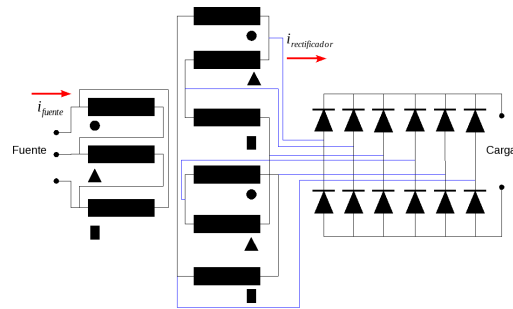


Figura 10.25: Rectificador hexafásico de onda completa con transformador Dd

En la figura 10.26, se presenta la forma de onda de corriente sobre el primario del transformador (i_{fuente}) y la corriente que suministra dos fases del secundario del transformador ($i_{rectificador_{1,2}}$) al rectificador de la figura 10.25, las formas de onda están en porcentaje del valor de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}).

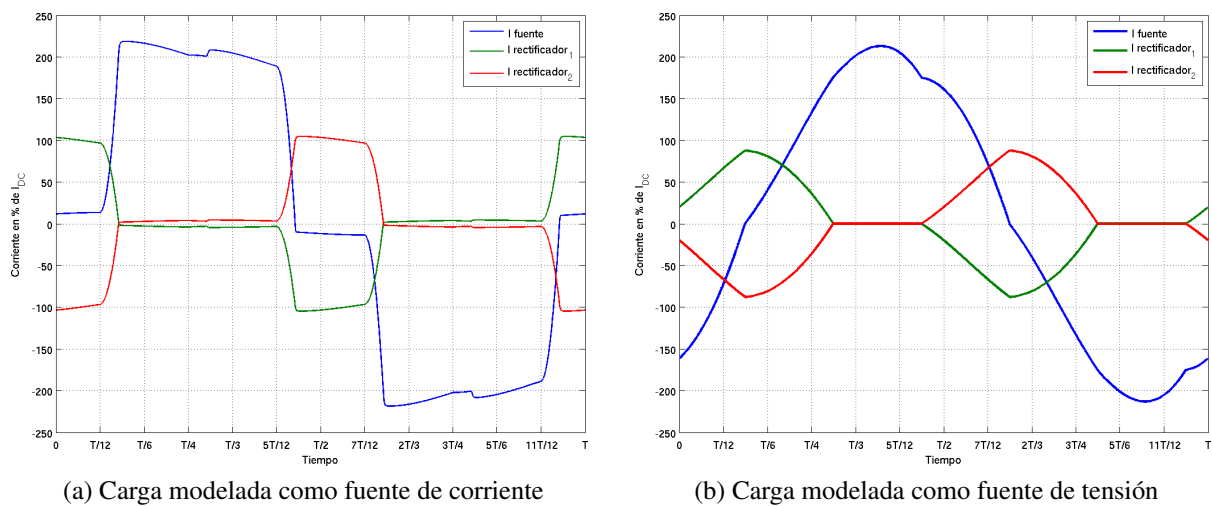


Figura 10.26: Forma de onda de la corriente en los devanados del transformador (Dd) que alimenta el rectificador hexafásico de onda completa

La corriente efectiva en cada devanado del transformador en función de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}) es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 1,6538 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador}} &= 0,5674 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.41)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 1,4840 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador}} &= 0,4646 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.42)$$

La tensión media suministrada por el rectificador a la carga es:

$$V_0 \approx 1,56V \quad (10.43)$$

donde:

V Tensión efectiva línea a línea de la fuente.

En la figura 10.27, se presenta el contenido armónico de las corrientes de la figura 10.26, en porcentaje del valor de la fundamental.

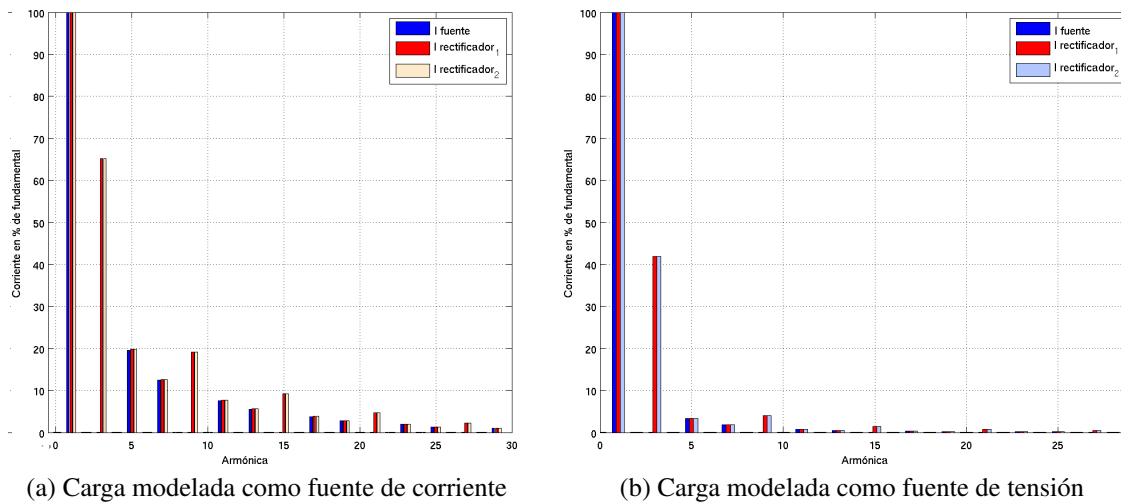


Figura 10.27: Contenido armónico de la forma de onda de la corriente de la figura 10.26

El factor de distorsión armónica de corriente en los devanados del transformador es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,2557 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 0,7345 \end{aligned} \quad (10.44)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} THD_{i_{fuente}} &= 0,0399 \\ THD_{i_{rectificador}} &= 0,4228 \end{aligned} \quad (10.45)$$

10.9. Rectificador Dodecafásico o de 12 pulsos

En la figura 10.28, se presenta el esquema del rectificador dodecafásico o de 12 pulsos, este rectificador requiere para su implementación de un transformador de tres devanados con conexión *Dyd*. Este circuito se utiliza para circuitos de alta potencia y alta tensión.

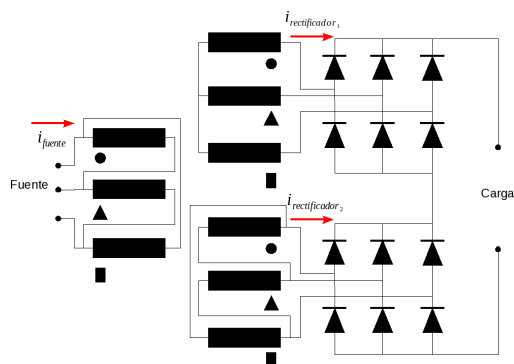
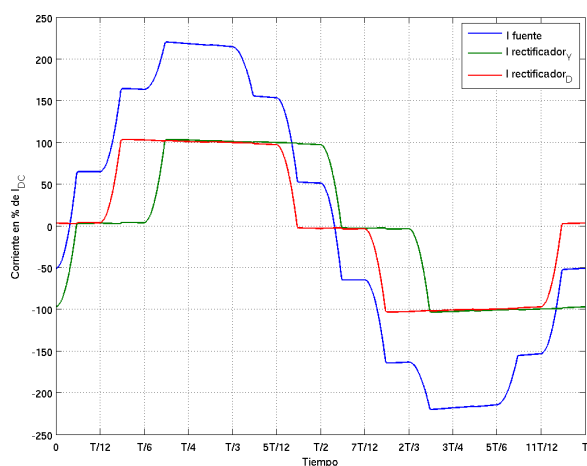
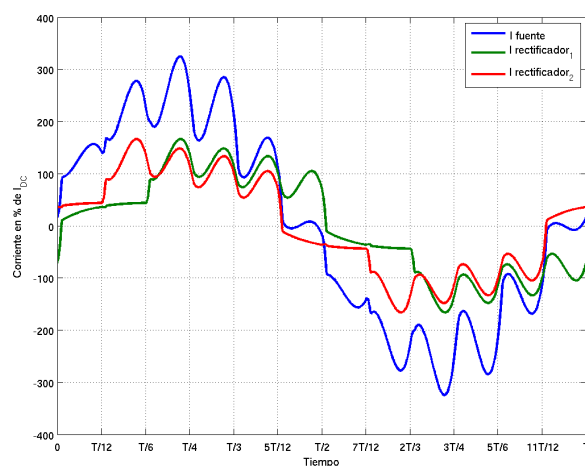


Figura 10.28: Rectificador dodecafásico o de 12 pulsos

En la figura 10.29, se presenta la forma de onda de corriente sobre el primario del transformador (i_{fuente}) y la corriente que suministra los dos secundarios del transformador ($i_{rectificador_{Y,D}}$) al rectificador de la figura 10.28, las formas de onda están en porcentaje del valor de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}).



(a) Carga modelada como fuente de corriente



(b) Carga modelada como fuente de tensión

Figura 10.29: Forma de onda de la corriente en los devanados del transformador (*Dyd*) que alimenta el rectificador dodecafásico

La corriente efectiva en cada devanado del transformador en función de la corriente en la barra de corriente continua (I_{DC}) es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 1,5764 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador_Y}} &= 0,8079 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador_D}} &= 0,8080 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.46)$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned} I_{RMS_{fuente}} &= 1,8541 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador_Y}} &= 0,9350 I_{DC} \\ I_{RMS_{Rectificador_D}} &= 0,9350 I_{DC} \end{aligned} \quad (10.47)$$

La tensión media suministrada por el rectificador a la carga es:

$$V_0 \approx 2,70V \quad (10.48)$$

donde:

V Tensión efectiva línea a línea de la fuente.

En la figura 10.30, se presenta el contenido armónico de las corrientes de la figura 10.29, en porcentaje del valor de la fundamental.

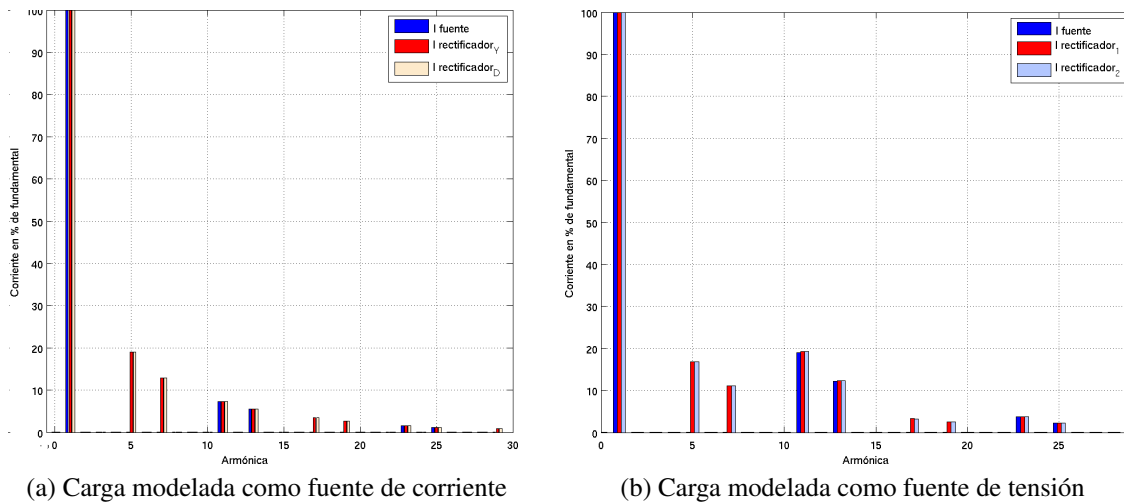


Figura 10.30: Contenido armónico de la forma de onda de la corriente de la figura 10.29

El factor de distorsión armónica de corriente en los devanados del transformador es:

- Para carga modelada como fuente de corriente

$$\begin{aligned}
THD_{i_{fuente}} &= 0,2298 \\
THD_{i_{rectificador_Y}} &= 0,2516 \\
THD_{i_{rectificador_D}} &= 0,2516
\end{aligned}
\tag{10.49}$$

- Para carga modelada como fuente de tensión

$$\begin{aligned}
THD_{i_{fuente}} &= 0,0937 \\
THD_{i_{rectificador_Y}} &= 0,3108 \\
THD_{i_{rectificador_D}} &= 0,3108
\end{aligned}
\tag{10.50}$$

10.10. Límites de distorsión de corriente

Idealmente, la distorsión armónica causada por un solo consumidor puede ser limitada a un nivel aceptable en algún punto del sistema; en tanto que el sistema completo puede ser operado sin distorsión armónica sustancial en cualquier parte del mismo. Los límites de distorsión armónica para sistemas de distribución hasta 69 kV son:

Tabla 10.1: Límites de distorsión armónica de corriente para sistemas de distribución en general (desde 120 V hasta 69 kV) [3]

$\frac{I_{SC}}{I_L}$	$h < 11$	$11 \leq h < 17$	$17 \leq h < 23$	$23 \leq h < 35$	$35 \leq h$	THD
$< 20^*$	4,0	2,0	1,5	0,6	0,3	5,0
$20 < 50$	7,0	3,5	2,5	1,0	0,5	8,0
$50 < 100$	10,0	4,5	4,0	1,5	0,7	12,0
$100 < 1000$	12,0	5,5	5,0	2,0	1,0	15,0
> 1000	15,0	7,0	6,0	2,5	1,4	20,0

- * Todo equipo de generación de potencia está limitado a estos valores de distorsión de corriente, sin tener en cuenta la relación $\frac{I_{SC}}{I_L}$.

Donde:

I_{SC} Corriente máxima de cortocircuito en la barra de alimentación común a otras cargas.

I_L Corriente de carga (componente fundamental) en la barra de alimentación.

Estos límites pueden ser utilizados como valores de diseño de un sistema en "condiciones ideales" de operación. Para periodos cortos, durante arranques o en condiciones inusuales, los límites

pueden excederse en 50 %. Esta tabla esta formulada en base a los rectificadores de 6 pulsos para usarse con rectificadores de mas fases se pueden incrementar los valores en:

$$k = \sqrt{\frac{\#fases}{6}} \quad (10.51)$$

10.11. Ejercicios

1. Encuentre las expresiones en régimen permanente de la corriente y los valores medios y efectivos de la tensión y corriente para una carga activa *RLE* alimentada desde un puente rectificador de media onda trifásico controlado.
2. Repita el ejercicio anterior para un puente hexafásico no controlado de onda completa.
3. Explique las ventajas y desventajas desde el punto de vista de la carga y del sistema de potencia de utilizar un puente dodecafásico al compararlo con un puente trifásico de onda completa.
4. Explique la estrategia a utilizar para lograr que los rectificadores se ajusten a la distorsión armónica recomendada en la tabla 10.1.

Parte IV

Puentes AC - AC

Controlador AC - AC

11.1. Aspectos Generales

Los controladores AC - AC tienen como finalidad suministrar tensión y corriente alterna variable a partir de una fuente alterna. Su operación se basa en la conexión y desconexión a intervalos regulares de la fuente sobre la carga. Este convertidor está conformado por dos semiconductores de potencia colocados en antiparalelo que controlan la conexión de la fuente en cada semiciclo. Por el tipo de componente de potencia que se utiliza en su construcción se clasifican en dos tipos: Controlado (dos SCR o TRIAC) y Semicontrolado (SCR y Diodo). En la figura 11.1 se observa el esquema de un puente semicontrolado y controlado monofásico.

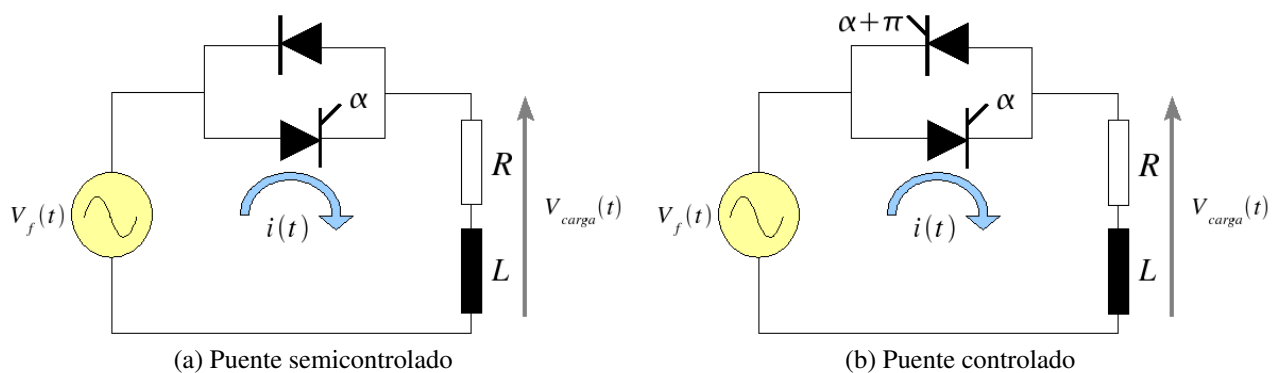


Figura 11.1: Controlador AC - AC

11.2. Aplicaciones

- Hornos industriales.
- Hornos de inducción.

- Control de iluminación.
- Arranque y control de velocidad de motores de inducción.
- Control de reactivos.
- Relés de estado solido.

11.3. Puente Semicontrolado Monofásico

11.3.1. Formas de onda

En la figura 11.2 se presenta la forma de onda de tensión y corriente sobre la carga resistiva inductiva. En la figura se presenta el contenido armónico de tensión y corriente sobre la carga del puente de la figura 11.1a. Para la simulación se utilizó una fuente sinusoidal de $120V$ eficaz, a $60Hz$, una carga resistiva inductiva de 60Ω y $223mH$ y un ángulo de disparo (α) de $3\pi/2$.

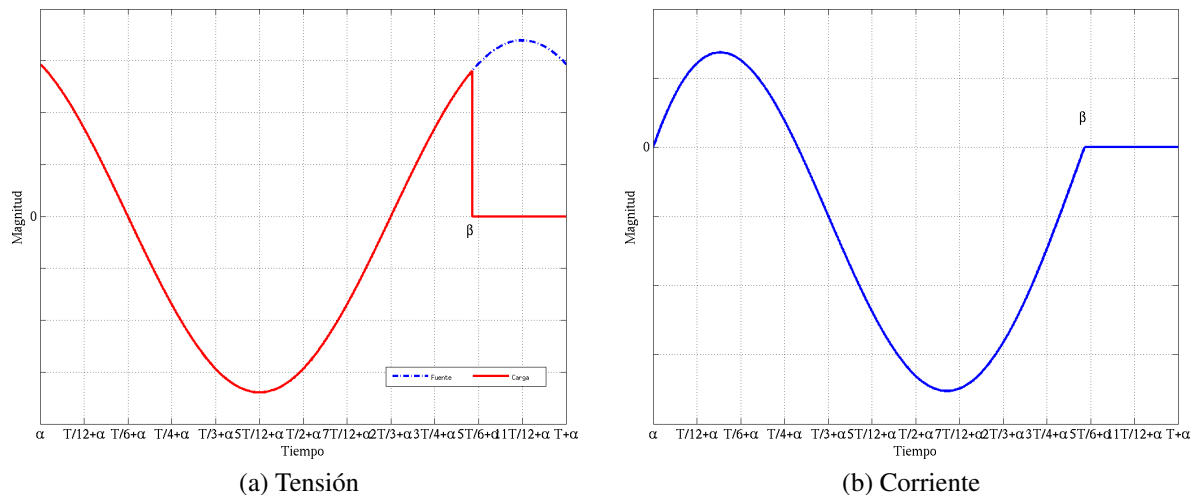


Figura 11.2: Tensión y corriente en la carga para un controlador AC - AC semicontrolado

Se puede observar en la figura anterior que el puente posee control en el semiciclo en el cual el tiristor conduce. En la figura 11.2 se puede observar como la corriente en el diodo es mayor que en el tiristor, este aspecto debe tomarse en cuenta al momento de especificar cada componente. Ambas componentes durante su conducción son sometidas a tensiones positivas y negativas ánodo - cátodo. Entre las características de este puente se puede destacar que introduce componentes de

tensión y corriente media sobre la carga y armónicas de baja frecuencia a la red de alimentación y la carga. En la figura 11.3 se presenta los espectros armónicos de tensión y corriente originados por este puente.

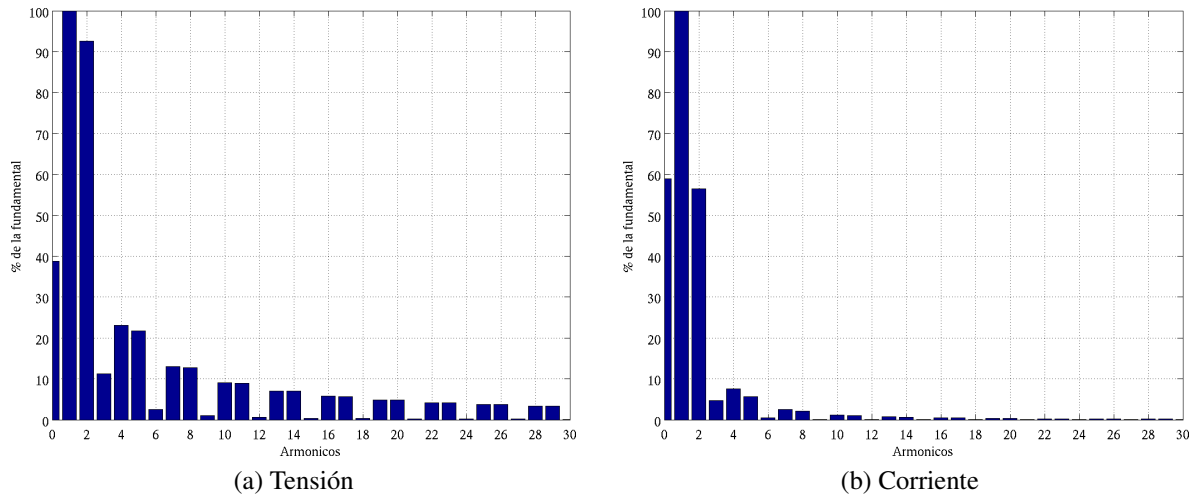


Figura 11.3: Contenido armónico sobre la carga para el controlador AC - AC semicontrolado

El factor de distorsión armónica (*THD*) para la simulación en tensión es: 0,4582 y en corriente: 0,3265. La tensión efectiva para este ángulo de disparo es de: 108,1223 V y la corriente efectiva es: 1,0014 A.

Este puente no se puede utilizar para el control de máquinas eléctricas debido a la componente de continua en tensión y corriente que ocasionaría la saturación del circuito magnético del convertidor electromagnético.

11.3.2. Expresión de Corriente $\alpha \leq \omega t \leq \beta$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left(\sin(\omega t - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{\frac{-(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) \quad (11.1)$$

donde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right)$$

11.3.3. Ángulo de Apagado (β)

$$\text{sen}(\beta - \varphi) - \text{sen}(\alpha - \varphi)e^{\frac{-(\beta - \alpha)}{\tan(\varphi)}} = 0 \quad (11.2)$$

11.3.4. Límite de Controlabilidad

- Como la operación de este convertidor electrónico se basa en la operación no simultánea de las componentes electrónicas, esto se alcanza al cumplir la condición:

$$\alpha + 2\pi \geq \beta \quad (11.3)$$

- El límite de controlabilidad del puente se obtiene para el rango de ángulo de encendidos comprendidos en el intervalo:

$$\varphi \leq \alpha \leq \pi \quad (11.4)$$

11.3.5. Tensión Efectiva

$$V_{rms} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \text{sen}(\omega t) \right)^2 d\omega t$$

$$V_{rms} = V \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left[\gamma - \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} + \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right]} \quad (11.5)$$

11.3.6. Corriente Efectiva

$$I_{rms} = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left(\text{sen}(\omega t - \varphi) - \text{sen}(\alpha - \varphi)e^{\frac{-(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) \right]^2 d\omega t} \quad (11.6)$$

11.3.7. Simulación

```

1  % Controlador AC - AC Semi controlado monofásico
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \text{sen}(\omega t)$ 
3  % Datos
4  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
5  R=input('Resistencia [Ohm] ');

```

```

6  L=input('Inductancia [H] ');
7  f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
8  alfa2=input('Angulo de Encendido en grados ');
9
10 % Variables
11 a=alfa2*pi/180;
12 fi=atan(2*pi*f*L/R)
13 Z=sqrt((2*pi*f*L)^2+R^2);
14
15 % Cálculo del angulo de apagado
16 beta=fsolve(@(t) sin(t-fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan(fi)), [2*pi])
17
18 % Límite de controlabilidad
19 if beta>=a+2*pi;
20 disp('el puente no esta controladondo ');
21 t=linspace(a,a+2*pi,1000);
22 v=sqrt(2)*V*sin(t);
23 i=sqrt(2)*V/Z*sin(t-fi);
24 else
25     beta*180/pi
26     t=linspace(a,beta,1000);
27     ta=linspace(beta,a+2*pi,500);
28     i=sqrt(2)*V/Z*(sin(t-fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan(fi)));
29     v=[sqrt(2)*V*sin(t),zeros(size(ta))];
30     t=[t,ta];
31     i=[i,zeros(size(ta))];
32 end
33
34 % Corrientes y Tensión efectiva
35 Irms_carga=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,i.^2))
36 Vrms_carga=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,v.^2))
37 Irms_scr=Irms_carga/sqrt(2)
38
39 % Cálculo de potencia
40 P=R*Irms_carga^2
41 fp_fuente=P/(V*Irms_carga)
42 fp_carga=P/(Vrms_carga*Irms_carga)
43
44
45 % Graficas

```

```

46 vf=sqrt(2)*V*sin(t);
47 vx=[v];
48 ix=[i];
49 t1=t;
50 figure(1)
51 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
52 legend('Fuente','Carga');
53 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Symbol');
54 xlim([a 2*pi+a]);
55 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
56 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
57 % set(gca,'YTickLabel',' ')
58 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
59 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
60 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
61
62 figure(2)
63 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
64 xlim([a 2*pi+a]);
65 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Symbol');
66 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
67 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
68 % set(gca,'YTickLabel',' ')
69 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
70 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
71
72 % Primera Armónica
73 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,vx.*exp(j*t1)))/sqrt(2)
74 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1)))/sqrt(2)
75
76 % THD
77 THDv=sqrt(Vrms_carga^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
78 THDi=sqrt(Irms_carga^2-Irms_1^2)/Irms_1

```

11.4. Puente Controlado Monofásico

Este puente se construye con dos tiristores en antiparalelo o un triac. La ventaja al utilizar un triac es que debido a que ambos tiristores se fabrican sobre la misma pastilla de silicio sus características son idénticas lo cual origina que el control de los semiciclos positivos y negativos sean idénticos eliminando cualquier componente de continua sobre la carga y fuente. Al utilizar dos tiristores en antiparalelo como sus características no son idénticas sobre la carga pueden aparecer pequeñas diferencias en los semiciclos originando la aparición de una componente DC.

11.4.1. Forma de onda

En la figura 11.4 se presenta las formas de onda de tensión y corriente para una carga resistiva inductiva originado por el puente controlado de la figura 11.1b. Para la simulación se utilizó una fuente sinusoidal de $120V$ eficaces, a $60Hz$, una carga resistiva inductiva de 60Ω y $223mH$ y un ángulo de disparo (α) de $3\pi/2$. La corriente media sobre cada semiconductor no es nula debido a que su operación es unidireccional y su corriente eficaz por la simetría, corresponde a $1/\sqrt{2}$ de la de la carga.

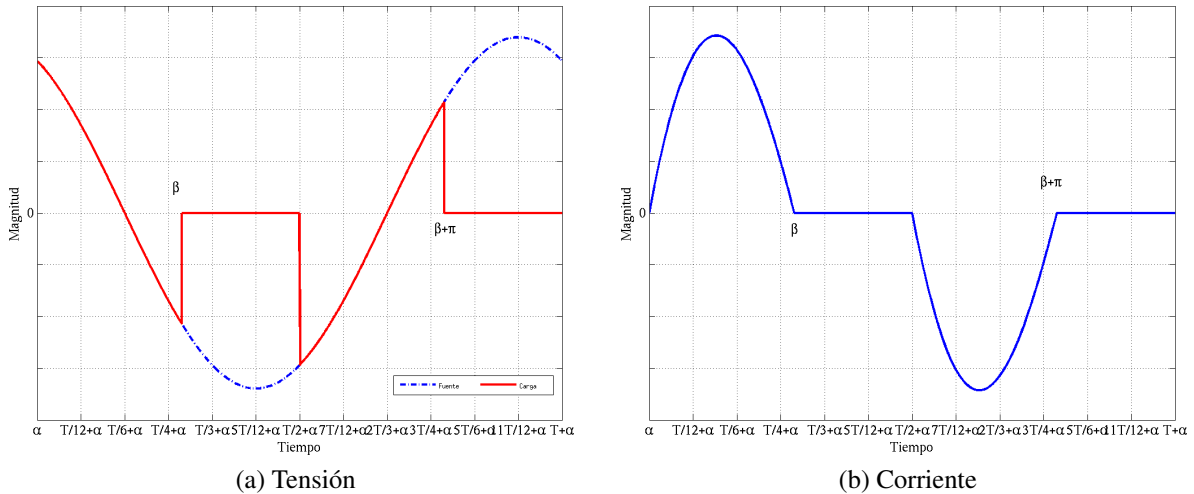


Figura 11.4: Tensión y corriente en la carga para un controlador AC - AC semicontrolado

En la figura 11.5 se presenta el espectro armónico de tensión y corriente sobre la carga obtenida en la simulación. El factor de distorsión armónica (THD) para la simulación en tensión es: $0,7726$ y en corriente: $0,2589$. La tensión efectiva para este ángulo de disparo es de: $93,859V$ y la corriente efectiva es: $0,7496A$. Este puente para la misma carga y ángulo de disparo presenta mayor distorsión armónica que el semicontrolado.

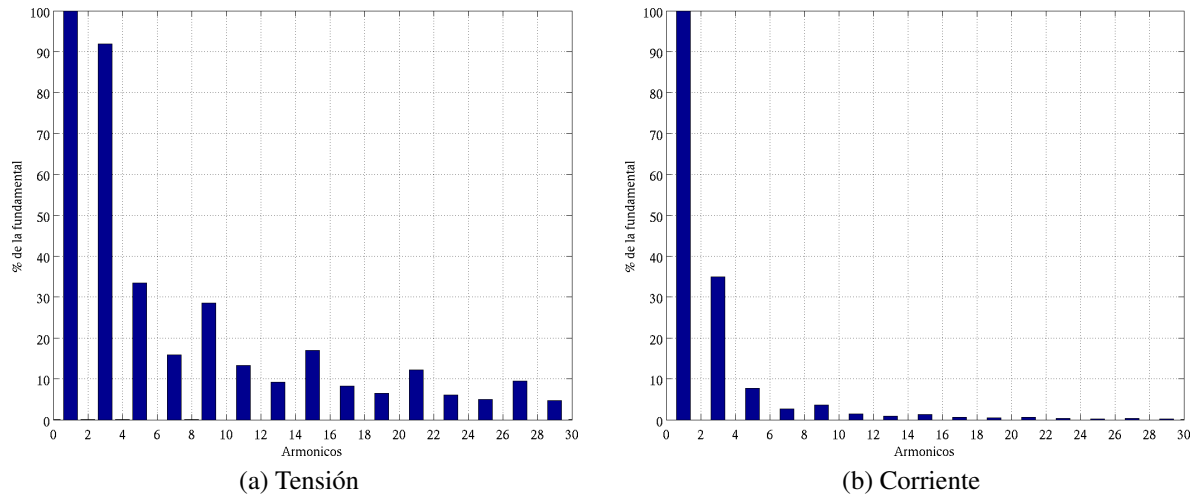


Figura 11.5: Contenido armónico sobre la carga para el controlador AC - AC controlado

Entre las características de este puente se puede destacar: los tiristores no conducen simultáneamente, la tensión sobre la carga es la misma de la fuente cuando alguna de las dos componentes se encuentra en conducción y nula cuando están apagadas. La corriente y tensión media sobre la carga y fuente son nulas si la operación del puente es simétrica para ambos semiciclos.

11.4.2. Expresión de Corriente

Durante un semiciclo de operación se puede evaluar la expresión de la corriente resolviendo la ecuación diferencial:

$$v_f(t) = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (11.7)$$

Para una alimentación sinusoidal de la forma $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$ con condición inicial de corriente cero para el tiempo de encendido (α) la expresión (11.7) durante el semiciclo positivo, resulta:

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left(\sin(\omega t - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{\frac{-(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) \quad (11.8)$$

donde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right)$$

La expresión (11.8) es válida para los tiempos comprendidos entre el ángulo de encendido (α) y el de apagado (β) y es similar a la obtenida para un puente rectificador de media onda controlado. El semiciclo negativo es simétrico por lo cual se puede utilizar la expresión anterior con signo contrario.

11.4.3. Ángulo de Apagado (β)

El ángulo de apagado para los tiristores corresponde al instante de tiempo en el cual la corriente pasa por cero. Este instante se calcula igualando la expresión (11.8) a cero.

$$\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left(\sin(\beta - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{\frac{-(\beta - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) = 0 \quad (11.9)$$

La solución de la expresión (11.9) posee dos soluciones triviales ($Z = \infty$ y $V = 0$) estas soluciones implican uno la ausencia de carga conectada y la otro la no energización del circuito. Por lo cual la solución se reduce a:

$$\sin(\beta - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) e^{\frac{-(\beta - \alpha)}{\tan(\varphi)}} = 0 \quad (11.10)$$

La ecuación (11.10) no posee solución analítica debido a que es una ecuación trascendental por cual se debe resolver por métodos numéricos.

11.4.4. Límite de Controlabilidad

El funcionamiento de este convertidor electrónico se basa en la operación no simultánea de las componentes electrónicas, esto se alcanza al cumplir la condición:

$$\alpha + \pi \geq \beta \quad (11.11)$$

El valor límite de controlabilidad se alcanza cuando $\beta = \alpha + \pi$, que corresponde al ángulo de apagado crítico para pasar de operación no continuada a continuada. En esta condición si evaluamos la expresión (11.10), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha + \pi - \varphi) - \operatorname{sen}(\alpha - \varphi)e^{\frac{-\pi}{\tan(\varphi)}} &= 0 \\
-\operatorname{sen}(\alpha - \varphi) - \operatorname{sen}(\alpha - \varphi)e^{\frac{-\pi}{\tan(\varphi)}} &= 0 \\
\operatorname{sen}(\varphi - \alpha) \cdot \left(1 + e^{\frac{-\pi}{\tan(\varphi)}}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{11.12}$$

La expresión $\left(1 + e^{\frac{-\pi}{\tan(\varphi)}}\right)$ para cualquier valor de φ es positiva y esta acotada en el rango $[1, 2]$, es decir, que para que la expresión (11.12) se anula únicamente en $\alpha = \varphi$ y es negativa para valores de $\alpha \geq \varphi$ indicando que el ángulo de apagado (β) es menor que el ángulo límite de $\alpha + \pi$. Esta condición garantiza operación no continuada del puente. El límite de controlabilidad del puente se obtiene para el rango de ángulo de encendidos comprendidos en el intervalo:

$$\varphi \leq \alpha \leq \pi \tag{11.13}$$

Como la operación de este convertidor electrónico se basa en la operación no simultánea de las componentes electrónicas, esto se alcanza al cumplir la condición:

$$\alpha + \pi \geq \beta \tag{11.14}$$

11.4.5. Tensión Efectiva

La tensión efectiva sobre la carga se calcula a partir de la definición y de la tensión de la fuente como:

$$\begin{aligned}
V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sqrt{2}V \operatorname{sen}(\omega t) \right)^2 d\omega t} \\
V_{rms} &= \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t} \\
V_{rms} &= V \sqrt{\frac{1}{\pi} \left[\gamma - \frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2} \right]}
\end{aligned} \tag{11.15}$$

11.4.6. Corriente Efectiva

La corriente efectiva por la carga y la fuente, se calcula utilizando la expresión (11.8) como:

$$\begin{aligned}
I_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\sqrt{2}V}{Z} \left(\operatorname{sen}(\omega t - \varphi) - \operatorname{sen}(\alpha - \varphi)e^{\frac{-(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) \right]^2 d\omega t} \\
I_{rms} &= \frac{\sqrt{2}V}{Z} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left(\operatorname{sen}(\omega t - \varphi) - \operatorname{sen}(\alpha - \varphi)e^{\frac{-(\omega t - \alpha)}{\tan(\varphi)}} \right) \right]^2 d\omega t}
\end{aligned} \tag{11.16}$$

La corriente efectiva por cada tiristor se obtiene por superposición como:

$$I_{rms} = \sqrt{I_{rmsT1}^2 + I_{rmsT2}^2} \quad (11.17)$$

Como cada uno de los tiristores conduce en intervalos de tiempo iguales:

$$I_{rmsT1} = I_{rmsT2} = \frac{I_{rms}}{\sqrt{2}} \quad (11.18)$$

11.4.7. Configuraciones Adicionales

En la figura 11.6 se presentan dos configuraciones del puente controlador AC - AC controlado, para operaciones cuando la tensión de la fuente supera la especificación de los tiristores del puente. Generalmente estas configuraciones se utilizan cuando hay disponibilidad de componentes en el inventario de la empresa y no se desean adquirir nuevas componentes.

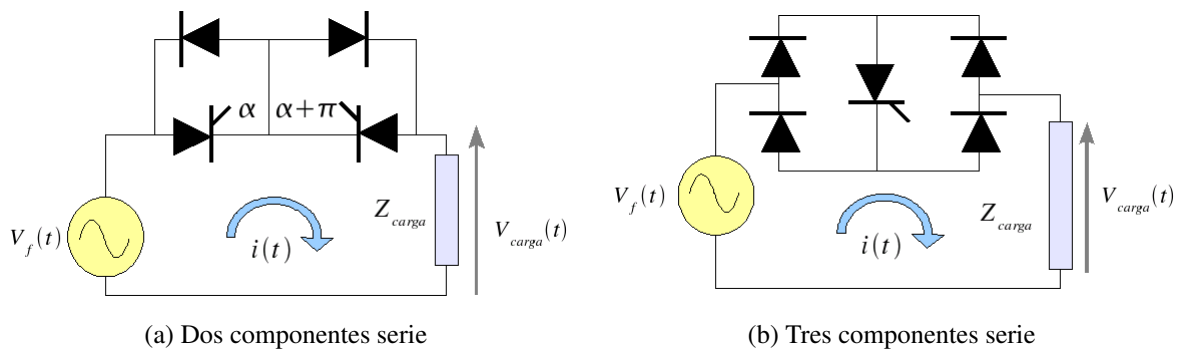


Figura 11.6: Configuraciones adicionales del controlador AC - AC monofásico.

11.4.8. Simulación

```

1  % Controlador AC - AC
2  %  $v_f(t) = \sqrt{2} * v * \sin(\omega t)$ 
3  % Datos
4  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal ');
5  R=input('Resistencia [Ohm] ');
6  L=input('Inductancia [H] ');
7  f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');
8  alfa2=input('Angulo de Encendido en grados ');
9
10 % Variables

```

```

11 a=alfa2*pi/180;
12 fi=atan(2*pi*f*L/R)
13 Z=sqrt((2*pi*f*L)^2+R^2);
14
15 % Ángulo de apagado
16 beta=fsolve(@(t) sin(t-fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan(fi)),[pi])
17
18 %Límite de controlabilidad
19 if beta>=a+pi;
20 disp('el puente no esta controladondo ');
21 t=linspace(a,a+2*pi,1000);
22 v=sqrt(2)*V*sin(t);
23 i=sqrt(2)*V/Z*sin(t-fi);
24 else
25 beta*180/pi
26 t=linspace(a,beta,1000);
27 ta=linspace(beta,a+pi,500);
28 tb=linspace(a+pi,beta+pi,1000);
29 tc=linspace(beta+pi,a+2*pi,500);
30 i=sqrt(2)*V/Z*(sin(t-fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan(fi)));
31 v=[sqrt(2)*V*sin(t),zeros(size(ta)),sqrt(2)*V*sin(tb),zeros(size(tc))
    ];
32 t=[t,ta,tb,tc];
33 i=[i,zeros(size(ta)),-i,zeros(size(tc))];
34 end
35
36 % Volores Efectivos de tensión y corriente
37 Irms_carga=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,i.^2))
38 Vrms_carga=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,v.^2))
39 Irms_scr=Irms_carga/sqrt(2)
40
41 % Cálculo de potencia
42 P=R*Irms_carga^2
43 fp_fuente=P/(V*Irms_carga)
44 fp_carga=P/(Vrms_carga*Irms_carga)
45
46
47 % Graficas
48 vf=sqrt(2)*V*sin(t);
49 vx=[v];

```

```

50 ix=[i];
51 t1=t;
52 figure(1)
53 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
54 legend('Fuente','Carga');
55 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Symbol');
56 xlim([a 2*pi+a]);
57 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
58 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
59 % set(gca,'YTickLabel',' ')
60 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
61 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
62 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
63
64 figure(2)
65 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
66 xlim([a 2*pi+a]);
67 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Symbol');
68 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
69 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
70 % set(gca,'YTickLabel',' ')
71 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
72 ylabel('Magnitud','fontsize',14,'fontname','Times');
73
74 % Primera Armónica
75 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,vx.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
76 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ix.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
77
78 % THD
79 THDv=sqrt(Vrms_carga^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
80 THDi=sqrt(Irms_carga^2-Irms_1^2)/Irms_1

```

11.5. Puente Controlado Trifásico

En la figura 11.7 se presenta el esquema de un puente controlador AC - AC trifásico para carga conectada en estrella y en delta.

La operación del puente trifásico depende de la estrategia de disparo de las componentes semiconductoras y se puede realizar con dos componentes conduciendo corriente positiva y una negativa o viceversa. En la figura 11.8 se muestra las formas de onda de corriente en la fase "a" y tensión línea línea "ab" para una carga resistiva inductiva (RL) conectada en estrella con los siguientes parámetros: tensión efectiva línea - línea de $416V$ a $60Hz$, resistencia de 10Ω e inductancia de $30mH$ y un ángulo de encendido de $1,3963rad$.

En la figura 11.9 se presenta la corriente por los dos tiristores que componen el puente en la fase "a". Al igual que en el caso monofásico la corriente en régimen permanente es simétrica en el semiciclo positivo y negativo.

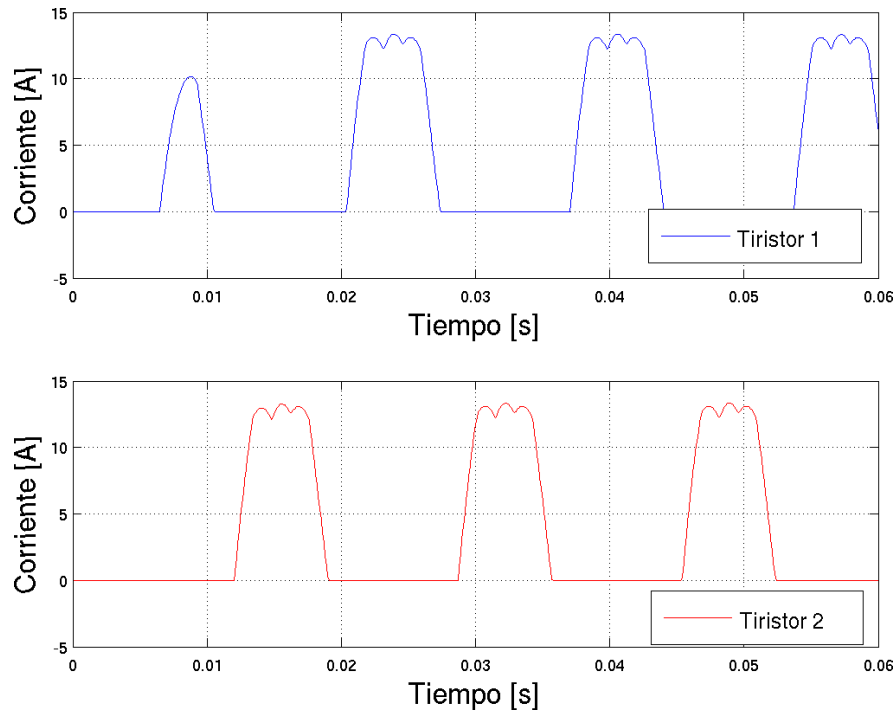
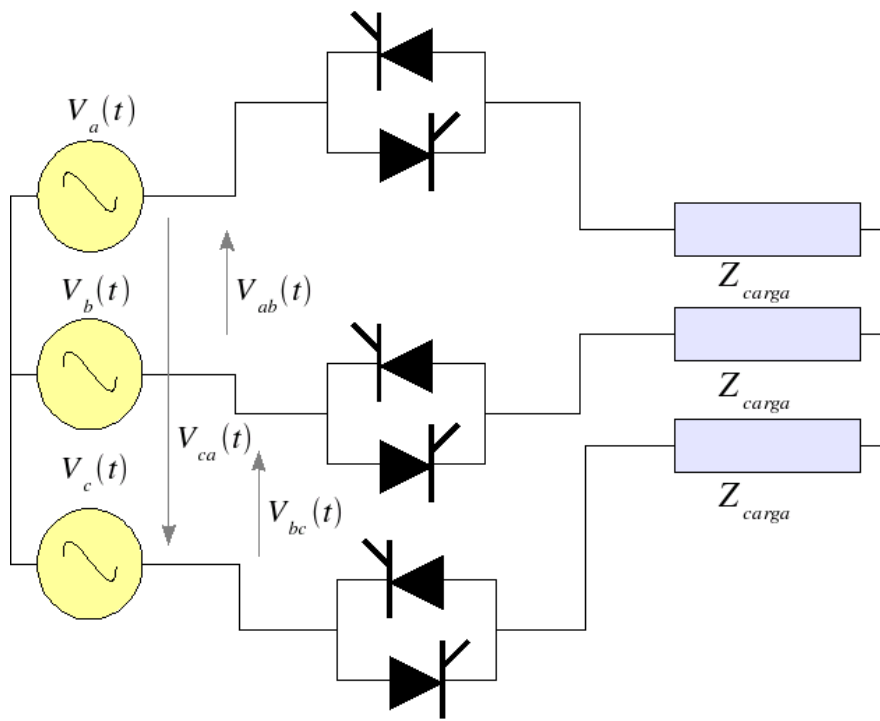
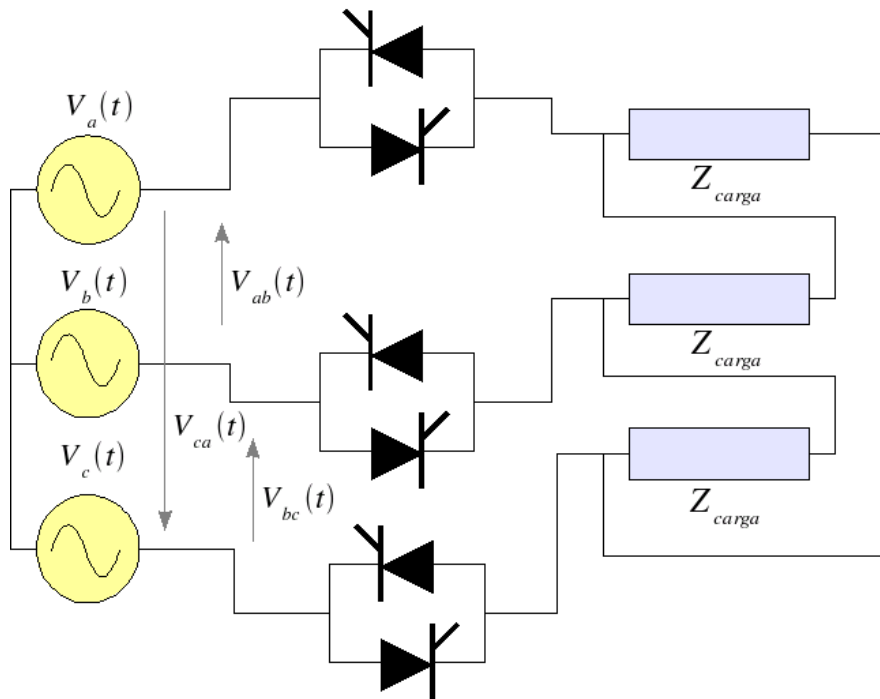


Figura 11.9: Corriente en las componentes de la fase "a"

En la figura 11.10 se presenta el espectro armónico de tensión y corriente sobre la carga obtenida en la simulación. El factor de distorsión armónica (THD) para la simulación en tensión es: $0,7202$ y en corriente: $0,1580$. La tensión efectiva para este ángulo de disparo es de: $322,5936V$ y la corriente efectiva es: $10,0788A$.



(a) Carga en estrella



(b) Carga en delta

Figura 11.7: Esquema del puente controlador AC - AC trifásico

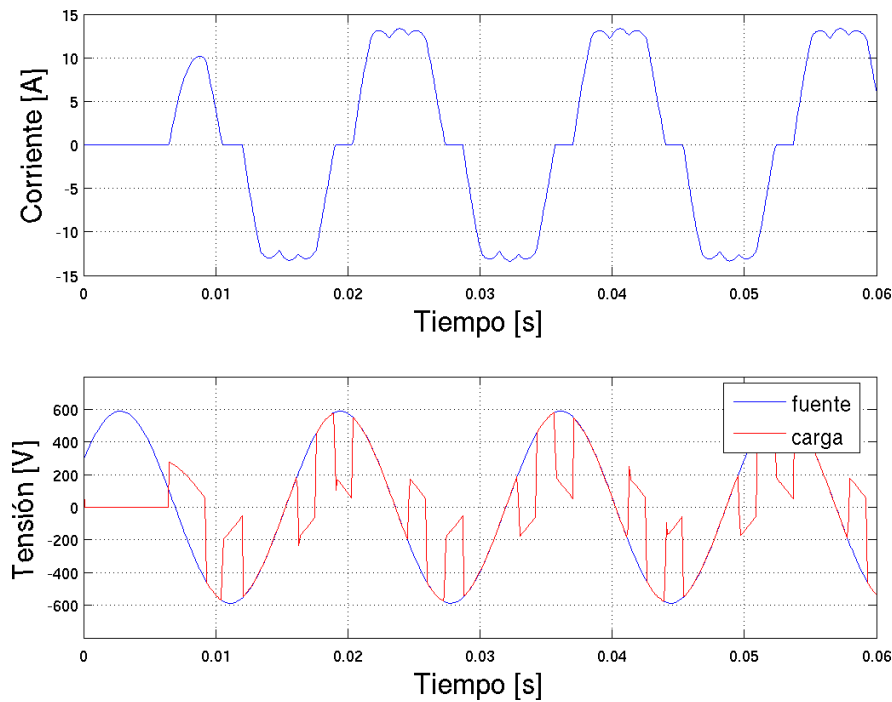


Figura 11.8: Formas de onda de corriente y tensión sobre la carga para el puente trifásico

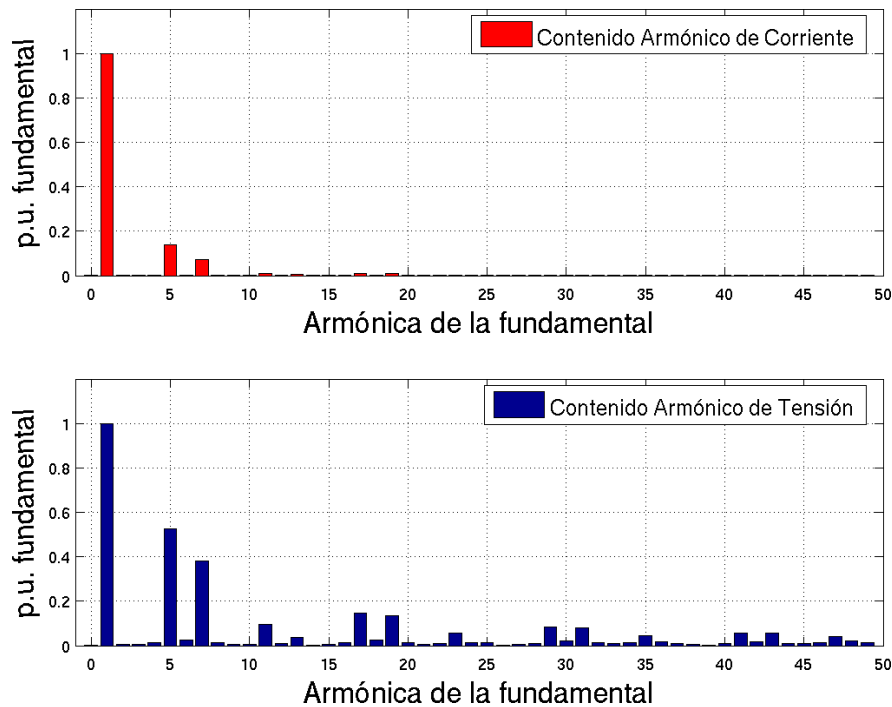


Figura 11.10: Contenido armónico de la corriente y tensión para el puente trifásico

Otra configuración utilizada de los puentes de la figura 11.7a, en donde el puente se utiliza para interconectar la fuente con la carga es el presentado en la figura (11.11) en donde el convertidor se utiliza para realizar la conexión del neutro en la carga.

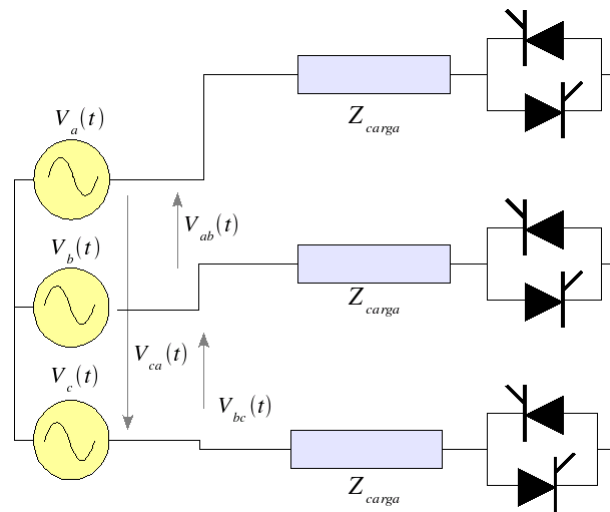


Figura 11.11: Puente convertidor trifásico para conexión de neutro.

11.5.1. Configuraciones en Delta

En la sección anterior se presentó el controlador AC - AC como interconexión entre la fuente y la carga, esta configuración permite controlar la tensión efectiva sobre cargas conectadas en estrella (figura 11.7a) o delta (figura 11.7b). Cuando se dispone de acceso a los seis terminales que conforman la carga, se puede conectar esta en serie con el convertidor de potencia y conformar una delta con esta configuración. En la figura 11.12 se presenta el esquema de conexión propuesto. Este esquema presenta por cada rama un comportamiento similar al puente monofásico tanto a nivel de tensiones como corrientes y el control de cada rama se desfasa en $2\pi/3$ de la anterior.

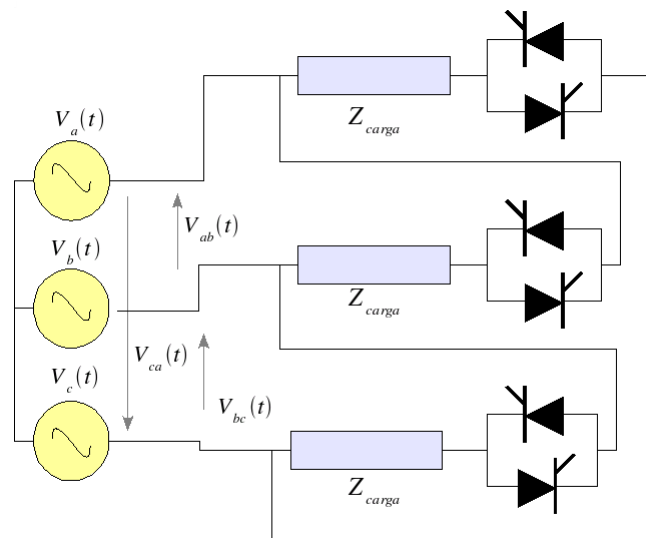


Figura 11.12: Puente controlador AC - AC trifásico en delta (carga y convertidor)

En la figura 11.13 se presenta la tensión línea a línea de este convertidor para una carga resistiva inductiva alimentada desde un sistema trifásico sinusoidal de secuencia positiva. En la figura 11.14, se presenta la corriente en las tres ramas de la carga y por las fases “a”, “b” y “c” suministradas por la fuente. Finalmente, en la figura 11.15 se presenta el espectro armónico de la corriente (i_{ab}) de la carga y de la fase (i_a) de la fuente. Se puede observar como las armónicas múltiplos de tres de la corriente quedan atrapadas en la delta y no circulan hacia la fuente.

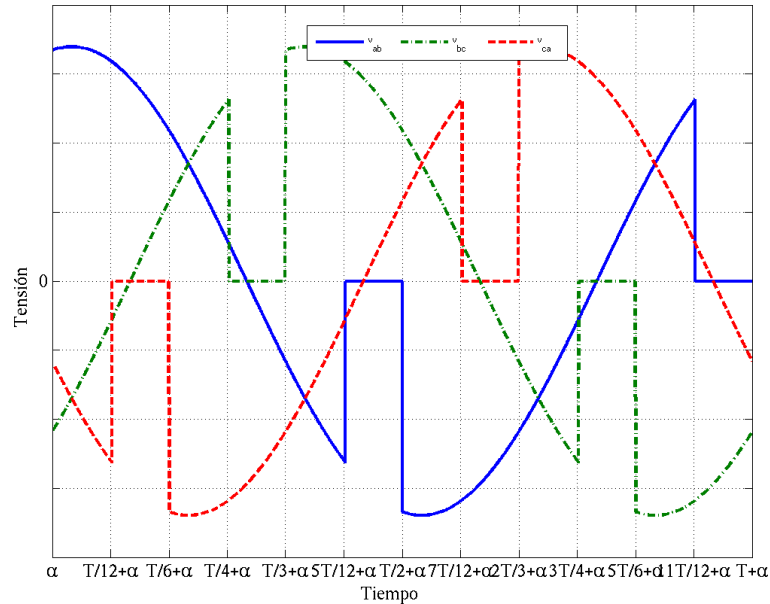


Figura 11.13: Tensión línea a línea sobre la carga

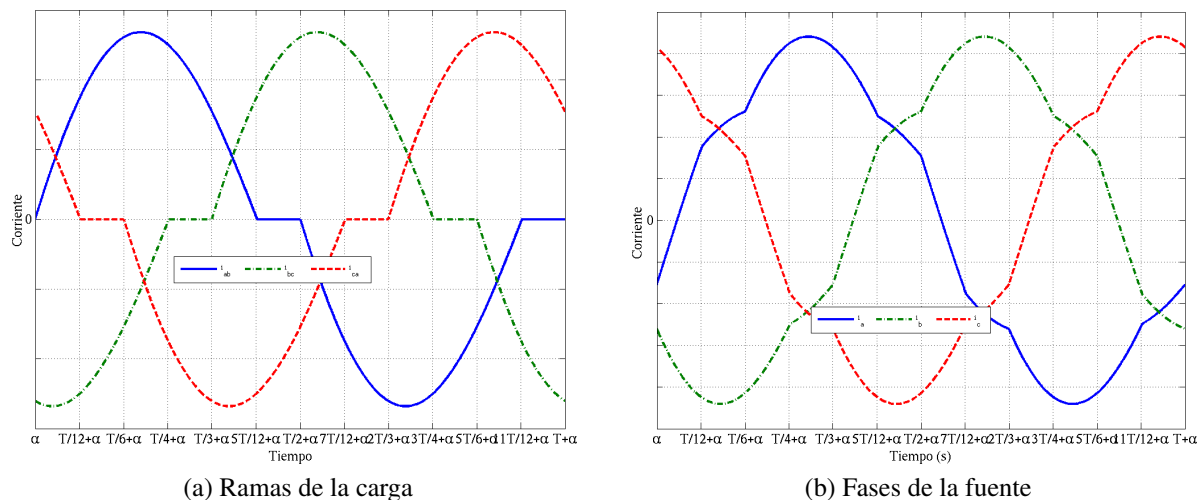


Figura 11.14: Corrientes en las fases de la fuente y ramas de la carga

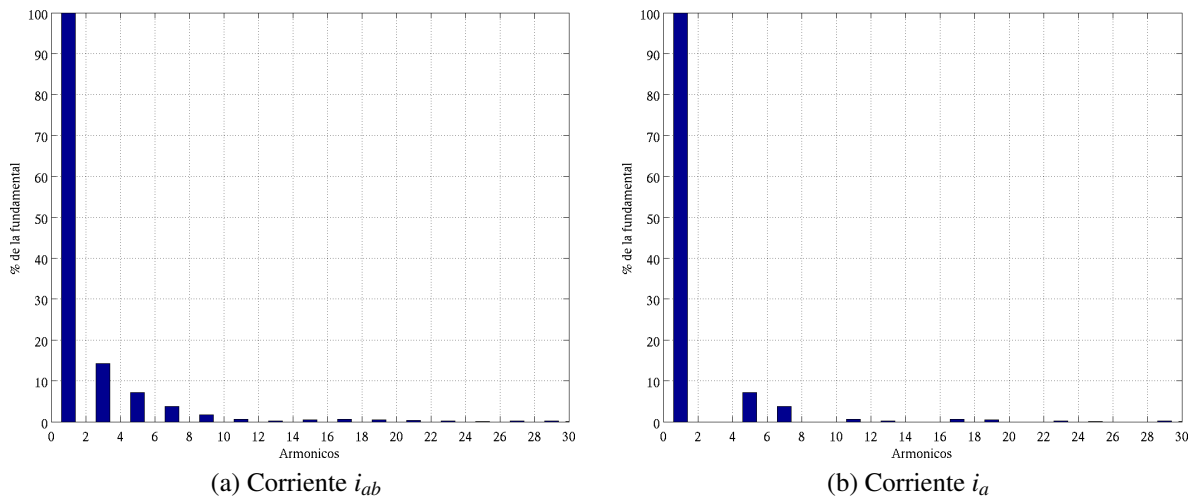


Figura 11.15: Contenido armónico

Otro esquema utilizado para configuraciones en delta se presenta en la figura 11.16. Esta configuración permite utilizar la mitad de las componentes que el puente anterior y alterna la conexión de la fuente línea a línea con dos ramas de la delta en serie.

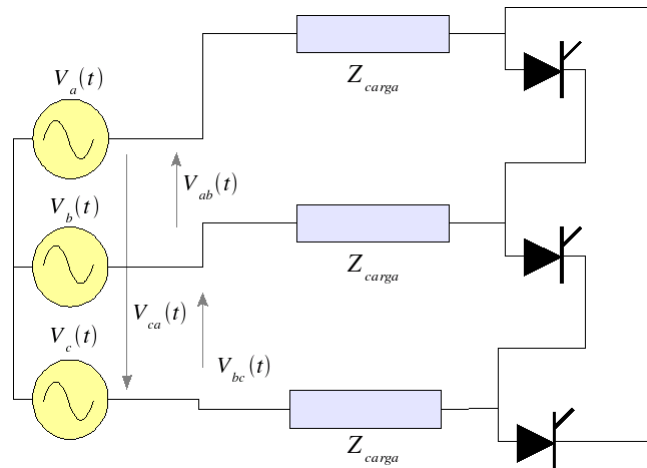


Figura 11.16: Puente controlador AC - AC trifásico en delta (convertidor)

11.5.2. Simulación

```

1  % Puente controlador AC-AC trifásico en delta (carga y convertidor)
2  % Datos
3  V=input('Tension efectiva de la fuente sinusoidal (V_a_b) ');
4  R=input('Resistencia [Ohm] ');
5  L=input('Inductancia [H] ');
6  f=input('Frecuencia de la fuente [Hz] ');

```

```

7  alfa2=input('Angulo de Encendido en grados ');
8
9  % Variables
10 a=alfa2*pi/180;
11 fi=atan(2*pi*f*L/R)
12 Z=sqrt((2*pi*f*L)^2+R^2);
13 beta=fsolve(@(t) sin(t-fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan(fi)),[pi])
14
15 % Condición de operación
16 if beta>=a+pi;
17 disp('el puente no esta controladondo ');
18 t=linspace(a,a+2*pi,2400);
19 v=sqrt(2)*V*sin(t);
20 i=sqrt(2)*V/Z*sin(t-fi);
21 else
22 beta*180/pi
23 x=round((beta-a)/pi*1200);
24 t=linspace(a,beta,x);
25 ta=linspace(beta,a+pi,1200-x);
26 i=sqrt(2)*V/Z*(sin(t-fi)-sin(a-fi)*exp(-(t-a)/tan(fi)));
27 v=[sqrt(2)*V*sin(t),zeros(size(ta))];
28 t=[t,ta];
29 i=[i,zeros(size(ta))];
30 v=[v,-v];
31 i=[i,-i];
32 t=[t,t+pi];
33 end
34
35 %Corrientes en las líneas
36 iab=i;
37 ibc=[[i(1601:2400),i(1:1600)]];
38 ica=[[i(801:2400),i(1:800)]];
39
40 % Corrientes en las fases
41 ia=iab-ica;
42 ib=ibc-iab;
43 ic=ica-ibc;
44
45 % Tensiones en las líneas
46 vab=v;

```

```

47 vbc=[v(1601:2400),v(1:1600)];
48 vca=[v(801:2400),v(1:800)];
49
50 % Valores Efectivos
51
52 Irms_a=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,ia.^2))
53 Vrms_ab=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,vab.^2))
54 Irms_ab=sqrt(1/(2*pi)*trapz(t,iab.^2))
55 P=3*R*Irms_ab^2
56 fp_fuente=P/(sqrt(3)*V*Irms_a)
57 fp_carga=P/(sqrt(3)*Vrms_ab*Irms_a)
58 %
59 %
60 % Graficas
61 vf=sqrt(2)*V*sin(t);
62 t1=t;
63 figure(1)
64 plot(t1,vab,t1,vbc,'-.',t1,vca,'--','LineWidth',2);grid
65 legend('v_a_b','v_b_c','v_c_a','Location','Best','Orientation','
    horizontal');
66 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Symbol');
67 xlim([a 2*pi+a]);
68 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
69 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
70 % set(gca,'YTickLabel',' ')
71 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
72 ylabel('Tensión (V)','fontsize',14,'fontname','Times');
73 set(legend,'FontSize',12,'FontName','Time');
74
75 figure(2)
76 plot(t1,ia,t1,ib,'-.',t1,ic,'--','LineWidth',2);grid
77 legend('i_a','i_b','i_c','Location','Best','Orientation','horizontal'
    );
78 xlim([a 2*pi+a]);
79 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Symbol');
80 set(gca,'XTick',a:pi/6:2*pi+a);
81 set(gca,'XTickLabel',{'a','T/12+a','T/6+a','T/4+a','T/3+a','5T/12+a',
    'T/2+a','7T/12+a','2T/3+a','3T/4+a','5T/6+a','11T/12+a','T+a'})
82 % set(gca,'YTickLabel',' ')

```

```

83 xlabel('Tiempo (s)', 'fontsize', 14, 'fontname', 'Times');
84 ylabel('Corriente (A)', 'fontsize', 14, 'fontname', 'Times');
85 set(legend, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Time');
86
87 % Primera Armónica
88 Vrms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,vab.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
89 Irms_1=abs(1/pi*(trapz(t1,ia.*exp(j*t1))))/sqrt(2)
90
91 % THD
92 THDv=sqrt(Vrms_ab^2-Vrms_1^2)/Vrms_1
93 THDi=sqrt(Irms_a^2-Irms_1^2)/Irms_1

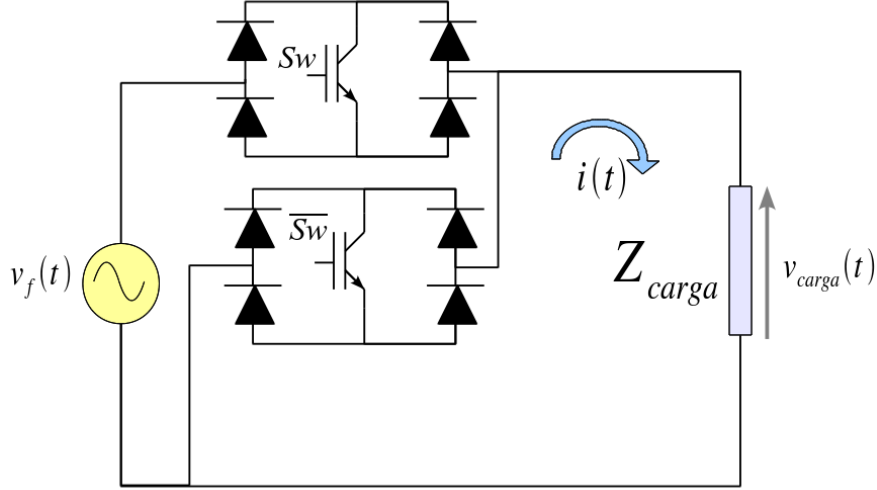
```

11.6. Controlador por Modulación de Ancho de Pulso

Los esquemas tradicionales de puentes controladores AC - AC contruidos con tiristores y triacs, permiten regular el valor efectivo de tensión suministrado en la carga cortocircuitos en intervalos regulares en función del ángulo de disparo (α). Esta estrategia introduce un alto contenido armónico a la red de alimentación como se observa en la secciones pasadas, para las simulaciones realizadas a nivel de puentes monofásico el factor de distorsión armónica (*THD*) esta alrededor del 77 % para un puente controlado. Adicionalmente las armónicas introducidas en la red, de mayor valor, son inferiores a la décimo tercera armónica (13^{va}), estas frecuencias poseen una alta probabilidad de resonancia con compensadores de reactivos pasivos instalados en el sistema o con configuraciones de circuitos tipo tanque (*LC*) debido a la combinación de la capacitancia e inductancia de los cables o líneas de transmisión.

Un esquema capaz de reducir el valor de las armónicas con mayor probabilidad de resonancia es distribuir el cortocircuito de la carga en el tiempo a través de técnicas de modulación. La técnica de modulación más utilizada para este fin, es la de control por ancho de pulso (*PWM*). Esta estrategia garantiza reducir el valor de las armónicas de baja frecuencia en función al número de pulsos empleados en la modulación. Este esquema adicional a la fundamental, introduce en su mayoría armónicas de altas frecuencias múltiplos de la frecuencia de la onda portadora, las cuales son rápidamente atenuadas por el sistema.

En la figura 11.17 se presenta el esquema del puente controlador AC - AC por modulación de ancho de pulso. Este puente esta compuesto por componentes bidireccionales de corriente que operan de forma complementaria entre si, una para la conexión de la carga a la fuente y la otra para el cortocircuito.

Figura 11.17: Puente controlador AC - AC con control por *PWM*

El análisis de este puente se puede realizar mediante Series de Fourier. La tensión del convertidor ($v_{convertidor}(t)$) se obtiene de la convolución del tren de pulso de la modulación ($g(t)$) y la tensión de la fuente ($v_f(t)$). Para este caso la tensión en bornes del convertidor es igual a la tensión de la carga.

$$v_{convertidor}(t) = v_{carga}(t) = g(t) \cdot v_f(t) \quad (11.19)$$

donde:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & kT_c < t < (k + \delta)T_c \\ 0 & (k + \delta)T_c < t < (k + 1)T_c \end{cases} \quad k \in \mathbb{N} \quad (11.20)$$

$$v_f(t) = \sqrt{2}V_{rms} \sin(\omega t) \quad (11.21)$$

En la expresión (11.20) δ corresponde al ciclo de trabajo de la modulación y esta comprendida entre 0 y 1. La corriente en la carga se puede calcular a partir de la Serie de Fourier de la tensión en la carga como:

$$i(t) = \Re_e \left(\sum_{n=1}^{\infty} I_n e^{-jn\omega t} \right) \quad (11.22)$$

donde:

$$I_n = \frac{1}{N} \mathcal{F} \{ v_{convertidor}(t) \}_n \cdot \frac{1}{Z_{carga}(n)} \quad (11.23)$$

En la figura 11.18 se presenta las gráficas de corriente y tensión para un controlador AC - AC controlado por *PWM* para una carga resistiva e inductiva de 22Ω y $223mH$, alimentada desde un sistema sinusoidal de tensión de $120V$ efectivos a una frecuencia de $60Hz$. Para la modulación se utilizo una frecuencia de portadora de 12 veces la fundamental ($720Hz$) con un ciclo de trabajo 40%.

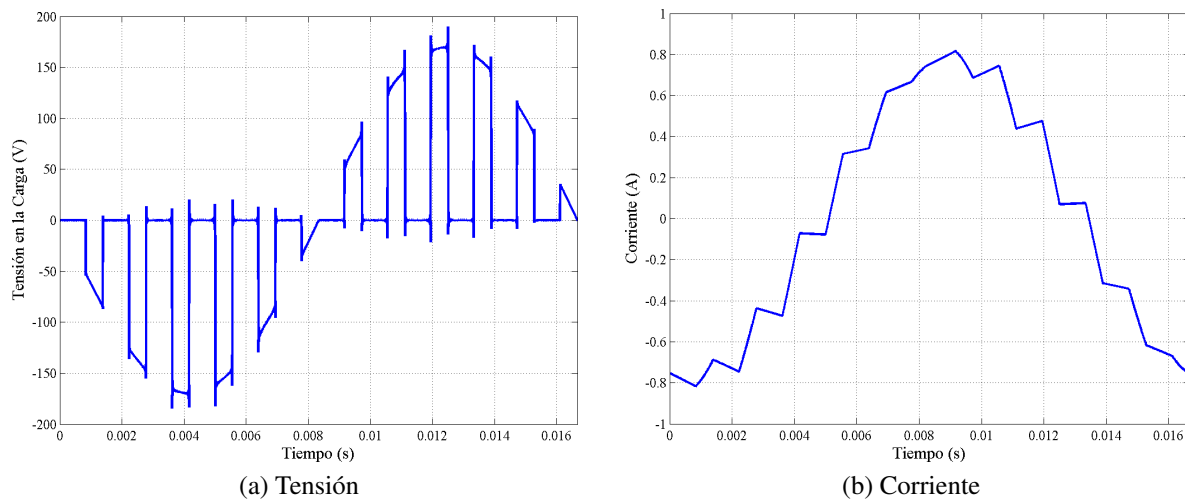


Figura 11.18: Tensión y corriente en la carga para un controlador AC - AC por *PWM*

En la figura 11.19 se presenta el espectro armónico de tensión y corriente sobre la carga obtenida en la simulación. El factor de distorsión armónica (*THD*) para la simulación en tensión es: 1,2253 y en corriente: 0,0947. La tensión efectiva para esta condición es de: $75,8678V$ y la corriente efectiva es: $0,5545A$. Los valores de la componente fundamental son en tensión $47,9708V$ y en corriente $0,552A$. Si se compara estos resultados al espectro armónico obtenido en la figura 11.5 se puede observar un menor contenido armónico en las corrientes de la carga, evidenciado por un menor *THD* y un menor contenido armónico en tensión para las armónicas inferiores a la décimo tercera sin incluir la fundamental. En la figura 11.19 se observa las componentes armónica en los entornos de la frecuencia de modulación empleada.

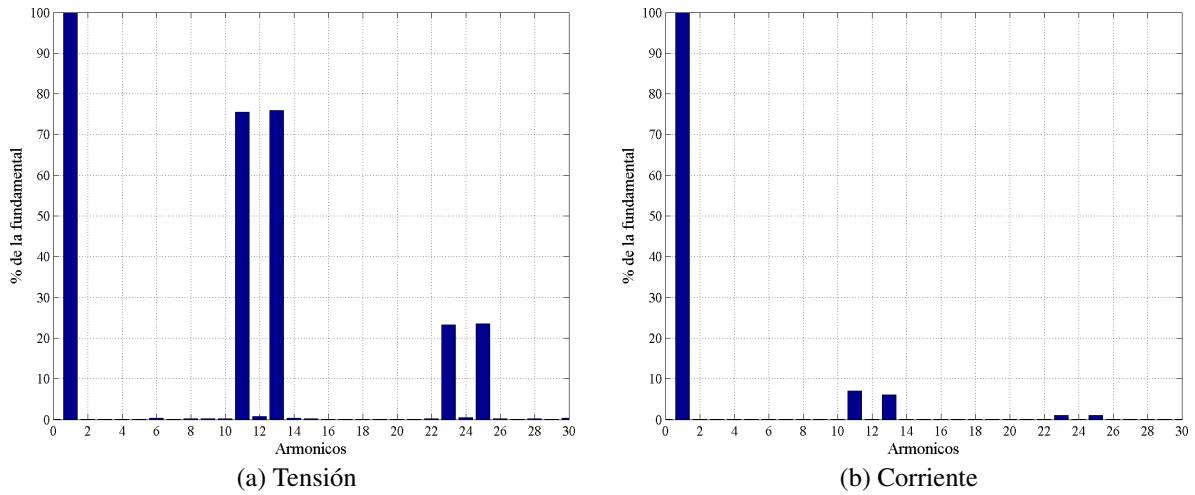


Figura 11.19: Contenido armónico de tensiones y corrientes para el controlador AC - AC por *PWM*

En la figura (11.20) se presenta es esquema de filtrado utilizado en esta topología de puente convertidor para reducir el contenido armónico de la tensión y corriente en la carga.

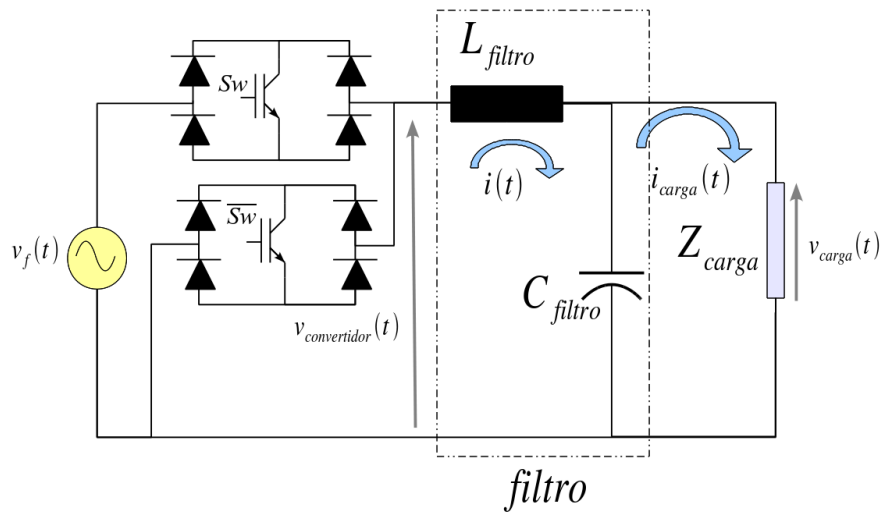


Figura 11.20: Puente controlador AC - AC con control por *PWM* con filtro

Para el puente de la figura (11.20), se puede calcular la tensión sobre la carga como:

$$v_{carga}(t) = \Re_e \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n e^{-jn\omega t} \right) \quad (11.24)$$

donde:

$$V_n = \frac{1}{N} \mathcal{F} \{ v_{convertidor}(t) \}_n \cdot \frac{Z_{carga}(n) \parallel \frac{1}{jn\omega C_{filtro}}}{Z_{carga}(n) \parallel \frac{1}{jn\omega C_{filtro}} + jn\omega L_{filtro}} \quad (11.25)$$

En la figura 11.21 se presenta las gráficas de corriente y tensión para un controlador AC - AC controlado por *PWM* para una carga resistiva e inductiva de 22Ω y $223mH$, alimentada desde un sistema sinusoidal de tensión de $120V$ efectivos a una frecuencia de $60Hz$. Para la modulación se utilizo una frecuencia de portadora de 12 veces la fundamental ($720Hz$) con un ciclo de trabajo 40%. Para el filtro se utilizo una capacitancia de $10\mu F$ y una inductancia de $60mH$ lo que origina una frecuencia de corte de $205,47Hz$.

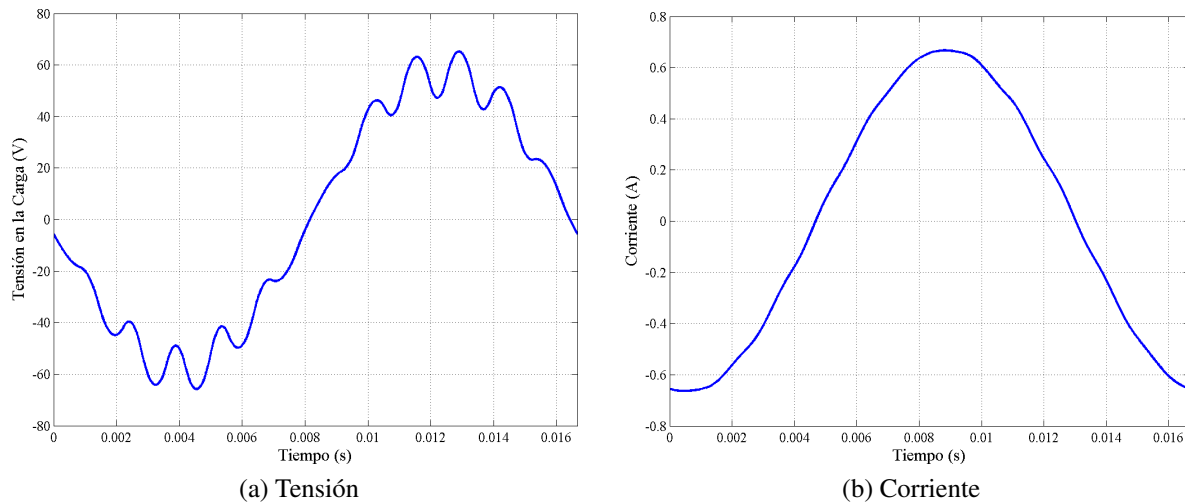


Figura 11.21: Tensión y corriente en la carga para un controlador AC - AC por *PWM* con filtro *LC*

En la figura 11.22 se presenta el espectro armónico de tensión y corriente sobre la carga obtenida en la simulación. El factor de distorsión armónica (*THD*) para la simulación en tensión es: 0,1197 y en corriente: 0,0947. La tensión efectiva para esta condición es de: $41,3497V$ y la corriente efectiva es: $0,5545A$. Los valores de la componente fundamental son en tensión $41,0568V$ y en corriente $0,552A$. La inclusión del filtro *LC* redujo en contenido armónico en la tensión y corriente en la carga. En la figura 11.22 se observa las componentes armónica en los entornos de la frecuencia de modulación empleada.

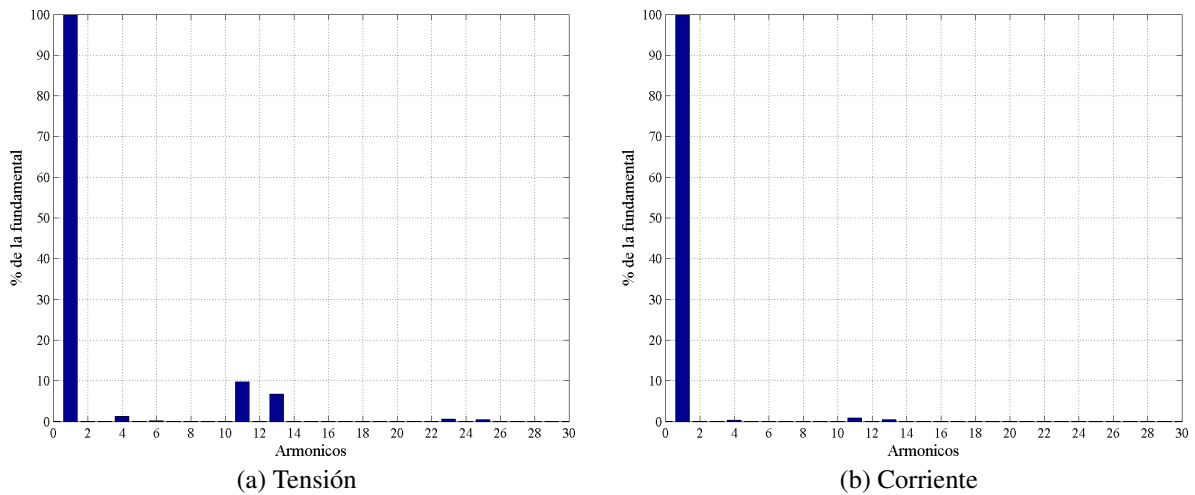


Figura 11.22: Contenido armónico de tensiones y corrientes para el controlador AC - AC por *PWM* con filtro *LC*

Se puede calcular el rizado de tensión y corriente en la carga en función de la inductancia y capacitancia del filtro como:

$$\Delta i = \frac{V_{rms1}(1-\delta)T_c}{L_{filtro}}$$

$$\Delta v_{carga} = \frac{\Delta i T_c}{\delta C_{filtro}} \quad (11.26)$$

De la expresión (11.26) se puede observar que para disminuir el rizado de tensión y corriente basta aumentar los valores de inductancia y capacitancia del filtro o aumentar la frecuencia de modulación (T_c^{-1}).

11.6.1. Simulación

Controlador AC AC por modulación de Ancho de pulso

```

1  % Controlador AC AC por Modulación de Ancho de Pulso (PWM)
2  % Datos
3  clear
4  clc
5  Vac    =input('Tension AC rms de la fuente ');
6  f      =input('Frecuencia fundamental [Hz] ');
7  R      =input('Resistencia de la carga [Ohm] ');

```

```

8      L      =input('Inductancia de la carga [H] ');
9      delta =input('Ciclo de trabajo (0 a 1)');
10     fc      =input('Frecuencia de modulación [Hz] ');
11     T=1/f;   % Perido de la Señal
12
13     % Analisis mediante Series de Fourier
14
15     % Funciones Temporales
16     t=linspace(0,T,5000);           % Tiempo se tomaran 5000 muestras
17     w=2*pi*f;                       % Frecuencia Eléctrica de la fuente
18     vf=sqrt(2)*Vac*sin(w*t);        % Tensión de la fuente
19     PWM=(square(2*pi*fc*t,delta*100)+1)*.5; % Modulación por ancho de Pulso
20     vf=vf.*PWM;                     % Tensión en bornes del convertidor
21
22     % Cálculo de la Serie de Fourier en basa de la FFT de la función
23     Cn_a=fft(vf)/(length(t)/2); % Serie de Fourier
24     Cn_a(1)=Cn_a(1)/2;           % Ajuste del valor medio
25
26     % Inicialización de Variables
27     vc=Cn_a(1)*ones(size(t));
28     ic=vc/R;
29     Vrms=abs(Cn_a(1))^2;
30     Irms=(abs(Cn_a(1))/R)^2;;
31     I1=0;
32     V1=0;
33
34     % Cálculo de tensión y corriente sobre la carga
35     for k=1:(length(t)/2);
36         n=k-1;                     % Orden armónico
37         Cn=Cn_a(k);                % Coeficiente C para la armónica n
38         Zc=R+j*n*w*L;              % Impedancia de la carga par la armónia n
39         % Corriente por el convertidor
40         ic=ic+real(Cn/Zc*exp(-j*2*pi*n*t/T));
41         % Tensión en la carga
42         vc=vc+real(Cn*exp(-j*2*pi*n*t/T));
43         % Valores Efectivos
44         if n==1
45             V1=abs(Cn/sqrt(2));
46             I1=abs((Cn/Zc)/sqrt(2));
47         end

```

```

48         Vrms=Vrms+abs(Cn^2)/2;
49         Irms=Irms+abs(Cn/Zc)^2/2;
50
51     end
52     % Cálculo del valor Efectivo
53     Vrms=sqrt(Vrms)
54     Irms=sqrt(Irms)
55     % Cálculo del THD
56     THD_v=sqrt(Vrms^2-V1^2)/V1
57     THD_i=sqrt(Irms^2-I1^2)/I1
58     % Cálculo de Fundamentales
59     V1
60     I1
61     % Graficas
62     figure(1) % Corriente en la Carga
63     plot(t,ic,'LineWidth',2);grid
64     set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
65     xlim([0 T]);
66     xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
67     ylabel('Corriente (A)','fontsize',14,'fontname','Times');
68     figure(2) % Tensión en la Carga
69     plot(t,vc,'LineWidth',2);grid
70     set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
71     xlim([0 T]);
72     xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
73     ylabel('Tensión en la Carga (V)','fontsize',14,'fontname','Times');

```

Controlador AC AC por modulación de ancho de pulso con filtro LC

```

1  % Controlador AC AC por Modulación de Ancho de Pulso (PWM) con Filtro LC
2  % Datos
3  clear
4  clc
5  Vac =input('Tension AC rms de la fuente ');
6  f =input('Frecuencia fundamental [Hz] ');
7  R =input('Resistencia de la carga [Ohm] ');
8  L =input('Inductancia de la carga [H] ');
9  Lf =input('Inductancia del filtro [H] ');
10 Cf =input('Capacitancia del filtro [F] ');

```

```

11 delta =input('Ciclo de trabajo (0 a 1)');
12 fc     =input('Frecuencia de modulación [Hz] ');
13 T=1/f;  % Perido de la Señal
14
15 % Analisis mediante Series de Fourier
16
17 % Funciones Temporales
18 t=linspace(0,T,5000);      % Tiempo se tomaran 5000 muestras
19 w=2*pi*f;                  % Frecuencia Eléctrica de la fuente
20 vf=sqrt(2)*Vac*sin(w*t);   % Tensión de la fuente
21 PWM=(square(2*pi*fc*t,delta*100)+1)*.5; % Modulación por ancho de Pulso
22 vf=vf.*PWM;                % Tensión en bornes del convertidor
23
24 % Cálculo de la Serie de Fourier en basa de la FFT de la función
25 Cn_a=fft(vf)/(length(t)/2); % Serie de Fourier
26 Cn_a(1)=Cn_a(1)/2;         % Ajuste del valor medio
27
28 % Inicialización de Variables
29 vc=Cn_a(1)*ones(size(t));
30 vco=Cn_a(1)*ones(size(t));
31 ic=Cn_a(1)/R*ones(size(t));
32 i=ic;
33 Vrms=abs(Cn_a(1))^2;
34 Irms=(abs(Cn_a(1))/R)^2;;
35 I1=0;
36 V1=0;
37
38 % Cálculo de tensión y corriente sobre la carga
39 for k=2:(length(t)/2);
40     n=k-1;                % Orden armónico
41     Cn=Cn_a(k);           % Coeficiente C para la armónica n
42     Zc=R+j*n*w*L;         % Impedancia de la carga par la armónica n
43     ZLf=j*n*w*Lf;         % Reactancia inductiva del filtro
44     Zcf=1/(j*n*w*Cf);     % Recatncia capacitiva del filtro
45     Zent=ZLf+Zcf*Zc/(Zcf+Zc); % Impedancia de entrada del convertidor
46     DT=Cn*(Zcf*Zc/((Zcf+Zc)*Zent)); % Caída de tensión en la carga
47     % Tensión en el convertidor
48     vco=vco+real(Cn*exp(-j*2*pi*n*t/T));
49     % Corriente por el convertidor
50     i=i+real(Cn/Zent*exp(-j*2*pi*n*t/T));

```

```

51         % Tensión en la carga
52         vc=vc+real(DT*exp(-j*2*pi*n*t/T));
53         % Corriente en la carga
54         ic=ic+real(DT/Zc*exp(-j*2*pi*n*t/T));
55         if n==1
56             V1=abs(DT/sqrt(2));
57             I1=abs((Cn/Zc)/sqrt(2));
58         end
59         Vrms=Vrms+abs(DT^2)/2;
60         Irms=Irms+abs(Cn/Zc)^2/2;
61     end
62     % Cálculo del valor Efectivo
63     Vrms=sqrt(Vrms)
64     Irms=sqrt(Irms)
65     % Cálculo del THD
66     THD_v=sqrt(Vrms^2-V1^2)/V1
67     THD_i=sqrt(Irms^2-I1^2)/I1
68     % Cálculo de Fundamentales
69     V1
70     I1
71     % Graficas
72     figure(1) % Corriente en la Carga
73     plot(t,ic,'LineWidth',2);grid
74     set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
75     xlim([0 T]);
76     xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
77     ylabel('Corriente (A)','fontsize',14,'fontname','Times');
78     figure(2) % Tensión en la Carga
79     plot(t,vc,'LineWidth',2);grid
80     set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
81     xlim([0 T]);
82     xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
83     ylabel('Tensión en la Carga (V)','fontsize',14,'fontname','Times');

```

Rutina para la evaluación de la Tensión efectiva del puente

```

1 % Controlador AC-AC por PWM Evaluación de Tensión Efectiva
2
3 % Datos

```

```

4
5 V=input('Tensión efectiva de la fuente ');
6 f=input('Frecuencia de la fuente ');
7 Duty=input('Porcentaje del Ciclo de Trabajo ');
8 fp=input('Múltiplo de la fundamental de la portadora ');
9
10 % Variables
11 fp=fp*f;
12 T=1/f;
13 t=linspace(0,T,1000);
14 Vf=sqrt(2)*V*sin(2*pi*f*t);
15 PWM=(square(2*pi*fp*t,Duty)+1)/2;
16 onda=PWM.*Vf;
17
18 % Contenido Armónico
19 Np=length(onda);
20 a=fft(onda)*2/Np;
21 a(1)=a(1)/2;
22
23 % Valores Efectivos de Tensión
24 np=floor(Np/2);
25 Vrms=sqrt((sum((abs(a(2:np))/sqrt(2)).^2))+abs(a(1))^2)
26 THDv= sqrt(Vrms^2-(abs(a(2))/sqrt(2))^2)/(abs(a(2))/sqrt(2))
27
28 % Figura
29 figure(1)
30 plot(t,Vf,t,onda,'r');grid
31 figure(2)
32 bar((0:49),abs(a(1:50))./abs(a(2)));
33 grid;
34 axis([-1 50 0 1.2]);
35 xlabel('Armónica de la fundamental')
36 ylabel('p.u. fundamental')
37 legend('Contenido Armónico de Tensión')

```

11.7. Compensador Estático de Reactivos

En la figura 11.23 se presenta el esquema de un compensador estático de reactivos, este puente esta conformado por un condensador en paralelo a un controlador AC - AC que alimenta a un inductor, la potencia reactiva entregada a la barra por el compensador se puede calcular como:

$$\begin{aligned} Q_{neta} &= Q_{inductor} - Q_{capacitor} \\ Q_{neta} &= \frac{V_L^2}{\omega L} - V^2 \omega C \end{aligned} \quad (11.27)$$

donde:

V Tensión efectiva de la barra de alimentación del SVS

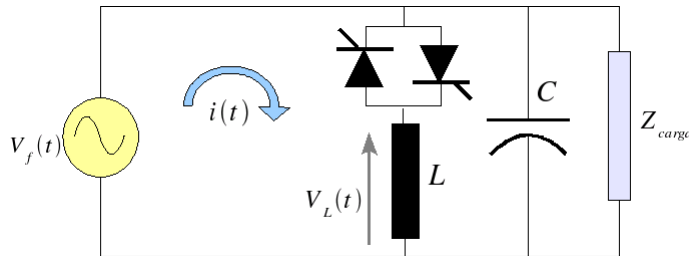


Figura 11.23: Esquema del compensador estático de reactivos

La tensión efectiva (V_L) sobre el inductor se puede calcular a partir de la expresión (11.15) con un ángulo de apagado de $2\pi - \alpha$ como:

$$V_L = V \sqrt{\left[2 - \frac{2\alpha}{\pi}\right]} \quad (11.28)$$

11.8. Ejercicios

1. Un controlador AC - AC monofásico, se alimenta de un sistema de $120V$ efectivos a $60Hz$ y alimenta una carga de $R = 22\Omega$ y $L = 20mH$. Este puente se acciona a dos ángulos de disparo de 45° y 90° . Determine: Valor efectivo de la corriente en la carga y los SCR, potencia consumida por la carga, factor de potencia de la fuente y carga y THD de tensión y corriente en la carga.
2. Una carga resistiva absorbe $200W$ cuando se conecta a una fuente de tensión de $240V$ efectivos @ $60Hz$. Diseñar un circuito en el que la misma resistencia absorba $200W$ cuando la tensión efectiva de la fuente sea de $416V$ @ $60Hz$.

3. Que ventaja y desventaja tiene utilizar para la construcción de este puente un triac en vez de dos SCR en anti paralelo.
4. Para el puente de la figura 11.24, determine en función de los ángulos de disparo α_1 y α_2 :

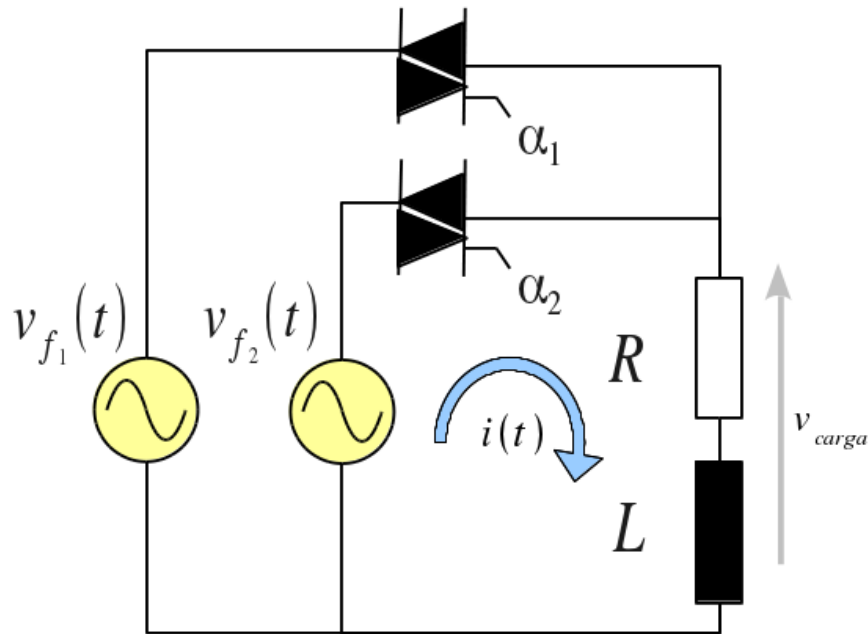


Figura 11.24: Ejercicio 4

- a) Expresiones de corriente en régimen permanente.
- b) Límite de controlabilidad.
- c) Formas de onda de tensión y corriente.
- d) Valor efectivo de la tensión y corriente sobre la carga.
- e) Contenido armónico de las tensiones y corrientes sobre la carga.

Parte V

Puentes DC - DC

Controlador DC - DC

12.1. Aspectos Generales

Los controladores DC - DC tiene como finalidad suministrar tensión y corriente continua variable a partir de una fuente de corriente continua. En la literatura a estos convertidores estáticos se les conoce como: "Chopper" o "Troceadores". Su principio de funcionamiento se basa en una operación periódica, en donde se suministra tensión de la fuente a la carga durante un tiempo (t_{on}) y posteriormente se aplica un cortocircuito sobre esta, el resto del período (T). Para la construcción de un chopper, se requieren componentes con control de encendido y apagado. En muchas oportunidades se han utilizado tiristores con circuitos auxiliares de apagado. En la figura 12.1 se ilustra el principio de funcionamiento, presentando la tensión sobre la carga.

La tensión media sobre la carga se puede calcular a partir de la definición como:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{T} \int_0^{t_{on}} V_{DC} dt \\ V_0 &= V_{DC} \frac{t_{on}}{T} \end{aligned} \quad (12.1)$$

Se define como razón de conducción del chopper (δ) al término:

$$\delta = \frac{t_{on}}{T} \quad (12.2)$$

Sustituyendo la definición de la ecuación (12.2) en la expresión (12.1), se obtiene la tensión media sobre la carga en función de la razón de conducción.

$$V_0 = V_{DC} \delta \quad (12.3)$$

donde:

$$0 \leq \delta \leq 1$$

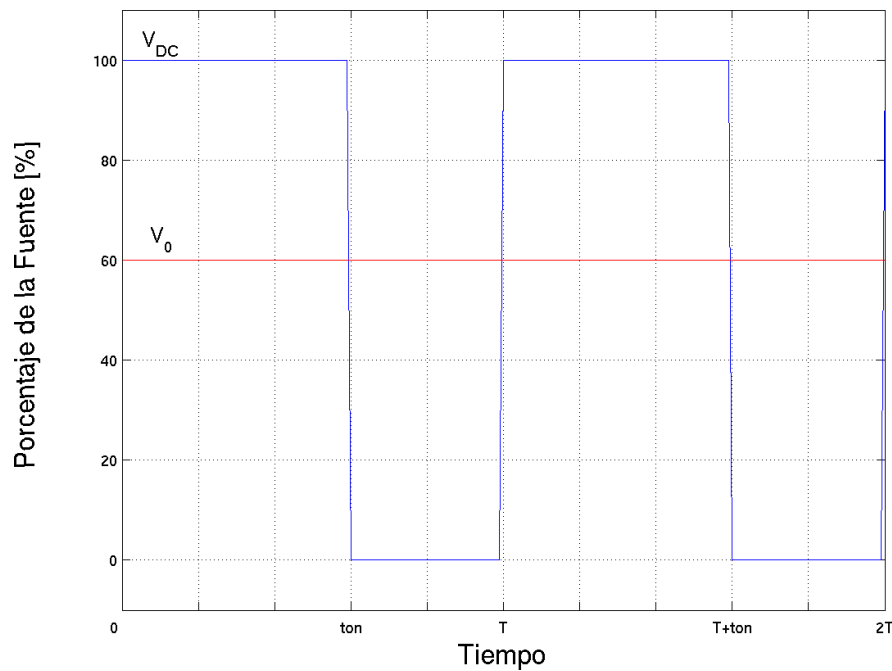


Figura 12.1: Tensión sobre la carga de un controlador DC - DC

En la figura 12.1, se presenta la tensión media sobre la carga. Para este caso corresponde al 60 % de la fuente, es decir, $\delta = 0,6$.

12.2. Aplicaciones

- Control de motores de corriente continua.
- Fuentes de poder DC.
- Tracción de vehículos eléctricos.
- Frenado eléctrico.

12.3. Tipos de Convertidores DC - DC

En esta sección detallaremos los esquemas de las distintas configuraciones de los chopper más utilizadas en la industria. La componente con control de encendido y apagado se denotará con el símbolo de un tiristor circunscrito en un círculo, esta componente puede ser: un tiristor con circuito de apagado, un tiristor autodesactivable o un transistor. En los esquemas se denotará el sentido de circulación de la corriente por la carga y la tensión sobre esta.

12.3.1. Chopper Reductor o Tipo "A"

En la figura 12.2, se presenta el esquema de un chopper reductor o tipo "A". En este esquema la corriente por la carga sólo puede ser positiva al igual que la tensión, debido a la disposición de las dos componentes de potencia. Su principal aplicación como su nombre lo indica es suministrar tensión continua variable desde cero hasta el valor de la fuente. En este puente la componente con control se utiliza para suministrar tensión a la carga mientras que el diodo de descarga libre origina el cortocircuito necesario para regular la tensión.

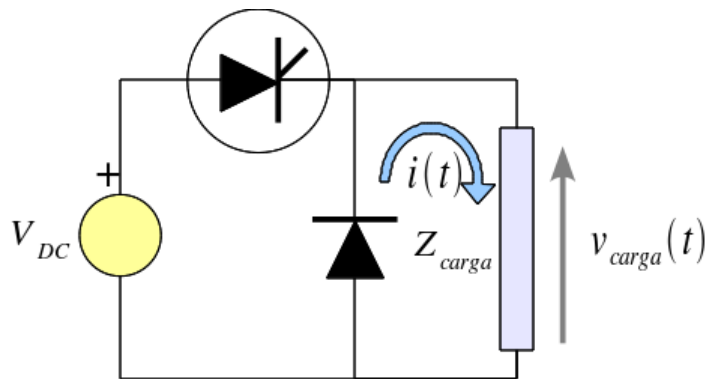


Figura 12.2: Chopper tipo "A"

12.3.2. Chopper Elevador o Tipo "B"

En la figura 12.3, se presenta el esquema de un chopper elevador o tipo "B". En este esquema, la componente principal coloca la carga en cortocircuito, estableciendo una corriente en sentido contrario al indicado en la figura. Al apagarse la componente principal la inductancia de la carga se opone al cambio brusco de corriente manteniendo el sentido de circulación de esta, de la carga a la fuente. Este puente requiere para su funcionamiento que la carga sea activa, es decir, que posea fuente de tensión y que posea una componente de inductancia. La fuente de la carga es inferior a la de la fuente, de hay el nombre de chopper elevador. Su principal aplicación es frenado regenerativo.

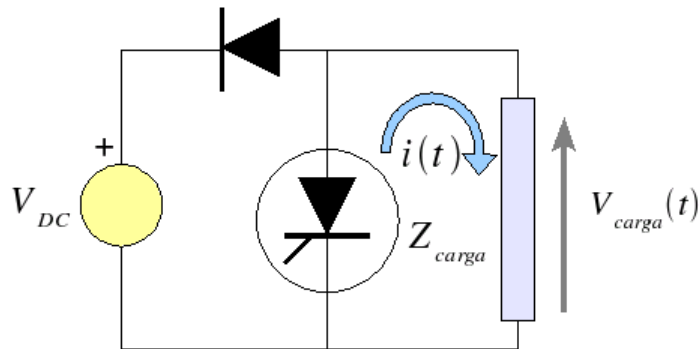


Figura 12.3: Chopper tipo "B"

12.3.3. Chopper Tipo "C"

En la figura 12.4, se presenta el esquema del chopper tipo "C", este puente combina a los dos anteriores en un solo convertidor. Permite tanto la operación de reducción como elevación de tensión, su funcionamiento tiene las mismas restricciones que el chopper elevador. Su principal aplicación es en tracción de vehículos eléctricos tanto en las operación de aceleración como de frenado. Este puente se utiliza en el Metro de Caracas para el control de las armaduras de los motores de corriente continua, utilizados en tracción y frenado de los vagones.

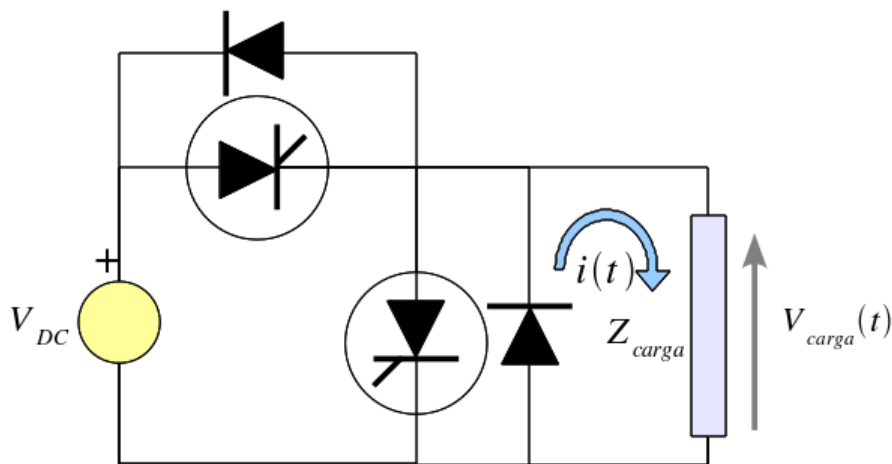


Figura 12.4: Chopper tipo "C"

12.3.4. Chopper Tipo "D"

En la figura 12.5, se presenta el esquema de un chopper tipo "D". Este puente suministra tensión positiva cuando las componentes con control están conduciendo y tensión negativa cuando están

apagadas. La corriente en la carga sólo puede ser positiva por la disposición de las componentes de potencia.

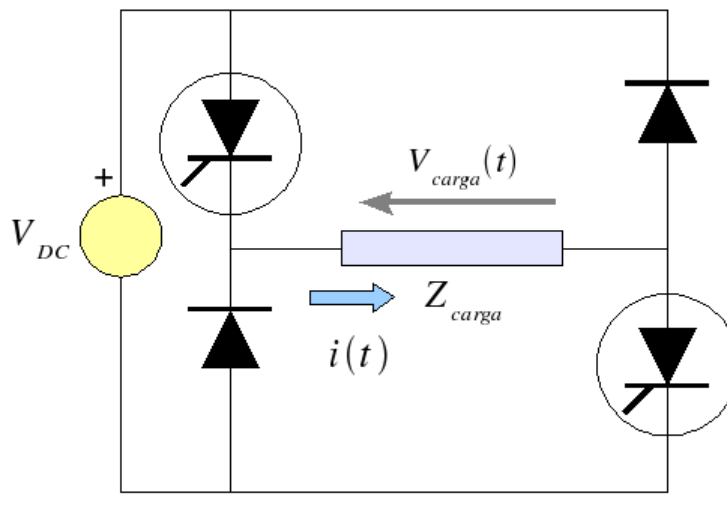


Figura 12.5: Chopper tipo "D"

12.3.5. Chopper Tipo "E"

En la figura 12.6, se presenta el esquema del chopper tipo "E", a esta configuración también se le conoce en la literatura como inversor o puente "H". Este esquema se obtiene de la superposición de de dos chopper tipo "D" en contra fase. Esta estructura, le da la posibilidad de suministrar tensión y corriente positiva y negativa a la carga. Su principal aplicación adicional a la de inversor (suministrar tensión AC a partir de una fuente DC) es la del control de los campos de motores de corriente continua para vehículo eléctricos, este puente permite invertir el sentido de circulación de la corriente en el devanado lo que ocasiona la inversión del sentido de giro del motor. En el caso del Metro de Caracas esto permite invertir el sentido de circulación de tren sin girar los vagones.

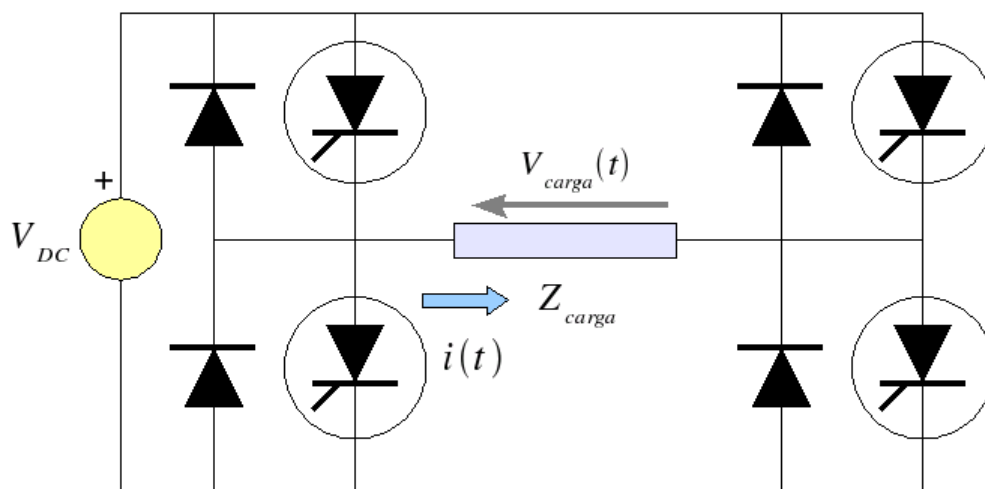


Figura 12.6: Chopper tipo "E"

12.3.6. Chopper a Transistores

En la figura 12.7, se presenta el esquema de un chopper reductor con transistores el principio de funcionamiento es el mismo que el del chopper tipo "A".

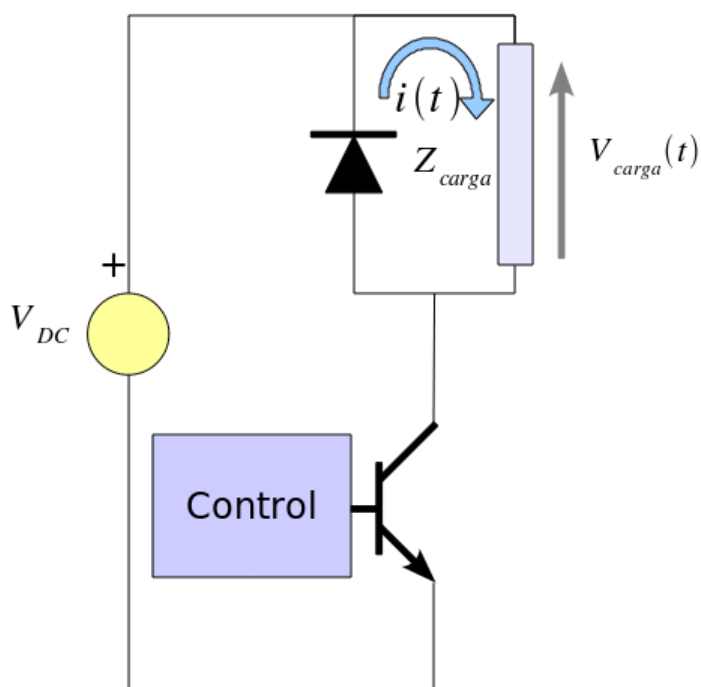


Figura 12.7: Chopper a transistores

12.4. Análisis del Chopper Reductor

En la figura 12.8, se presenta el esquema de un chopper reductor con carga resistiva inductiva y fuente de tensión.

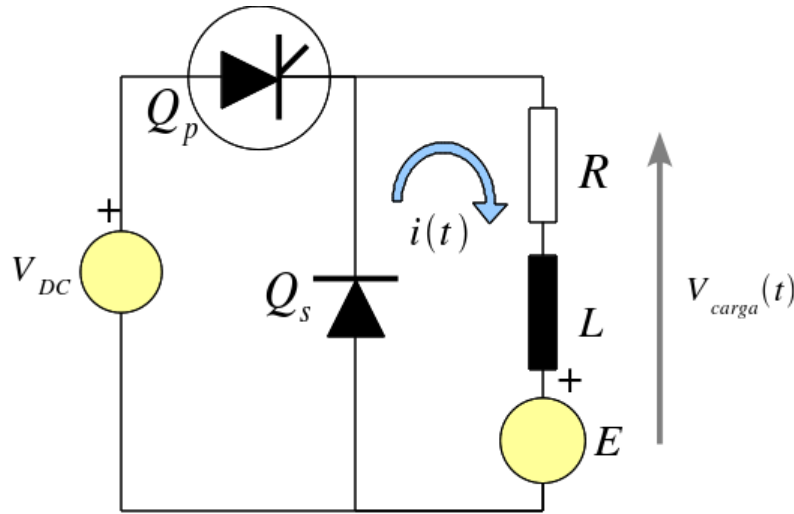


Figura 12.8: Chopper reductor

Dependiendo de los valores de resistencia, inductancia y fuente de tensión (E) el puente puede presentar dos condiciones de operación diferentes. La primera denominada "Condición No Continuada" en la cual la corriente pasa por cero durante el tiempo que no conduce la componente principal, apagando el diodo de descarga libre. La segunda denominada "Condición Continuada" la corriente no pasa por cero y se establece un régimen permanente que satisface:

$$i(t) = i(t + T) \quad (12.4)$$

12.4.1. Condición No Continuada

En la figura 12.9, se presenta la forma de onda de corriente y tensión para la carga en condición no continuada de corriente para una carga de 60Ω , $20mH$ y $50V$, alimentada desde una fuente de corriente continua de $100V$ con una razón de conducción de $0,6$. El chopper opera a una frecuencia de $1kHz$. En esta figura se puede destacar que la corriente es periódica para todos los ciclos de operación. La corriente pasa naturalmente por cero en un tiempo igual a $t_\beta = 0,8mseg$.

La corriente en cada una de las componentes que conforman este puente, en la condición no continuada de corriente se presenta en la figura 12.10.

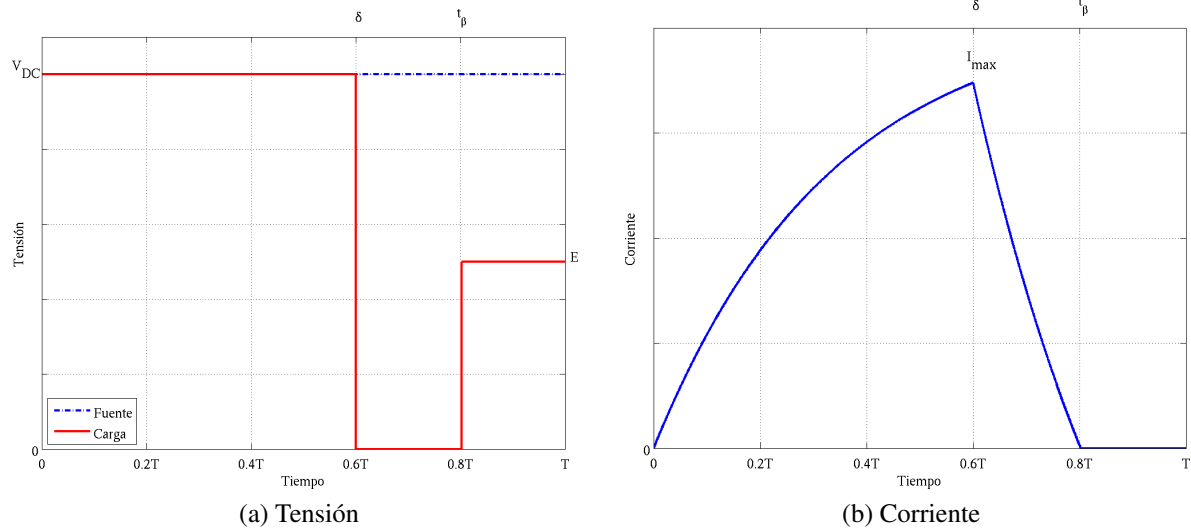


Figura 12.9: Tensión y corriente en la carga para un chopper reductor en condición no continuada de corriente

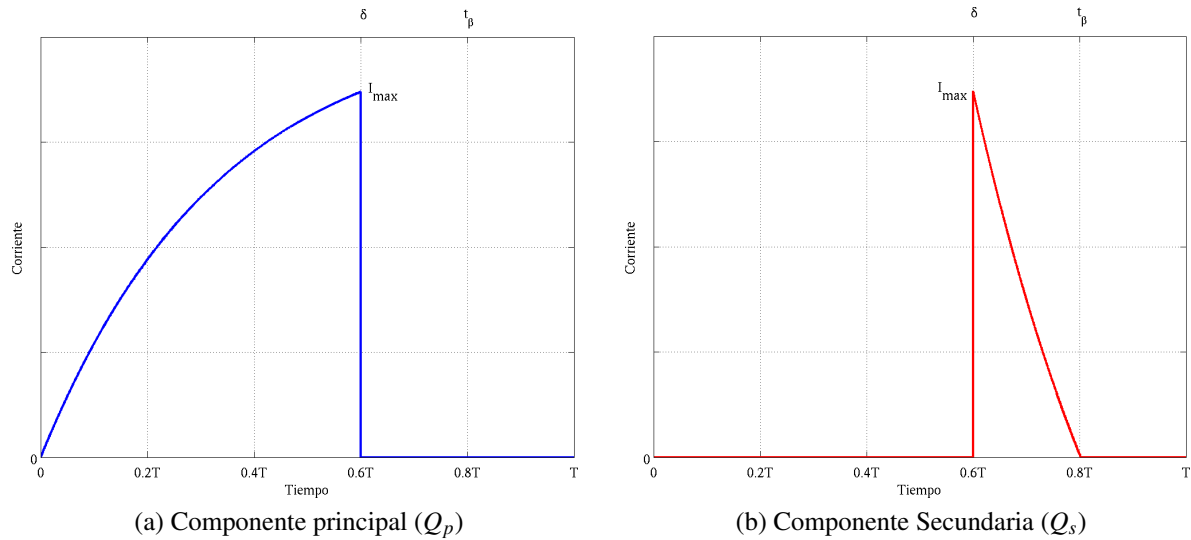


Figura 12.10: Corrientes en las componentes del chopper reductor en condición no continuada de corriente

12.4.1.1. Expresión de Corriente Condición No Continuada.

Analizando la forma de onda de corriente para la condición no continuada mostrada en la figura 12.9, se debe analizar por un lado el circuito cuando la componente principal (Q_p) está conduciendo ($0 \leq t \leq t_{on}$) y por el otro el circuito cuando la componente secundaria (Q_s) que funciona como diodo de descarga libre está en operación ($t_{on} \leq t \leq t_{\beta}$).

Corriente para $0 \leq t \leq t_{on}$

La ecuación diferencial del circuito en esta condición es:

$$V_{DC} = Ri + L \frac{di}{dt} + E \quad (12.5)$$

La corriente para este intervalo de tiempo viene dado por la solución de la ecuación diferencial (12.5), con condición inicial $i(0) = 0$.

$$i(t) = \frac{V_{DC} - E}{R} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (12.6)$$

donde:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Para evaluar la operación del diodo de descarga libre es necesario conocer la condición final de corriente en el extremo de este intervalo ($i(t_{on})$) que es la condición inicial de corriente para el diodo.

$$i(t_{on}) = I_{max} = \frac{V_{DC} - E}{R} \left[1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right] \quad (12.7)$$

Corriente para $t_{on} \leq t \leq t_{\beta}$

La ecuación diferencial del circuito en esta condición es:

$$0 = Ri + L \frac{di}{dt} + E \quad (12.8)$$

La corriente para este intervalo de tiempo viene dado por la solución de la ecuación diferencial (12.8), con condición inicial de la expresión (12.7) ($i(t_{on}) = I_{max}$).

$$i(t) = -\frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}} \right] + I_{max} e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}} \quad (12.9)$$

$$i(t) = -\frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}} \right] + \frac{V_{DC} - E}{R} \left[1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right] e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}}$$

Para evaluar el tiempo (t_{β}) en el cual la corriente pasa por cero se iguala a cero la expresión (12.9) y se despeja el tiempo.

$$t_{\beta} = \tau \ln \left[e^{\frac{t_{on}}{\tau}} \left(1 + \frac{V_{DC} - E}{E} \left(1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right) \right) \right] \quad (12.10)$$

Tensión Media

Para calcular la tensión media sobre la carga se aplica la definición en la forma de onda de tensión de la figura 12.9.

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{t_{on}} V_{DC} dt + \int_{t_{\beta}}^T E dt \right] \\
 V_0 &= V_{DC} \frac{t_{on}}{T} + E \frac{(T - t_{\beta})}{T} \\
 V_0 &= V_{DC} \delta + E \left(1 - \frac{t_{\beta}}{T} \right)
 \end{aligned} \tag{12.11}$$

12.4.2. Condición Continuada

En la figura 12.11, se presenta la forma de onda de corriente para una carga de 60Ω , $200mH$ y $40V$, alimentada desde una fuente de corriente continua de $100V$ con una razón de conducción de $0,6$. El chopper opera a una frecuencia de $1kHz$. En esta figura se puede destacar que la corriente presenta una estabilización desde cero hasta su régimen permanente.

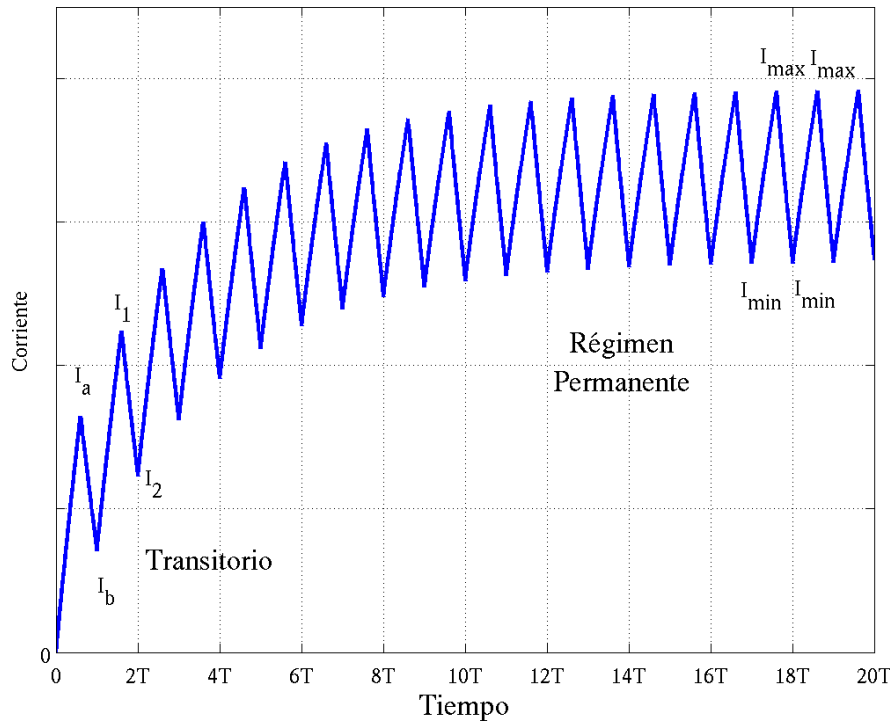


Figura 12.11: corriente en la carga para un chopper reductor en condición continuada de corriente

En la figura 12.12 se presenta el detalle de la corriente y tensión en régimen permanente de operación para la carga de 60Ω , $200mH$ y $40V$. La corriente en cada una de las componentes que conforman este puente, en la condición continuada de corriente se presenta en la figura 12.13.

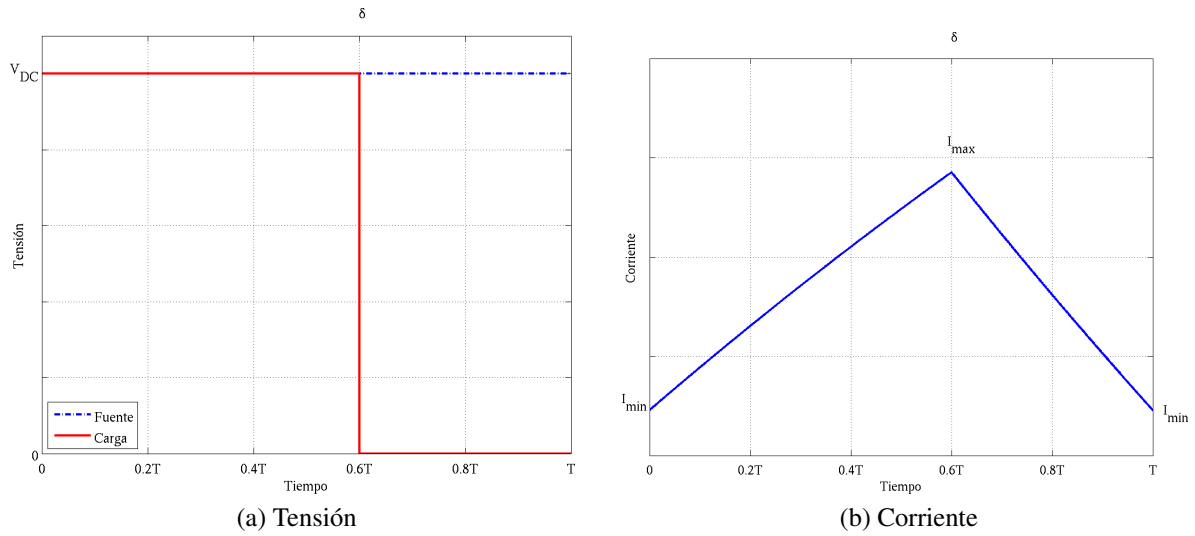


Figura 12.12: Tensión y corriente en la carga para un chopper reductor en condición no continuada de corriente

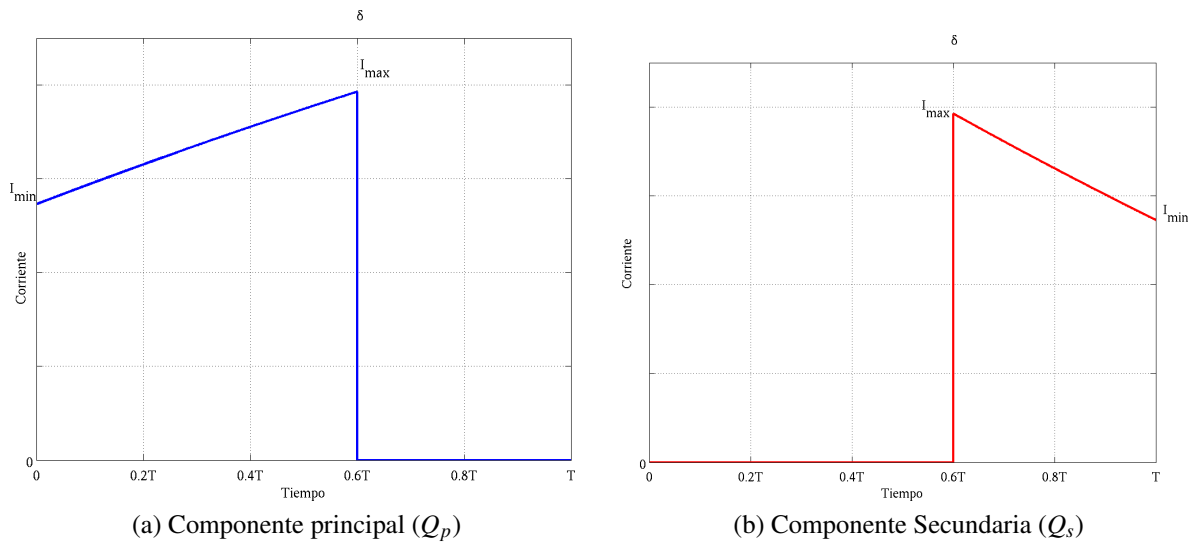


Figura 12.13: Corrientes en las componentes del chopper reductor en condición no continuada de corriente

12.4.3. Expresión de Corriente Condición Continuada.

Analizando la forma de onda de la corriente de la figura 12.11 para la condición continuada, se requiere analizar por un lado el circuito cuando la componente principal (Q_p) está conduciendo ($0 \leq t \leq t_{on}$) y por el otro el circuito cuando conduce la componente secundaria (Q_s) ($t_{on} \leq t \leq T$).

12.4.3.1. Primer ciclo de operación

Corriente para $0 \leq t \leq t_{on}$

La ecuación diferencial del circuito cuando conduce la componente principal viene dada por la expresión (12.5) al igual que en la condición anterior. Con la condición inicial ($i(0) = 0$), la corriente en este intervalo viene dada por la expresión (12.6).

$$i(t) = \frac{V_{DC} - E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (12.12)$$

Donde

τ corresponde a la constante de tiempo del circuito.

Para evaluar la operación del diodo de descarga libre es necesario calcular la condición final de corriente ($i(t_{on})$) de este circuito que corresponde a la condición inicial de corriente del próximo intervalo.

$$i(t_{on}) = I_a = \frac{V_{DC} - E}{R} \left[1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}}\right] \quad (12.13)$$

Corriente para $t_{on} \leq t \leq T$

La ecuación diferencial del circuito cuando conduce la componente principal viene dada por la expresión (12.8) al igual que en la condición anterior. Con la condición inicial ($i(t_{on}) = I_a$), la corriente en este intervalo viene dada por la expresión (12.9).

$$i(t) = -\frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}}\right] + I_a e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}} \quad (12.14)$$

Para evaluar el próximo ciclo de operación es necesario evaluar la condición final de la corriente de la expresión (12.14), en $t = T$.

$$i(T) = I_b = -\frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}}\right] + I_a e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}} \quad (12.15)$$

12.4.3.2. Segundo ciclo de operación

Como la función es periódica para comodidad del análisis se redefinirá el eje del tiempo a $t = 0$ para el segundo ciclo de operación del puente

Corriente para $0 \leq t \leq t_{on}$

La ecuación diferencial del circuito cuando conduce la componente principal viene dada por la expresión (12.5) al igual que en la condición anterior. Con la condición inicial ($i(0) = I_b$), la corriente en este intervalo viene dada por la expresión:

$$i(t) = \frac{V_{DC} - E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + I_b e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (12.16)$$

Para evaluar la operación del diodo de descarga libre es necesario calcular la condición final de corriente ($i(t_{on})$) de este circuito que corresponde a la condición inicial de corriente del próximo intervalo.

$$i(t_{on}) = I_1 = \frac{V_{DC} - E}{R} \left[1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right] + I_b e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \quad (12.17)$$

Corriente para $t_{on} \leq t \leq T$

La ecuación diferencial del circuito cuando conduce la componente principal viene dada por la expresión (12.8) al igual que en la condición anterior. Con la condición inicial ($i(t_{on}) = I_1$), la corriente en este intervalo viene dada por la expresión (12.17).

$$i(t) = -\frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}} \right] + I_1 e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}} \quad (12.18)$$

Para evaluar el próximo ciclo de operación es necesario evaluar la condición final de la corriente de la expresión 12.18, en $t = T$.

$$i(T) = I_2 = -\frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}} \right] + I_1 e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}} \quad (12.19)$$

12.4.3.3. Régimen Permanente

Se puede seguir evaluando ciclo a ciclo de operación hasta alcanzar la condición de régimen permanente dado por la expresión (12.4). Otra manera, es utilizar la condición de la expresión (12.4) en las ecuaciones (12.17) y (12.19) para obtener los valores de la corriente en $t = t_{on}(I_{max})$ y $t = T(I_{min})$ en régimen permanente. De la condición de régimen permanente se obtiene:

$$i(0) = i(T) = I_{min} \quad (12.20)$$

$$i(t_{on}) = I_{max} \quad (12.21)$$

Sustituyendo las expresiones (12.20) y (12.21) en las expresiones (12.17) y (12.19), se obtiene:

$$I_{max} = \frac{V_{DC} - E}{R} \left[1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right] + I_{min} e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \quad (12.22)$$

$$I_{min} = -\frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}} \right] + I_{max} e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}} \quad (12.23)$$

Sustituyendo la expresión (12.23) en la ecuación (12.22) se obtiene:

$$\begin{aligned} I_{max} &= \frac{V_{DC} - E}{R} \left[1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right] + \left[-\frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}} \right] + I_{max} e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}} \right] e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \\ I_{max} &= \frac{V_{DC} - E}{R} \left[1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right] + \frac{E}{R} e^{-\frac{T}{\tau}} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} + I_{max} e^{-\frac{T}{\tau}} \\ I_{max} \left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right] &= \frac{V_{DC}}{R} \left[1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right] + \frac{E}{R} \left[e^{-\frac{T}{\tau}} - 1 \right] \\ I_{max} &= \frac{V_{DC}}{R} \frac{\left[1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right]}{\left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right]} + \frac{E}{R} \frac{\left[e^{-\frac{T}{\tau}} - 1 \right]}{\left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right]} \\ I_{max} &= \frac{V_{DC}}{R} \frac{\left[1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right]}{\left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right]} - \frac{E}{R} = \frac{V_{DC}}{R} \frac{\left[1 - e^{-\frac{\delta T}{\tau}} \right]}{\left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right]} - \frac{E}{R} \end{aligned} \quad (12.24)$$

Sustituyendo el resultado de la expresión (12.24), en la ecuación (12.23) se obtiene:

$$I_{min} = \frac{V_{DC}}{R} \frac{\left[e^{\frac{t_{on}}{\tau}} - 1 \right]}{\left[e^{\frac{T}{\tau}} - 1 \right]} - \frac{E}{R} = \frac{V_{DC}}{R} \frac{\left[e^{\frac{\delta T}{\tau}} - 1 \right]}{\left[e^{\frac{T}{\tau}} - 1 \right]} - \frac{E}{R} \quad (12.25)$$

El rizado de operación del chopper se puede calcular a partir de los resultados de las expresiones (12.24) y (12.25) como:

$$\Delta i = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} = \frac{V_{DC}}{2R} \left[\frac{\left[1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right]}{\left[1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right]} - \frac{\left[e^{\frac{t_{on}}{\tau}} - 1 \right]}{\left[e^{\frac{T}{\tau}} - 1 \right]} \right] \quad (12.26)$$

Reduciendo la expresión del rizado de corriente (12.26), se obtiene:

$$\Delta i = \frac{V_{DC}}{2R} \left[\frac{1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} + e^{-\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \right] = \frac{V_{DC}}{2R} \left[\frac{1 - e^{-\frac{\delta T}{\tau}} + e^{-\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{(1-\delta)T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \right] \quad (12.27)$$

La razón de conducción (δ_{max}) que maximiza el rizado de corriente se obtiene como:

$$\left. \frac{\partial \Delta i}{\partial \delta} \right|_{\delta_{max}} = \frac{V_{DC}}{2R} \frac{\tau}{T} \left[\frac{e^{\frac{(1-\delta_{max})T}{\tau}} - e^{\frac{\delta_{max}T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \right] = 0 \quad (12.28)$$

Despejando el valor de δ_{max} de la ecuación (12.28), se obtiene:

$$\delta_{max} = \frac{1}{2} \quad (12.29)$$

12.4.3.4. Tensión Media

Para calcular la tensión media sobre la carga se aplica la definición en la forma de onda de tensión de la figura 12.12.

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{T} \int_0^{t_{on}} V_{DC} dt \\ V_0 &= V_{DC} \frac{t_{on}}{T} \\ V_0 &= V_{DC} \delta \end{aligned} \quad (12.30)$$

12.4.4. Simulación

```

1  % Chopper Tipo A
2  % Datos
3  V=input('Tension DC de la fuente ');
4  R=input('Resistencia [Ohm] ');
5  L=input('Inductancia [H] ');
6  E=input('Tension de la carga ');
7  T=input('Periodo [s] ');
8  ton=input('Tipo de encendido [s] ');
9  % Corrientes
10 delta=ton/T
11 tau=L/R
12 Imax=(V/R*(1-exp(-delta*T/tau))/(1-exp(-T/tau)))-E/R;
13 Imin=(V/R*(exp(delta*T/tau)-1)/(exp(T/tau)-1))-E/R;
14 t1=linspace(0,ton,1000);
15 t2=linspace(ton,T,1000);
16 if Imin<0
17     disp('Condición no continuada')
18     i1=(V-E)/R*(1-exp(-t1/tau));
19     Imax=(V-E)/R*(1-exp(-ton/tau))
20     Imin=0;
21     tb=tau*log(exp(ton/tau)*(1+(V-E)/E*(1-exp(-ton/tau))))
22     t2=linspace(ton,tb,500);
23     i2=(-E)/R*(1-exp(-(t2-ton)/tau))+Imax*exp(-(t2-ton)/tau);

```

```

24 t3=linspace(tb,T,500);
25 v=[V*ones(size(t1)),zeros(size(t2)),E*ones(size(t3))];
26 t2=[t2,t3];
27 i2=[i2,zeros(size(t3))];
28 else
29 Imin
30 Imax
31 i1=(V-E)/R*(1-exp(-t1/tau))+Imin*exp(-t1/tau);
32 i2=(-E)/R*(1-exp(-(t2-ton)/tau))+Imax*exp(-(t2-ton)/tau);
33 v=[V*ones(size(t1)),zeros(size(t2))];
34 end
35
36 rizado=(Imax-Imin)/2
37 i=[i1,i2];
38 t=[t1,t2];
39
40 % Valores Medios
41 Io=1/T*trapz(t,i)
42 Vo=1/T*trapz(t,v)
43
44 % Valores Efectivos
45 Irms=sqrt(1/T*trapz(t,i.^2))
46 Vrms=sqrt(1/T*trapz(t,v.^2))
47
48 % Factores de Rizado
49 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
50 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo
51
52 % Graficas
53 vf=V*ones(size(t));
54 vx=[v];
55 ix=[i];
56 t1=t;
57 figure(1)
58 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
59 legend('Fuente','Carga');
60 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
61 xlim([0 T]);
62 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
63 ylabel('Tensión','fontsize',14,'fontname','Times');

```

```

64
65 figure(2)
66 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
67 xlim([0 T]);
68 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
69 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times');
70 ylabel('Corriente','fontsize',14,'fontname','Times');
71
72 figure(3) % Componente Principal
73 plot(t1,[i1,zeros(size(i2))],'LineWidth',2);grid
74 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
75 xlim([0 T]);
76 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times'); ylabel('Corriente'
    , 'fontsize',14,'fontname','Times');
77
78 figure(4) % Componente Secundaria
79 plot(t1,[zeros(size(i1)),i2],'r','LineWidth',2);grid
80 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
81 xlim([0 T]);
82 xlabel('Tiempo','fontsize',14,'fontname','Times'); ylabel('Corriente'
    , 'fontsize',14,'fontname','Times');

```

12.5. Chopper Elevador con carga LE

En la figura 12.14, se presenta el esquema de un chopper elevador, la principal aplicación de este convertidor es el de recuperación de energía a la red, en especial en operaciones de frenado eléctrico.

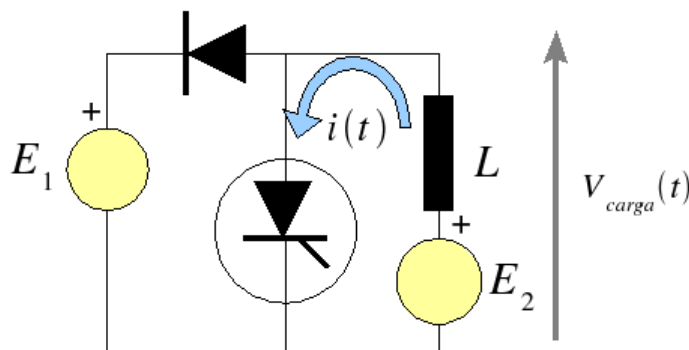


Figura 12.14: Esquema del chopper elevador

El principio de operación de este chopper es bastante simple, la componente principal coloca un cortocircuito sobre la carga estableciendo una corriente circulatoria en el sentido mostrado en la figura 12.14, y acumulando energía en el inductor. Al apagar la componente principal la energía acumulada en el inductor fuerza el encendido del diodo a fin de mantener la condición de corriente, durante este tiempo se establece una corriente circulatoria entre la fuente E_2 y E_1 , hasta que se encienda nuevamente la componente principal o que la corriente trate de cambiar de sentido de circulación lo que ocasionaría el apagado natural del diodo. En la figura 12.15, se presenta la forma de onda de corriente y tensión de este puente para un inductancia de $100mH$, una fuente $E_2 = 60V$ y $E_1 = 100V$. La razón de conducción del chopper es 0,4 con una frecuencia de operación de $500Hz$. Adicionalmente, en la figura 12.16, se muestra la corriente en cada componente que conforma el convertidor para esta condición de operación.

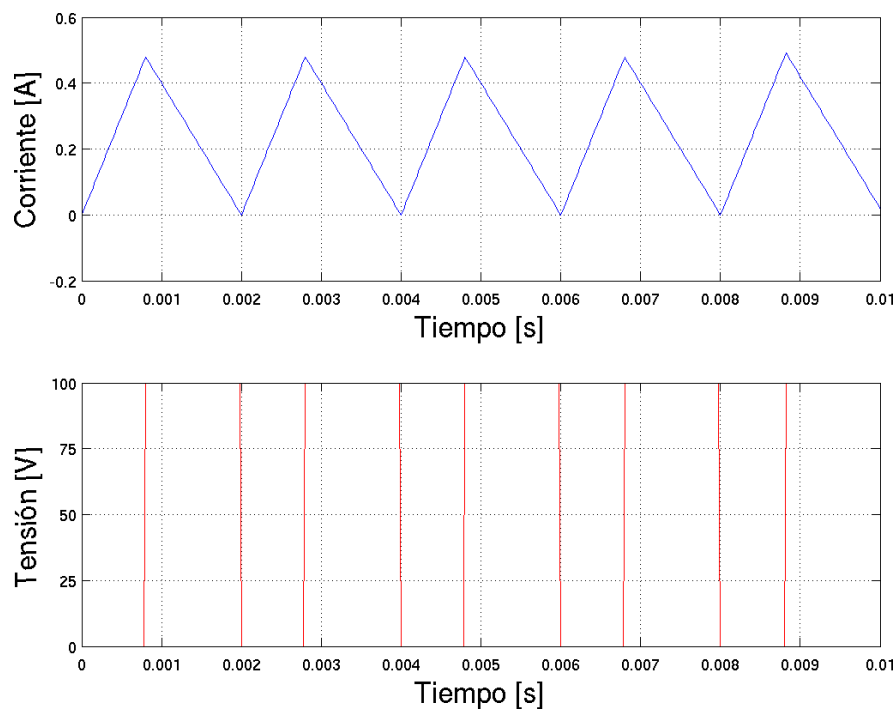


Figura 12.15: Corriente y tensión en la carga para un chopper elevador

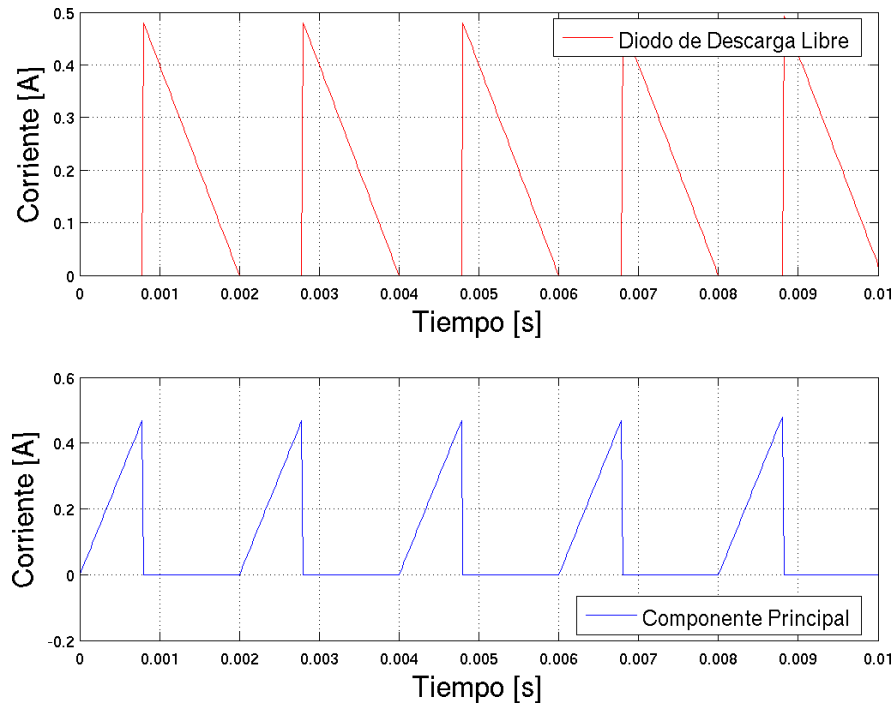


Figura 12.16: Corriente en las componentes del chopper elevador

12.5.1. Expresión de corriente

Corriente para $0 \leq t \leq t_{on}$

La ecuación diferencial del circuito para este intervalo de operación viene dada por la siguiente expresión:

$$E_2 = L \frac{di}{dt} \quad (12.31)$$

La solución a la ecuación diferencial (12.31) es:

$$i(t) = \frac{E_2}{L} t + i(0) \quad (12.32)$$

Evaluando la corriente en la condición final del intervalo, para obtener la condición inicial del próximo se obtiene:

$$i(t_{on}) = I_1 = \frac{E_2}{L} t_{on} + i(0) \quad (12.33)$$

Corriente para $t_{on} \leq t \leq T$

La ecuación diferencial del circuito para este intervalo de operación viene dada por la siguiente expresión:

$$E_2 - E_1 = L \frac{di}{dt} \quad (12.34)$$

La solución a la ecuación diferencial (12.34), con condición inicial de corriente de la expresión (12.33) en $t = t_{on}$:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E_2 - E_1}{L} (t - t_{on}) + I_1 \\ &= \frac{E_2 - E_1}{L} (t - t_{on}) + \frac{E_2}{L} t_{on} + i(0) \\ &= \frac{E_2}{L} t - \frac{E_1}{L} (t - t_{on}) + i(0) \end{aligned} \quad (12.35)$$

Evaluando la corriente en la condición final del intervalo, para obtener la condición inicial del próximo se obtiene:

$$i(T) = I_2 = \frac{E_2}{L} T - \frac{E_1}{L} (T - t_{on}) + i(0) \quad (12.36)$$

Para calcular el régimen permanente utilizaremos la condición de régimen permanente, que establece que la corriente es periódica:

$$\begin{aligned} i(0) &= i(T) = I_{min} \\ i(t_{on}) &= I_{max} \end{aligned} \quad (12.37)$$

Para encontrar los valores de I_{max} e I_{min} se sustituye la expresión (12.37) en la (12.36) para obtener:

$$\begin{aligned} I_{min} &= \frac{E_2}{L} T - \frac{E_1}{L} (T - t_{on}) + I_{min} \\ 0 &= \frac{E_2}{L} T - \frac{E_1}{L} (T - t_{on}) \\ 0 &= E_2 T - E_1 (T - t_{on}) \end{aligned} \quad (12.38)$$

Dividiendo la expresión (12.38) entre T se obtiene:

$$\begin{aligned} E_1 \left(1 - \frac{t_{on}}{T}\right) &= E_2 \\ \frac{E_2}{E_1} &= (1 - \delta) \end{aligned} \quad (12.39)$$

El resultado de la expresión (12.39), se le conoce como condición de régimen permanente del chopper elevador.

12.6. Chopper elevador con carga activa RLE

En la figura 12.17, se presenta el esquema de un chopper elevador con carga activa RLE . En la figura 12.18 se presenta la formas de onda de tensión, corriente y potencia entregada a la fuente durante un periodo en régimen permanente de operación continuada del convertidor.

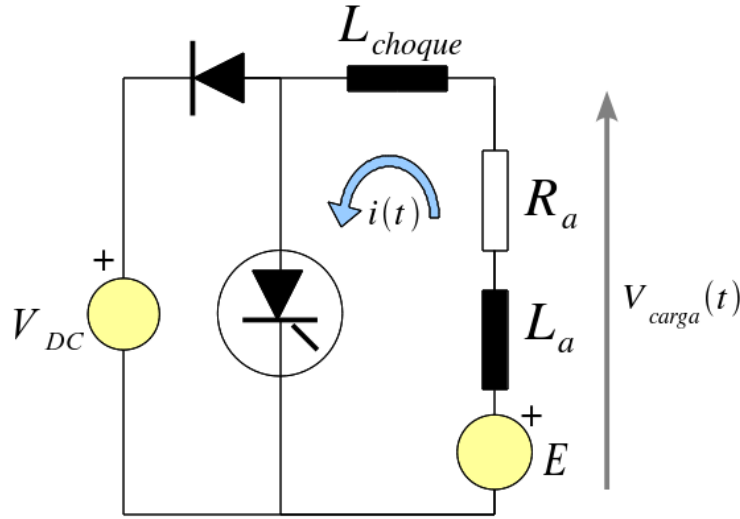


Figura 12.17: Chopper elevador con carga activa

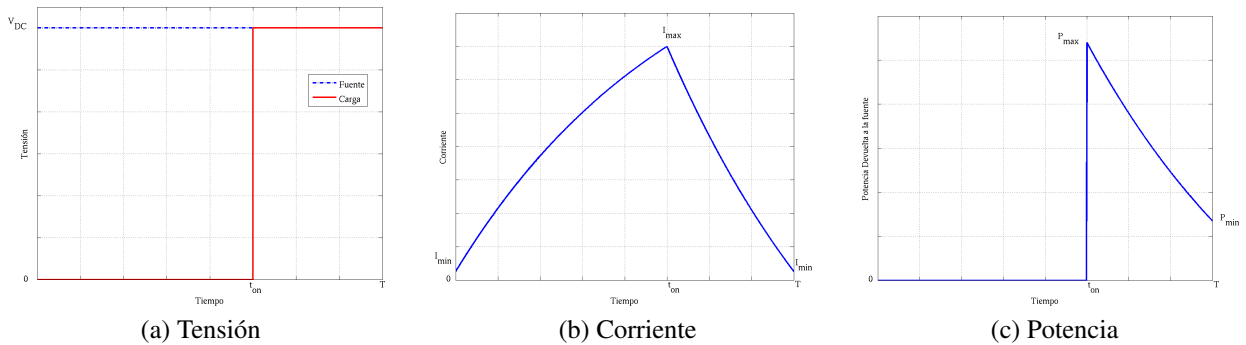


Figura 12.18: Chopper elevador con carga activa

12.6.1. Etapa de acumulación de energía $0 \leq t \leq t_{on}$

Durante esta etapa se puede calcular la corriente de cortocircuito de régimen permanente, con la componente principal cerrada, a partir de la ecuación diferencial del circuito y de la condición inicial de régimen permanente ($i(0) = I_{min}$):

$$i(t) = \frac{E}{R_a} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + I_{min} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (12.40)$$

Donde:

$$\tau = \frac{L_a + L_{choque}}{R_a}$$

De la expresión (12.40), se puede calcular la condición final de corriente en el intervalo para $t = t_{on}$ como:

$$i(t_{on}) = I_{max} = \frac{E}{R_a} \left(1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \right) + I_{min} e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} \quad (12.41)$$

12.6.2. Etapa de devolución de energía a la fuente $t_{on} \leq t \leq T$

Calculando la corriente que circula por la fuente al abrir la componente principal a partir de la ecuación diferencial del circuito y de la condición inicial (12.41), se obtiene:

$$i(t) = \frac{E - V_{DC}}{R_a} \left(1 - e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}} \right) + I_{max} e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}} \quad (12.42)$$

Evaluando la expresión de corriente (12.42) en el final del intervalo e igualándola a la condición final de régimen permanente ($i(T) = I_{min}$), se obtiene:

$$i(T) = I_{min} = \frac{E - V_{DC}}{R_a} \left(1 - e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}} \right) + I_{max} e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}} \quad (12.43)$$

12.6.3. Rizado de corriente

De las expresiones (12.41) y (12.43), se pueden obtener los valores de I_{min} e I_{max} en régimen permanente sustituyendo una ecuación en la otra y simplificando.

$$I_{max} = \frac{E}{R_a} - \frac{V_{DC}}{R_a} \frac{\left(e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)} = \frac{E}{R_a} - \frac{V_{DC}}{R_a} \frac{\left(e^{-\frac{\delta T}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)}{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)} \quad (12.44)$$

$$I_{min} = \frac{E}{R_a} - \frac{V_{DC}}{R_a} \frac{\left(1 - e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}} \right)}{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)} = \frac{E}{R_a} - \frac{V_{DC}}{R_a} \frac{\left(1 - e^{-\frac{(1-\delta)T}{\tau}} \right)}{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)} \quad (12.45)$$

Con los resultados de las expresiones (12.44) y (12.45), se puede calcular el rizado de corriente como:

$$\Delta i = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} = \frac{V_{DC}}{2R_a} \left[\frac{1 - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} + e^{-\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \right] = \frac{V_{DC}}{2R_a} \left[\frac{1 - e^{-\frac{\delta T}{\tau}} + e^{-\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{(1-\delta)T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \right] \quad (12.46)$$

Comparando las expresiones (12.46) y (12.27), se puede observar que el rizado de corriente del chopper elevador elevador con carga *RLE* es el mismo obtenido para esta carga en la configuración reductora. Por tanto la razón de conducción que maximiza el valor de rizado de corriente es el mismo de la expresión (12.29).

12.6.4. Potencia promedio de devuelta a la red

La potencia promedio de frenado se calcula como el promedio de la potencia instantánea entregada a la fuente cuando la componente principal esta abierta ($t_{on} \leq t \leq T$). Esta potencia viene dado por la expresión:

$$P_{frenado} = V_{DC} \left(\frac{1}{T} \int_{t_{on}}^T \left(\frac{E - V_{DC}}{R_a} \left(1 - e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}} \right) + I_{max} e^{-\frac{(t-t_{on})}{\tau}} \right) dt \right) \quad (12.47)$$

Desarrollando la expresión (12.47), se obtiene:

$$P_{frenado} = \frac{V_{DC}^2}{R_a} \left[\left(\frac{E}{V_{DC}} - 1 \right) (1 - \delta) + \frac{\tau}{T} \left(\frac{1 + e^{-\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{t_{on}}{\tau}} - e^{-\frac{(T-t_{on})}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \right) \right] \quad (12.48)$$

$$P_{frenado} = \frac{V_{DC}^2}{R_a} \left[\left(\frac{E}{V_{DC}} - 1 \right) (1 - \delta) + \frac{\tau}{T} \left(\frac{e^{-\frac{\delta T}{\tau}} + e^{-\frac{(1-\delta)T}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}} - 1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \right) \right]$$

12.6.5. Simulación

```

1  % Chopper Tipo B
2  % Datos
3  V=input('Tension DC de la fuente ');
4  R=input('Resistencia [Ohm] ');
5  L=input('Inductancia [H] ');
6  E=input('Tension de la carga ');
7  T=input('Periodo [s] ');
8  ton=input('Tipo de encendido [s] ');
9  % Corrientes
10 delta=ton/T
11 tau=L/R

```

```

12 Imax=E/R-V/R*(exp(-delta*T/tau)-exp(-T/tau))/(1-exp(-T/tau));
13 Imin=E/R-V/R*(1-exp(-(1-delta)*T/tau))/(1-exp(-T/tau));
14 t1=linspace(0,ton,1000);
15 t2=linspace(ton,T,1000);
16 % Condición de operación
17
18 if Imin<0
19     disp('Condición no continuada')
20     Imin=0
21     i1=E/R*(1-exp(-t1/tau))+Imin*exp(-t1/tau);
22     Imax=max(i1)
23     i2=(E-V)/R*(1-exp(-(t2-ton)/tau))+Imax*exp(-(t2-ton)/tau);
24     valor=(i2>=0);
25     i2=i2.*valor;
26     v=[zeros(size(t1)), (V*ones(size(t2)).*valor)+(1-valor).*E];
27     tb=t2((valor));
28     tb(length(tb))
29 else
30     i1=E/R*(1-exp(-t1/tau))+Imin*exp(-t1/tau);
31     i2=(E-V)/R*(1-exp(-(t2-ton)/tau))+Imax*exp(-(t2-ton)/tau);
32     v=[zeros(size(t1)), V*ones(size(t2))];
33 end
34
35 % Corrientes
36
37 rizado=(Imax-Imin)/2
38 i=[i1,i2];
39 t=[t1,t2];
40
41 % Valores Medios
42 Io=1/T*trapz(t,i)
43 Vo=1/T*trapz(t,v)
44
45 % Valores Efectivos
46 Irms=sqrt(1/T*trapz(t,i.^2))
47 Vrms=sqrt(1/T*trapz(t,v.^2))
48
49 % Factores de Rizado
50 FR_i=sqrt(Irms^2-Io^2)/Io
51 FR_v=sqrt(Vrms^2-Vo^2)/Vo

```

```
52
53 % Potencia de Frenado
54 frenado=(t>=ton);
55 p=v.*i.*frenado;
56 P=1/T*trapz(t,p)
57
58 % Graficas
59 vf=V*ones(size(t));
60 vx=[v];
61 ix=[i];
62 t1=t;
63 figure(1)
64 plot(t1,vf,'-.',t1,vx,'r','LineWidth',2);grid
65 legend('Fuente','Carga');
66 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
67 xlim([0 T]);
68 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
69 ylabel('Tensión (V)','fontsize',14,'fontname','Times');
70
71 figure(2)
72 plot(t1,ix,'LineWidth',2);grid
73 xlim([0 T]);
74 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
75 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
76 ylabel('Corriente (A)','fontsize',14,'fontname','Times');
77
78 figure(3)
79 plot(t1,p,'LineWidth',2);grid
80 xlim([0 T]);
81 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
82 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
83 ylabel('Potencia devuelta a la red (W)','fontsize',14,'fontname','Times');
```

12.7. Convertidor Buck

En la figura 12.19, se presenta la configuración del puente convertidor DC/DC tipo Buck. Este puente presenta dos interruptores electrónicos (S_w y $\overline{S_w}$) cuya operación es complementaria entre sí.

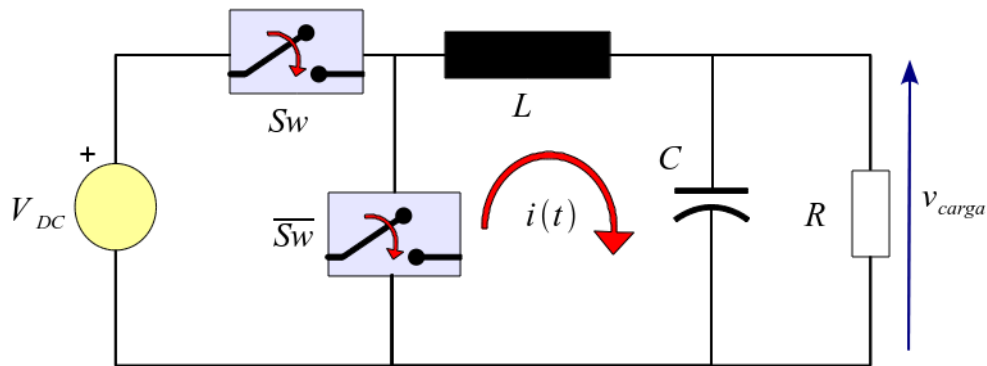


Figura 12.19: Puente Convertidor Buck

En la figura 12.20, se puede observar las dos topologías del puente convertidor Buck en función del estado del interruptor S_w .

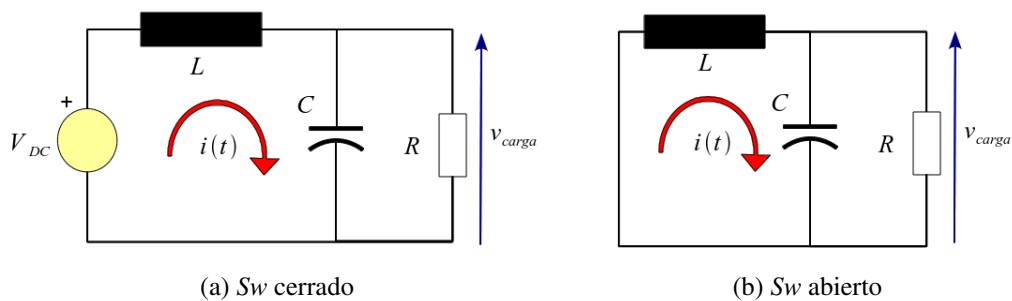


Figura 12.20: Topologías del convertidor Buck en función del estado de S_w

Analizando la tensión en bornes del interruptor $\overline{S_w}$ en función de la operación del convertidor se obtiene la forma de onda de la figura 12.21.

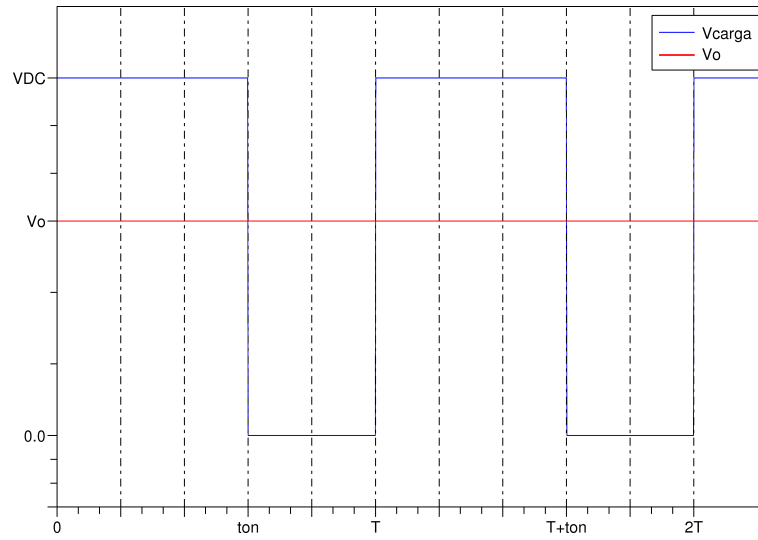


Figura 12.21: Tensión en bornes del interruptor \overline{Sw}

La forma de onda de la figura 12.21 se puede descomponer en Series de Fourier como:

$$v(t) = \Re_e \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} \right) \quad (12.49)$$

donde:

$$C_n = \frac{2}{T} \int_0^{t_{on}} V_{DC} e^{j \frac{2\pi n}{T} t} dt \quad (12.50)$$

Resolviendo la expresión (12.50), se obtiene

$$\begin{aligned} C_0 &= V_{DC} \delta \\ C_n &= -j \frac{V_{DC}}{n\pi} \left[e^{j 2\pi \delta n} - 1 \right] \quad \forall n \geq 1 \end{aligned} \quad (12.51)$$

Sustituyendo las expresiones (12.51) en la Serie de Fourier de la ecuación (12.49), se obtiene:

$$v(t) = V_{DC} \left[\delta + \Re_e \left(\sum_{n=1}^{\infty} -j \frac{1}{n\pi} \left[e^{j 2\pi \delta n} - 1 \right] e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} \right) \right] \quad (12.52)$$

A partir de la Serie de Fourier de $v(t)$ con la impedancia de entrada del circuito vista desde los terminales del interruptor electrónico \overline{Sw} se puede calcular la corriente $i(t)$ como:

$$i(t) = V_{DC} \left[\frac{\delta}{R} + \Re_e \left(\sum_{n=1}^{\infty} -j \frac{1}{n\pi Z_{ent}(n)} \left[e^{j 2\pi \delta n} - 1 \right] e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} \right) \right] \quad (12.53)$$

donde:

$$Z_{ent}(n) = j\omega nL + R \parallel \frac{1}{j\omega nC} = j\omega nL + \frac{R}{j\omega nRC + 1} \quad (12.54)$$

En el circuito de la figura 12.19, se puede determinar la tensión sobre la resistencia $v_{carga}(t)$ a partir de la Serie de Fourier de $v(t)$ (ecuación (12.52)) utilizando un divisor de tensión para cada una de las frecuencia n .

$$v_{carga}(t) = V_{DC} \left[\delta + \Re_e \left(\sum_{n=1}^{\infty} -j \frac{1}{n\pi} \left[\frac{[e^{j2\pi\delta n} - 1] R}{j\omega nL(j\omega nRC + 1) + R} \right] e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} \right) \right] \quad (12.55)$$

12.7.1. Simulación

```

1  % Chopper Tipo BUCK
2  % Datos
3  Vdc    =input('Tension DC de la fuente ');
4  R      =input('Resistencia [Ohm] ');
5  L      =input('Inductancia [H] ');
6  C      =input('Capacitancia [F] ');
7  T      =input('Periodo [s] ');
8  delta  =input('Razón de Conducción ');
9
10 % Analisis mediante Series de Fourier
11 t=linspace(0,T,1000);    % Tiempo
12 w=2*pi/T;                % Frecuencia Eléctrica
13 % Valor medio de la tensión de fuente, carga y corriente por el inductor
14 v=delta*Vdc*ones(size(t));
15 vc=v;
16 i=v/R;
17 % Para precisión del programa se calcularán 1000 armónicas
18 for n=1:1000;
19     % Tensión de la fuente (fig. 12.21)
20     Cn=-j*Vdc/(n*pi)*(exp(j*2*pi*delta*n)-1);    % Coeficientes de Fourier
21     v=v+real(Cn*exp(-j*2*pi*n*t/T));
22     % Corriente en el inductor
23     Zn=j*w*n*L+R/(R*n*C*j*w+1);                % Impedancia de entrada
24     i=i+real(Cn/Zn*exp(-j*2*pi*n*t/T));
25     % Tensión en la carga

```

```

26     DT=R/(j*w*n*L*(R*n*C*j*w+1)+R); % Divisor de tensión
27     vc=vc+real(Cn*DT*exp(-j*2*pi*n*t/T));
28 end
29 % Cálculo del Rizado
30 Rizado_corriente=(max(i)-min(i))/2
31 Rizado_Tension_Carga=(max(vc)-min(vc))/2
32
33 % Graficas
34 figure(1) % Corriente en el Inductor
35 plot(t,i,'LineWidth',2);grid
36 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
37 xlim([0 T]);
38 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
39 ylabel('Corriente (A)','fontsize',14,'fontname','Times');
40 figure(2) % Tensión en la Carga
41 plot(t,vc,'LineWidth',2);grid
42 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
43 xlim([0 T]);
44 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
45 ylabel('Tensión en la Carga (V)','fontsize',14,'fontname','Times');

```

12.7.2. Análisis aproximado

Muchos autores analizan el convertidor Buck de manera aproximada suponiendo que la tensión $v_{carga} \approx V_0$, es decir que el valor de capacitancia C es muy elevado y permite asumir que la tensión es aproximadamente constante y de valor δV_{DC} . En esta condición la corriente por el inductor ($i(t)$) se puede calcular como:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v_L(t) dt \quad (12.56)$$

donde:

$$v_L(t) = \begin{cases} V_{DC} - V_0 & 0 \leq t \leq t_{on} \\ -V_0 & t_{on} < t < T \end{cases} \quad (12.57)$$

Resolviendo la ecuación (12.56) para las dos condiciones de tensión del inductor en función de la conectividad del interruptor S_w dadas en la expresión (12.57), se obtiene:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{V_{DC}-V_0}{L}t + I_{min} & 0 \leq t \leq t_{on} \\ -\frac{V_0}{L}(t - t_{on}) + I_{max} & t_{on} < t < T \end{cases} \quad (12.58)$$

En la figura 12.22 se presenta la forma de onda de la corriente $i(t)$ para esta condición de operación.

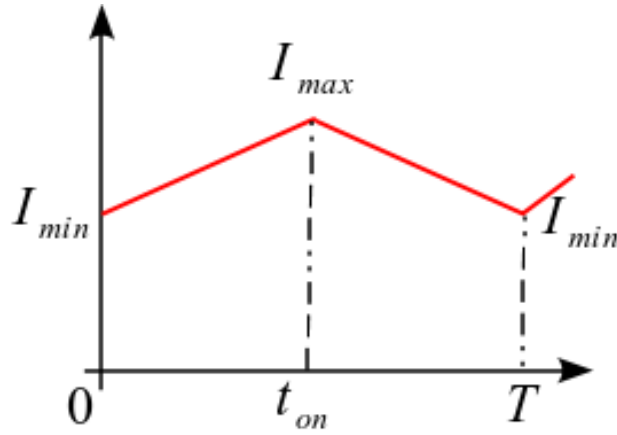


Figura 12.22: Forma de onda de la corriente $i(t)$

La corriente media de la figura 12.22 por el inductor se puede calcular de forma aproximada como:

$$I_0 \approx \frac{1}{2}(I_{max} + I_{min}) \quad (12.59)$$

Sustituyendo la expresión (12.58) en la ecuación (12.59), se obtiene:

$$I_0 \approx \frac{V_{DC} - V_0}{2L}t_{on} + I_{min} \quad (12.60)$$

Remplazando $t_{on} = \delta T$ en la expresión (12.60), se obtiene:

$$I_0 \approx \frac{V_{DC} - V_0}{2L}\delta T + I_{min} \quad (12.61)$$

Por otra parte, la corriente media por el inductor es igual a la corriente media por la carga resistiva, es decir:

$$I_0 \approx \frac{V_0}{R} \quad (12.62)$$

Sustituyendo la expresión (12.62) en la (12.61), se obtiene el valor de corriente mínimo (I_{min}) como:

$$I_{min} = \frac{V_0}{R} - \frac{\delta T (V_{DC} - V_0)}{2L} \quad (12.63)$$

De la expresión (12.63), se puede calcular el rizado de corriente Δi y el valor mínimo de inductancia (L_{min}) que garantiza que el puente trabaje en condición continuada de corriente ($I_{min} = 0$) como:

$$\Delta i = \frac{V_{DC} - V_0}{L} \delta T \quad (12.64)$$

$$L_{min} = \frac{\delta T (V_{DC} - V_0) R}{2V_0} \quad (12.65)$$

El valor de la capacitancia C se puede calcular en función del rizado de tensión que se permite durante la operación del convertidor Buck (Δv_{carga}) como:

$$C = \frac{V_0(1 - \delta)}{8Lf^2\Delta v_{carga}} \quad (12.66)$$

12.8. Convertidor Boost

En la figura 12.23, se presenta la configuración del puente convertidor DC/DC tipo Boost. Este puente presenta dos interruptores electrónicos (S_w y $\overline{S_w}$) cuya operación es complementaria entre sí.

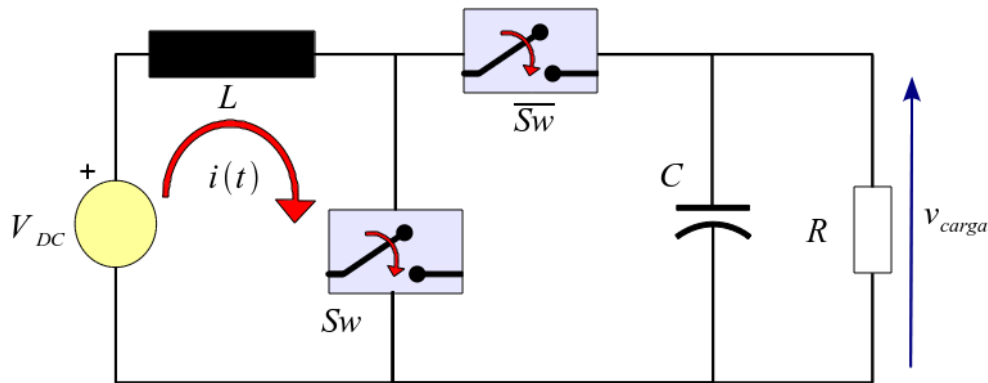


Figura 12.23: Puente Convertidor Boost

En la figura 12.24, se puede observar las dos topologías del puente convertidor Boost en función del estado del interruptor S_w .

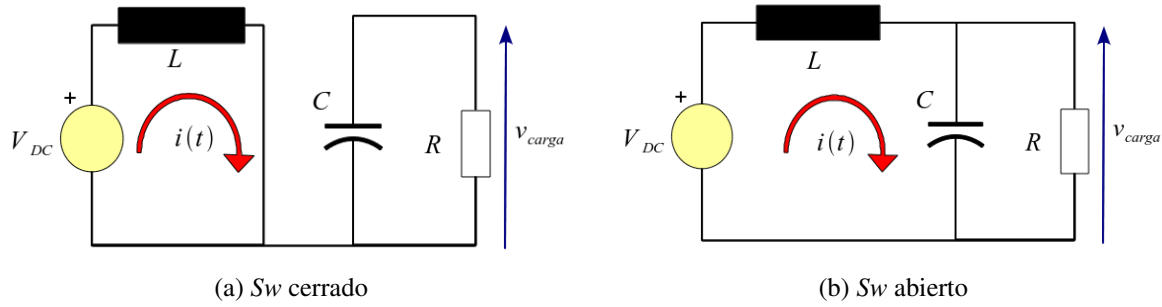


Figura 12.24: Topologías del convertidor Buck en función del estado de S_w

Calculando la tensión en la carga ($v_{carga}(t)$) y la corriente por el inductor ($i(t)$) en función de la posición del interruptor S_w , se obtiene:

- Para $0 \leq t \leq t_{on}$

En este intervalo el circuito a analizar corresponde al de la figura 12.24a donde:

$$\begin{aligned} v_{carga}(t) &= v_{carga}(0)e^{-\frac{t}{RC}} \\ i(t) &= \frac{V_{DC}}{L}t + i(0) \end{aligned} \quad (12.67)$$

Evaluando las condiciones finales del intervalo $0 \leq t \leq t_{on}$, se obtienen las condiciones iniciales para el circuito de la figura 12.24b

$$\begin{aligned} v_{carga}(t_{on}) &= v_{carga}(0)e^{-\frac{t_{on}}{RC}} \\ i(t_{on}) &= \frac{V_{DC}}{L}t_{on} + i(0) \end{aligned} \quad (12.68)$$

- Para $t_{on} \leq t \leq T$

La ecuación diferencial que describe el comportamiento de la tensión en la carga para este intervalo es:

$$V_{DC} = LC \frac{d^2 v_{carga}}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dv_{carga}}{dt} + v_{carga} \quad (12.69)$$

Resolviendo la ecuación diferencial 12.69 en función de las raíces del polinomio característico se obtiene:

$$v_{carga}(t) = v_h(t) + v_p(t) \quad (12.70)$$

donde:

$$v_p(t) = V_{DC} \quad (12.71)$$

$$\begin{aligned} v_h(t) &= k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} && \rightarrow (s_1 \neq s_2) \in \mathbb{R} \\ v_h(t) &= k_1 e^{-st} + k_2 t e^{s_2 t} && \rightarrow (s_1 = s_2) \in \mathbb{R} \\ v_h(t) &= e^{\sigma t} (k_1 \cos(\omega t) + k_2 \operatorname{sen}(\omega t)) && \rightarrow (s_{1,2} = \sigma \pm j\omega) \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (12.72)$$

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{L}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4LC}}{2LC} \quad (12.73)$$

De las condiciones iniciales $v_{carga}(t_{on})$ e $i(t_{on})$ se pueden determinar los valores de k_1 y k_2 resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en función del tipo de tipos de respuesta homogénea como:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} v_{carga}(t_{on}) - V_{DC} \\ \frac{1}{C} \left(i(t_{on}) - \frac{v_{carga}(t_{on})}{R} \right) \end{bmatrix} \quad (12.74)$$

donde:

$$[A] = \begin{bmatrix} e^{s_1 t_{on}} & e^{s_2 t_{on}} \\ s_1 e^{s_1 t_{on}} & s_2 e^{s_2 t_{on}} \end{bmatrix} \rightarrow (s_1 \neq s_2) \in \mathbb{R} \quad (12.75)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} e^{s_1 t_{on}} & t_{on} e^{s_1 t_{on}} \\ s_1 e^{s_1 t_{on}} & (1 + s_1 t_{on}) e^{s_1 t_{on}} \end{bmatrix} \rightarrow (s_1 = s_2) \in \mathbb{R} \quad (12.76)$$

$$\begin{aligned} [A] &= e^{\sigma t_{on}} \begin{bmatrix} \cos(\omega t_{on}) & \operatorname{sen}(\omega t_{on}) \\ \sigma \cos(\omega t_{on}) - \omega \operatorname{sen}(\omega t_{on}) & \omega \cos(\omega t_{on}) + \sigma \operatorname{sen}(\omega t_{on}) \end{bmatrix} \\ &\rightarrow (s_{1,2} = \sigma \pm j\omega) \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (12.77)$$

Conocida la tensión sobre la carga, se puede calcular la corriente del inductor como:

$$i(t) = \frac{v_{carga}(t)}{R} + C \frac{dv_{carga}}{dt} \quad (12.78)$$

Las condiciones finales de este intervalo, corresponden a las iniciales del siguiente ciclo y son:

$$\begin{aligned} v_{carga}(T) &= V_{DC} + v_h(T) \\ i(T) &= \frac{v_{carga}(T)}{R} + C \left. \frac{dv_{carga}}{dt} \right|_{t=T} \end{aligned} \quad (12.79)$$

La respuesta del convertidor alcanza su régimen permanente cuando:

$$\begin{aligned} v_{carga}(t) &= v_{carga}(t+T) \\ i(t) &= i(t+T) \end{aligned} \quad (12.80)$$

12.8.1. Simulación

```

1  % Chopper Tipo BOOST
2  % Datos
3  Vdc =input('Tension DC de la fuente ');
4  R    =input('Resistencia [Ohm] ');
5  L    =input('Inductancia [H] ');
6  C    =input('Capacitancia [F] ');
7  T    =input('Periodo [s] ');
8  delta=input('Razón de Conducción ');
9
10 % Análisis Temporal
11 s=roots([L*C L/R 1]) % Raices del Polinomio Característico
12 % Condiciones Iniciales
13 I1=0;
14 V1=0;
15 nc=0;
16 parar=2; % Condición para detener el programa
17 % Intervalos de Conducción
18 ton=delta*T;
19 t1a=linspace(0,ton,500); % 0 ≤ t ≤ ton
20 t2a=linspace(ton,T,500); % ton ≤ t ≤ T
21 % Cálculo de la Tensión en la carga y la corriente por el inductor
22 % nc son el número ciclos de operación para garantizar llegar a régimen permenente
23 while parar~=1
24 % for i=1:3
25 t1=t1a+nc*T;
```

```

26 t2=t2a+nc*T;
27 ton=delta*T+nc*T;
28 % Para  $0 \leq t \leq t_{on}$ 
29 iL1=Vdc/L*(t1-nc*T)+I1;
30 vC1=V1*exp(-(t1-nc*T)/(C*R));
31 % Condición final del intervalo  $0 \leq t \leq t_{on}$ 
32 I2=iL1(length(t1));
33 V2=vC1(length(t1));
34 DV2=1/C*(I2-V2/R);
35 % Para  $t_{on} \leq t \leq T$ 
36 B=[V2-Vdc;DV2];
37 if imag(s(1))~=0 % Solución Compleja Conjuga
38     sigma=real(s(1));
39     w=imag(s(1));
40 % disp('hola')
41 A=exp(sigma*ton)*[cos(w*ton),sin(w*ton);sigma*cos(w*ton)-w*sin(w*
    ton),w*cos(w*ton)+sigma*sin(w*ton)];
42 k=A\B;
43 vC2=Vdc+exp(sigma*t2).*(k(1)*cos(w*t2)+k(2)*sin(w*t2));
44 iL2=vC2/R+exp(sigma*t2)*C.*((sigma*k(1)+k(2)*w)*cos(w*t2)+(sigma*
    k(2)-k(1)*w)*sin(w*t2));
45 else
46 if s(1)~=s(2) % Solución Real y diferente
47     A=[exp(s(1)*ton),exp(s(2)*ton);s(1)*exp(s(1)*ton),s(2)*exp(s(2)*
    ton)];
48     k=A\B;
49     vC2=k(1)*exp(s(1)*t2)+k(2)*exp(s(2)*t2)+Vdc;
50     iL2=vC2/R+k(1)*s(1)*exp(s(1)*t2)+k(2)*s(2)*exp(s(2)*t2);
51 else % Solución Real e igual
52     A=exp(s(1)*ton)*[1,ton;s(1),1+s(1)*ton];
53     k=A\B;
54     vC2=(k(1)+k(2)*t2).*exp(s(1)*t2)+Vdc;
55     iL2=vC2/R+exp(s(1)*t2).*(s(1)*k(1)+k(2)+s(1)*k(2)*t2);
56 end
57 end
58 % Condición para evaluar la llegada al régimen permanente
59 if abs(V1-vC2(length(t2)))<1e-4
60     parar=1;
61 end
62 % Condición final del intervalo  $t_{on} \leq t \leq T$ 

```

```

63 I1=iL2(length(t2));
64 V1=vC2(length(t2));
65 nc=nc+1;
66 end
67
68 % Valores temporales del último ciclo de operación
69 t=[t1a,t2a];
70 i=[iL1,iL2];
71 vc=[vC1,vC2];
72
73 % Cálculo del Rizado
74 Rizado_corriente=(max(i)-min(i))/2
75 Rizado_Tension_Carga=(max(vc)-min(vc))/2
76
77 % Valores Medios
78 Io=1/T*trapz(t,i)
79 Vo=1/T*trapz(t,vc)
80
81 % Graficas de Corriente y Tensión
82 figure(1) % Corriente en el Inductor
83 plot(t,i,'LineWidth',2);grid
84 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
85 xlim([0 T]);
86 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
87 ylabel('Corriente (A)','fontsize',14,'fontname','Times');
88 figure(2) % Tensión en la Carga
89 plot(t,vc,'LineWidth',2);grid
90 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Times');
91 xlim([0 T]);
92 xlabel('Tiempo (s)','fontsize',14,'fontname','Times');
93 ylabel('Tensión en la Carga (V)','fontsize',14,'fontname','Times');

```

12.8.2. Análisis aproximado

Muchos autores analizan el convertidor Boost de manera aproximada suponiendo que la tensión $v_{carga} \approx V_0$, es decir que el valor de capacitancia C es muy elevado y permite asumir que la tensión es aproximadamente constante y de valor $(1 - \delta)V_{DC}$. En esta condición la corriente por el inductor ($i(t)$) se puede calcular como:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{V_{DC}}{L}t + I_{min} & 0 \leq t \leq t_{on} \\ \frac{V_{DC}-V_0}{L}(t - t_{on}) + I_{max} & t_{on} < t < T \end{cases} \quad (12.81)$$

Evaluando las condiciones finales de cada intervalo de la expresión (12.81) y con la condición de régimen permanente ($i(t) = i(t + T)$) se puede encontrar los valores de I_{min} e I_{max} como:

$$I_{min} = \frac{V_{DC}-V_0}{L}(T - t_{on}) + I_{max} \quad (12.82)$$

$$I_{max} = \frac{V_{DC}}{L}t_{on} + I_{min}$$

Calculando la corriente promedio por la inductancia a partir de la expresión (12.59) y (12.82), se obtiene:

$$I_0 \approx I_{min} + \frac{V_{DC}}{2L}t_{on} = I_{min} + \frac{V_{DC}}{2L}\delta T \quad (12.83)$$

Sustituyendo el resultado de la expresión (12.83) en los valores de I_{min} e I_{max} de la ecuación (12.82), se obtiene:

$$I_{min} = I_0 - \frac{V_{DC}}{2L}\delta T \quad (12.84)$$

$$I_{max} = I_0 + \frac{V_{DC}}{2L}\delta T$$

De la expresión (12.84), se puede calcular el valor del rizado de corriente (Δi) por el inductor y el valor mínimo de inductancia que garantiza condición continuada de corriente ($I_{min} = 0$) como:

$$\Delta i = \frac{V_{DC}}{2L}\delta T \quad (12.85)$$

$$L_{min} = \frac{V_{DC}\delta T}{2I_0} \quad (12.86)$$

Para esta configuración de puente convertidor se puede calcular la corriente media por el inductor (I_0) en función de la corriente media por la resistencia R como:

$$I_0 = \frac{V_0}{R(1 - \delta)} \quad (12.87)$$

donde:

$$V_0 = \frac{V_{DC}}{(1 - \delta)} \quad (12.88)$$

Sustituyendo el resultado de las expresiones (12.87) y (12.88) en el valor de la inductancia mínima de ecuación (12.86), se obtiene:

$$L_{min} = (1 - \delta) \delta T \frac{V_{DC} R}{2V_0} = (1 - \delta)^2 \delta \frac{R}{2f} \quad (12.89)$$

El valor de la capacitancia C se puede calcular en función del rizado de tensión que se permite durante la operación del convertidor Boost (Δv_{carga}) como:

$$C = \frac{V_{DC}}{Rf\Delta v_{carga}} \quad (12.90)$$

12.9. Convertidor Buck/Boost

En la figura 12.25, se presenta el esquema de un convertidor dual Buck/Boost. La operación como convertidor Buck requiere que el interruptor Sw_2 permanezca cerrado y Sw_1 conmute. Para la operación como puente Boost el dispositivo Sw_1 debe permanecer cerrado y Sw_2 conmutando.

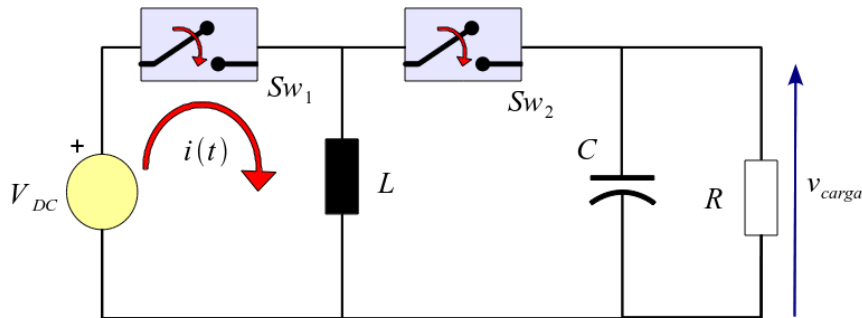


Figura 12.25: Convertidor dual Buck/Boost

12.10. Frenado Eléctrico

Por lo general, en la tracción de vehículo accionados por motores de corriente continua, como por ejemplo los trenes del Metro de Caracas, se utiliza el frenado eléctrico para disminuir la velocidad del móvil. Existen dos esquemas de frenado eléctrico, el primero se denomina regenerativo y consiste en extraer energía del sistema mecánico y devolverla a la red de corriente continua, utilizando un chopper elevador. El segundo se denomina reostático y consiste en extraer energía del sistema

mecánico y disiparla en un reóstato de frenado. En un sistema de tracción eléctrica la condición de frenado eléctrico se puede mantener para velocidades superiores 2 km/h .

12.10.1. Frenado Regenerativo

Este esquema de frenado, al momento de devolver la energía a la red de alimentación de corriente continua, tiene como limitación la capacidad de absorción de esta, generalmente esta capacidad no puede exceder el 15 % del valor de diseño de tensión del sistema. Para utilizar este esquema de frenado el mayor tiempo posible se coordina la devolución de energía a la red por el vehículo en proceso de frenado, con el consumo de otro vehículo en la misma línea de alimentación acelerando. En la figura 12.26, se presenta el esquema del frenado regenerativo.

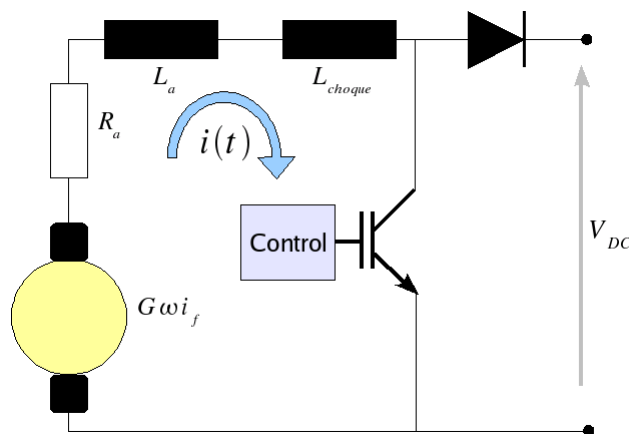


Figura 12.26: Esquema de frenado regenerativo

El funcionamiento de este esquema consiste en realizar un cortocircuito en la armadura de la máquina de corriente continua que se conecta en serie con una inductancia de choque para establecer una corriente por este circuito. Posteriormente, se apaga la componente y la energía acumulada en la inductancia de la máquina en conjunto con la inductancia de choque origina el encendido del diodo y la corriente de la armadura de la máquina circula hacia la fuente hasta tanto no encienda nuevamente la componente principal. En la operación de frenado se disminuye la velocidad por tanto la fuerza electromotriz de la máquina en cada operación es menor. Para mantener una condición de operación de régimen permanente en este puente se debe respetar el resultado de la expresión (12.39), por este motivo este esquema no se puede utilizar para detener completamente la máquina, el frenado final se realiza mediante sistemas mecánicos convencionales.

12.10.2. Frenado Reostático

Este esquema de frenado, en una primera etapa funciona igual que el anterior, se establece una corriente circulatoria por la armadura de la máquina y la inductancia de choque producto del cortocircuito de este circuito a través de la componente principal del puente. La energía acumulada en las inductancias es disipada luego del apagado de la componente principal, y el encendido del tiristor de frenado, en una resistencia de frenado. En la figura 12.27, se presenta el esquema de este tipo de frenado.

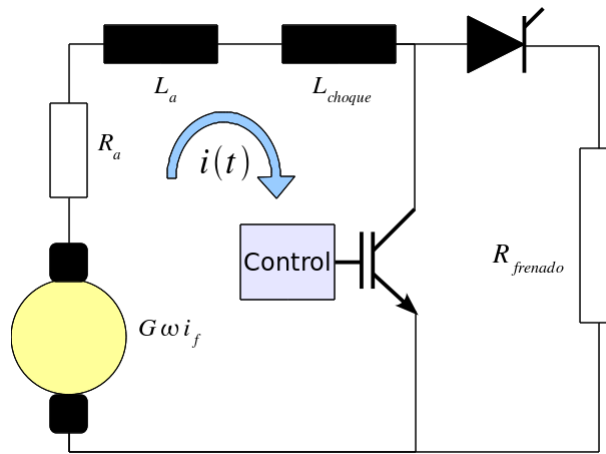


Figura 12.27: Esquema de frenado reostático

La potencia promedio de frenado reostático, viene dado por la expresión:

$$P_{frenado} = R_{frenado} (I_a (1 - \delta))^2 \quad (12.91)$$

12.10.3. Frenado Combinado

En la figura 12.28, se presenta un esquema para frenado que incluye el frenado regenerativo y reostático en un solo puente. Este esquema usa el frenado regenerativo hasta el límite de absorción de la red y luego termina de realizar la operación mediante la disipación de energía en el reóstato de frenado. Este esquema, es el que utilizar el Metro de Caracas para disminuir la velocidad de los trenes en las estaciones, el alto total del tren se realiza mediante zapatas mecánicas en la ruedas. La temperatura en los túneles del Metro de Caracas, se debe a la disipación de calor en las resistencias de frenado.

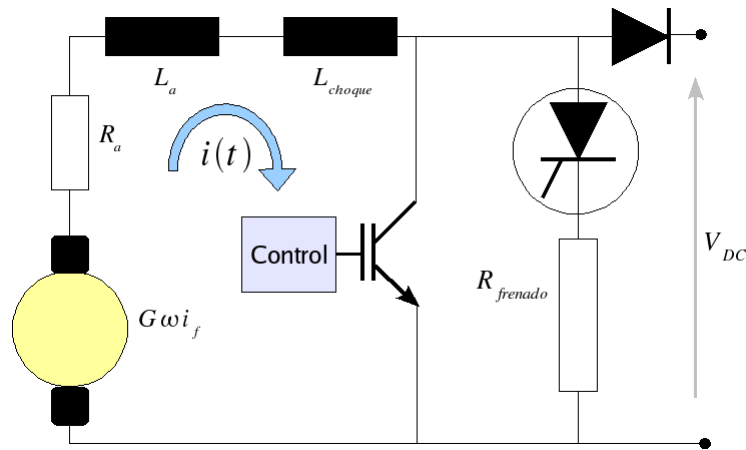


Figura 12.28: Esquema de frenado combinado

12.11. Ejercicios

- Un chopper tipo A se energiza de una fuente de $600V$ y alimenta una carga de $R = 15\Omega$, $L = 4mH$ y $E = 200V$, con un periodo de $4000\mu s$ y un tiempo de encendido de $2500\mu s$. Determine corriente media, rizado de corriente. Recalcule para $L = 40mH$.
- Un Chopper tipo A o reductor, presenta los siguientes parámetros: $V_{DC} = 24V$, razón de conducción $\delta = 0,65$, $L = 250mH$ y $R = 10\Omega$. La frecuencia de conmutación es de $25kHz$. Determine:
 - La tensión de Salida.
 - Las corrientes máximas y mínimas en la bobina.
 - El rizado de la Tensión de salida.
- Un chopper tipo B se energiza de una fuente de $600V$ y alimenta una carga de $R = 15\Omega$, $L = 40mH$ y $E = 400V$, con un periodo de $4000\mu s$ y un tiempo de encendido de $2500\mu s$. Determine corriente media, rizado de corriente y potencia devuelta a la red.
- Un chopper tipo Buck presenta los siguientes parámetros: $V_{DC} = 24V$, $\delta = 0,65$, $L = 250\mu H$, $C = 75\mu F$ y $R = 10\Omega$. La frecuencia de conmutación es de $25kHz$. Determine:
 - La tensión de Salida.
 - Las corrientes máximas y mínimas en la bobina.
 - El rizado de la Tensión de salida.

5. El chopper Buck de la figura 12.19 esta alimentado por una fuente de $24V$ y conmuta a $100kHz$. Este puente alimenta un conjunto de cargas que requieren las siguientes especificaciones para su funcionamiento: Tensión variable de $5 \rightarrow 15V$ con un rizado pico a pico de 3% , Corriente de $5 \rightarrow 8A$ sin importar el nivel de tensión. Determine:
- a) L_{min} necesaria para mantener un rizado de corriente del 7% .
 - b) C_{min} para mantener el rizado de tensión solicitado.
 - c) Compruebe los resultados mediante simulaciones.
6. Un chopper tipo Boost, presenta los siguientes datos $V_{DC} = 20V$, $\delta = 0,6$, $L = 65\mu H$, $C = 200\mu F$ y $R = 10\Omega$. La frecuencia de conmutación es de $45kHz$.
- a) Calcule la tensión de salida.
 - b) Calcule la corriente media, máxima y mínima en la bobina.
 - c) Calcule el rizado de la tensión de salida.
 - d) Determine la corriente media por el diodo.
7. Diseñar un convertidor Boost que trabaje con una tensión de entrada en el rango de $120 \rightarrow 300V$ con una tensión de salida de $400V$. El rizado de la tensión de salida no puede superar el 4% pico a pico. La frecuencia de conmutación del puente es de $50kHz$. El puente alimenta una carga que consume $150W$ y se desea que el convertidor mantenga condición continuada de corriente con cargas de hasta $50W$.
- a) Determine la inductancia (L) y la capacitancia (C) del puente.
 - b) Compruebe sus resultados mediante simulaciones.

Parte VI

Puentes DC - AC

13.1. Aspectos Generales

Los inversores, son circuitos que tienen como finalidad suministrar tensión o corriente alterna, variable en magnitud y frecuencia a partir de una fuente de corriente continua. Los rectificadores controlados en algunos casos y dependiendo del ángulo de disparo pueden trabajar como inversores. Las principales aplicaciones de los inversores son el control de velocidad y posición de los máquinas de corriente alterna, la fabricación de fuentes ininterrumpidas de potencia (*UPS*) para cargas críticas y dispositivos de corriente alterna que funciones a partir de una batería como los vehículos eléctricos.

13.2. Principio de Funcionamiento

En la figura 13.1, se presenta el esquema de un inversor monofásico. Este convertidor esta conformado por cuatro interruptores bidireccionales de corriente. La operación sincronizada de los interruptores $Sw_{1,2,3,4}$ permite aplicar sobre la carga tensiones positivas ($+V_{DC}$), negativas ($-V_{DC}$) y cero (0).

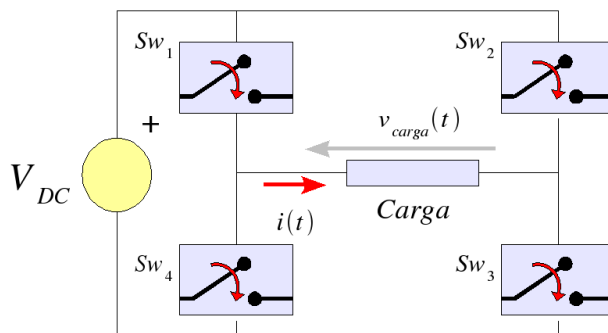


Figura 13.1: Esquema del Inversor Monofásico

Para obtener tensión positiva ($+V_{DC}$) en la carga, es necesario cerrar los interruptores Sw_1 y Sw_3 , mientras que Sw_2 y Sw_4 permanecen abiertos. En la figura 13.2 se presenta la topología del convertidor para esta secuencia de operación de los interruptores.

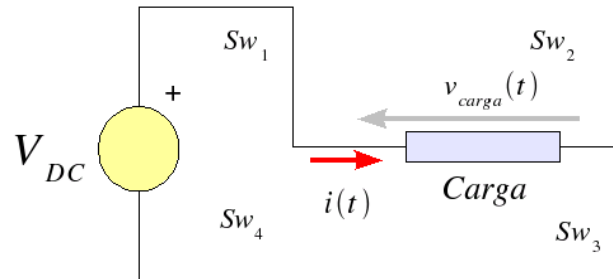


Figura 13.2: Topología de los interruptores para obtener tensión positiva en la carga

Para obtener tensión negativa ($-V_{DC}$) en la carga, es necesario cerrar los interruptores Sw_2 y Sw_4 , mientras que Sw_1 y Sw_3 permanecen abiertos. En la figura 13.3 se presenta la topología del convertidor para esta secuencia de operación de los interruptores.

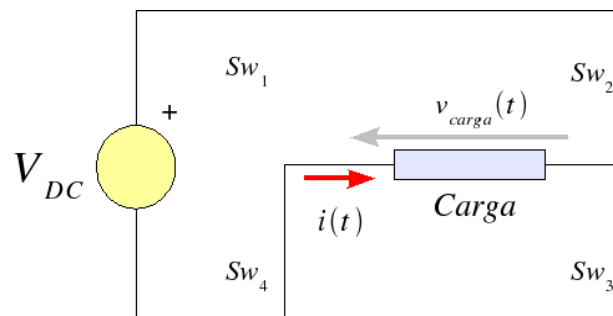


Figura 13.3: Topología de los interruptores para obtener tensión negativa en la carga

Para obtener tensión cero (0) en la carga, es necesario cerrar los interruptores Sw_2 y Sw_1 ó Sw_3 y Sw_4 mientras que los demás permanecen abiertos. Generalmente se alterna las dos secuencias de disparo, de forma simétrica, para obtener tensión cero en la carga con la finalidad que todas las componentes manejen los mismos niveles de pérdidas. En la figura 13.4 se presenta la topología del convertidor para esta secuencia de operación de los interruptores.

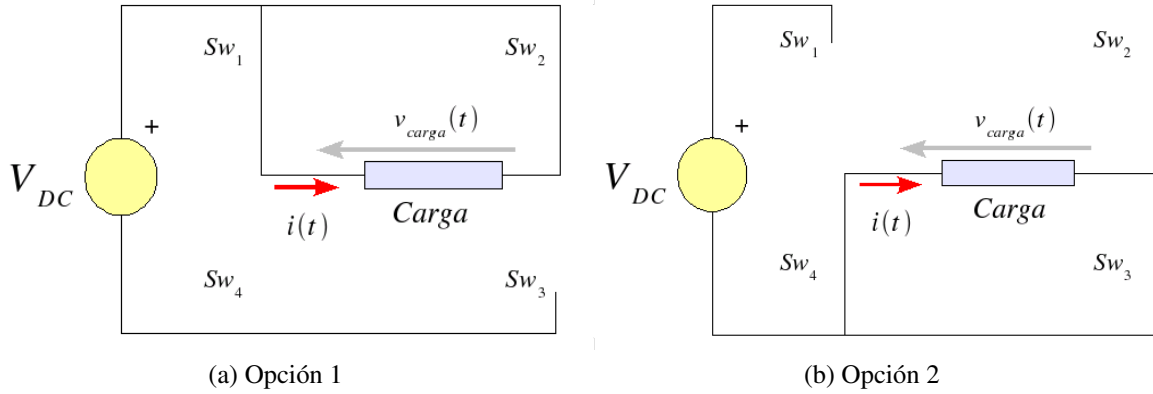


Figura 13.4: Topología de los interruptores para obtener tensión cero en la carga

En la tabla 13.1 se presenta un resumen de la secuencia de operación de los interruptores para obtener cada una de las tensiones $+V_{DC}$, $-V_{DC}$ y 0 sobre la carga.

Tabla 13.1: Secuencia de Disparo del Inversor Monofásico

<i>Interruptores Cerrados</i>	<i>Tensión sobre la Carga</i>
Sw_1 y Sw_3	$+V_{DC}$
Sw_2 y Sw_4	$-V_{DC}$
Sw_1 y Sw_2	0
Sw_3 y Sw_4	0

Controlando el tiempo que el convertidor permanece en cada uno de los estados de la tabla 13.1, se puede controlar la frecuencia y magnitud efectiva de la tensión o corriente sobre la carga. Los puentes inversores pueden trabajar con carga pasiva o activa alterna.

En la figura 13.5, se presenta la forma de onda de tensión sobre la carga para una operación simétrica del inversor en dos estados ($+V_{DC}$, $-V_{DC}$). Controlado el tiempo de conmutación de los interruptores ($T/2$), se puede modificar la frecuencia de la onda de tensión de salida. La tensión efectiva sobre la carga se puede calcular en este caso como:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_{DC}^2 dt} = V_{DC} \quad (13.1)$$

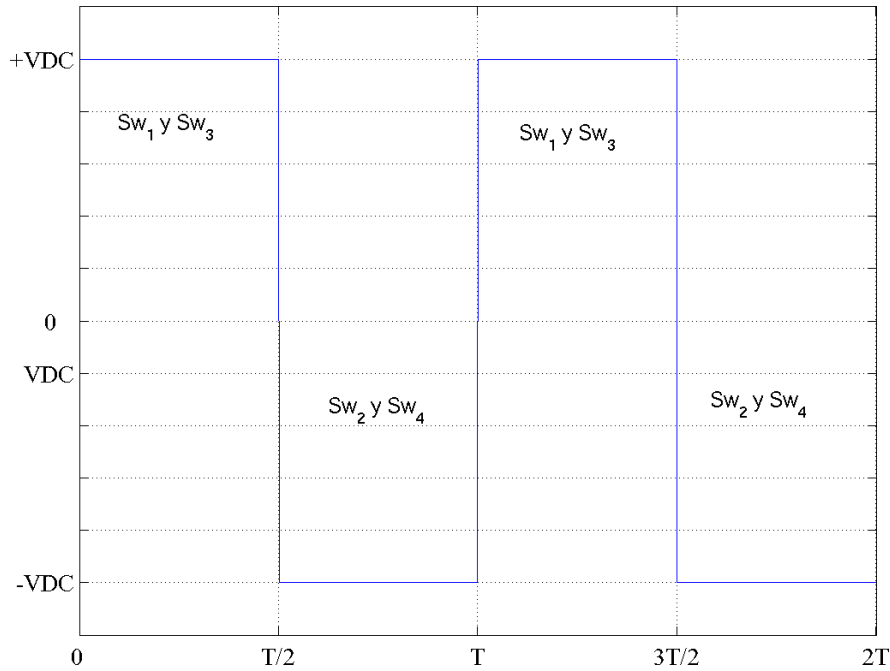


Figura 13.5: Tensión en la carga para un inversor monofásico en operación de 2 estados

Para modificar el valor efectivo de la onda de salida del inversor, es necesario modular el valor de la fuente DC en cada semiciclo de la onda de alterna de forma simétrica. Esta modulación se puede realizar de forma análoga a la operación de los controladores DC - DC (chopper) en donde durante el tiempo de conducción de las componentes se realizaban cortocircuitos en la carga a fin de disminuir el valor de la tensión media sobre esta. A este tipo de operación se le conoce como control por tres estados ($+V_{DC}$, $-V_{DC}$, 0). Otra posibilidad de reducir el valor medio de la fuente DC, durante el semiciclo de operación de la onda alterna es invertir el valor de la fuente durante un instante de tiempo, a esta operación se le conoce como control por dos estados ($+V_{DC}$, $-V_{DC}$). En la figura 13.6, se presenta la forma de onda de tensión sobre la carga para un inversor con control de 3 estados. Para este caso la tensión efectiva sobre la carga en función del ancho del pulso a , es:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_x^{a+x} V_{DC}^2 dt + \int_{x+\frac{T}{2}}^{a+x+\frac{T}{2}} V_{DC}^2 dt \right)} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_x^{a+x} V_{DC}^2 dt} = V_{DC} \sqrt{\frac{2a}{T}} \quad (13.2)$$

Donde:

$$0 \leq a \leq \frac{T}{2}$$

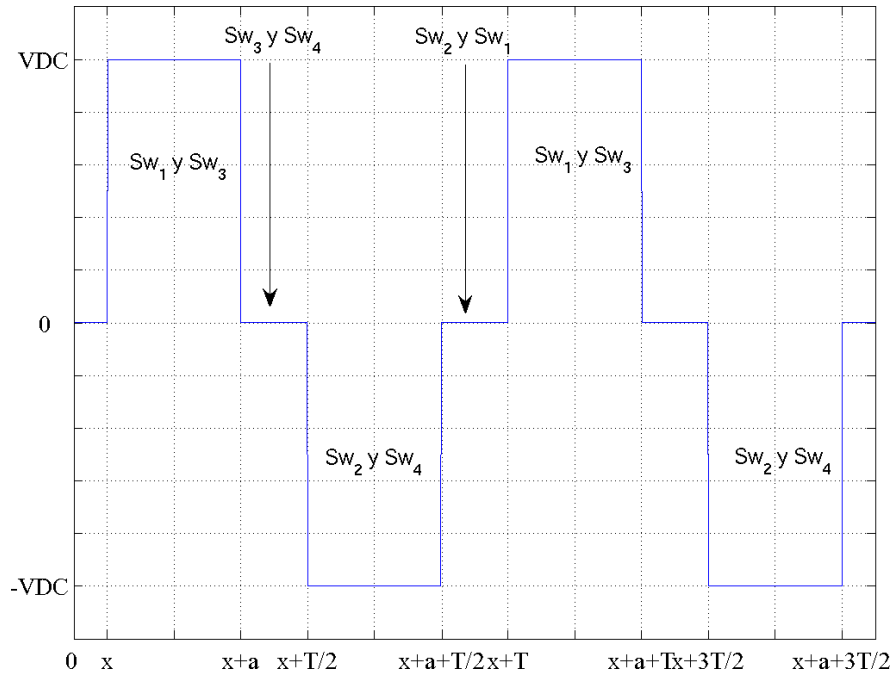


Figura 13.6: Tensión en la carga para un inversor monofásico en operación de 3 estados

Realizando el cambio de variable $a = T/2 - 2x$ en la expresión (13.2), se obtiene:

$$V_{rms} = V_{DC} \sqrt{1 - \frac{4x}{T}} \quad (13.3)$$

La tensión de salida del inversor de la figura (13.6), aprovechado su simetría, se puede expresar en series de Fourier como:

$$v(t) = \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} C_n \sin(n\omega t) \quad (13.4)$$

donde:

$$C_n = \frac{4}{T} \int_x^{\frac{T}{2}-x} V_{DC} \sin(n\omega t) d\omega t = \left(\frac{8V_{DC}}{nT} \right) \cos(nx) \quad (13.5)$$

$$0 \leq x \leq \frac{T}{4} \quad (13.6)$$

La variación del valor de "x" permite modificar el valor efectivo de la señal de salida, así como la amplitud de cada armónica de la onda. Por esta razón el contenido armónico de la señal puede ser controlado con una escogencia adecuada del valor de "x". Por ejemplo un valor de $x = T/12$, anula la tercera armónica de la señal y sus múltiplos. En la figura 13.7, se presenta un ejemplo

gráfico de la eliminación de las terceras y quinta armónica en tres formas de ondas generadas por el inversor. Se puede observar en la 13.7a y 13.7b como el área positiva y negativa en ambas gráficas se compensan, ocasionando la anulación de la armónica respectiva. Por otro lado en la 13.7c se observa la forma de onda para la eliminación de la tercer y quinta armónica en la figura 13.7d se evidencia que en el espectro armónico de la señal no hay presencia de tercera ni quinta armónica.

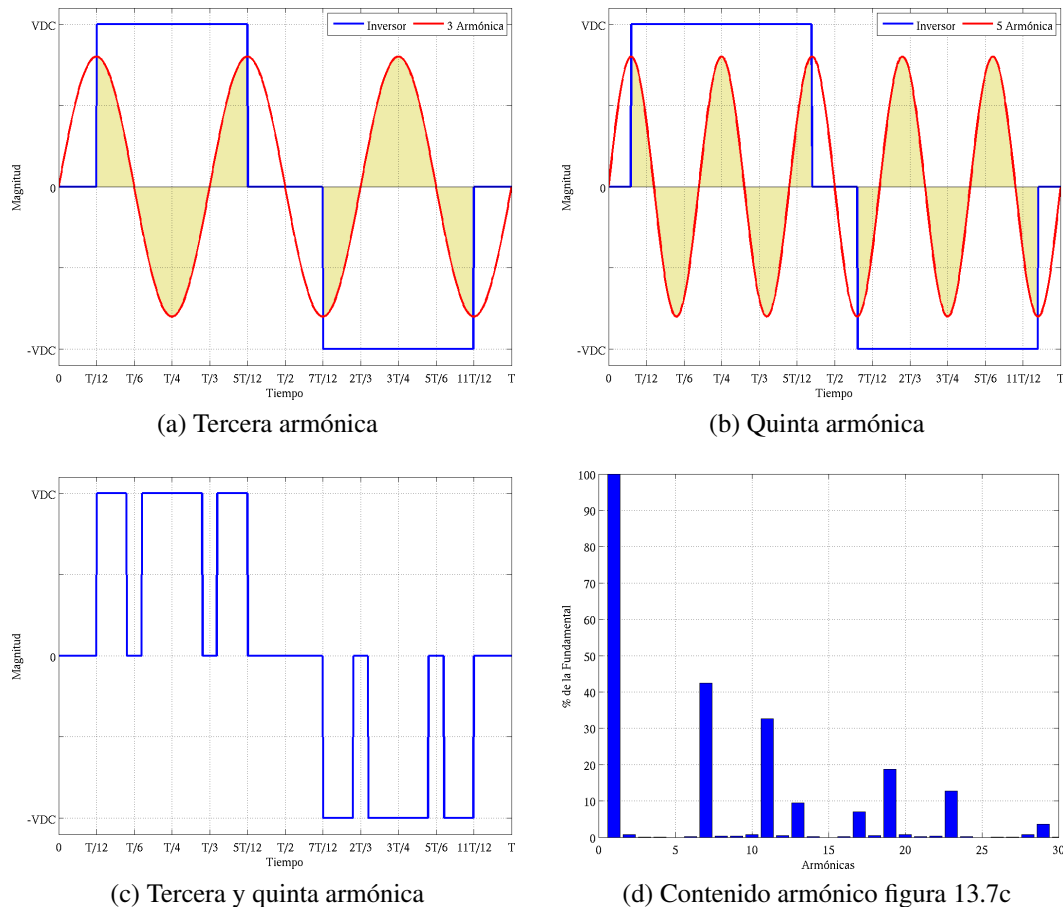


Figura 13.7: Eliminación de armónicos

13.3. Inversor Monofásico

En la figura 13.8, se presenta el esquema de un puente inversor monofásico de media onda y onda completa. Los interruptores bidireccionales en este caso, están construido por un IGBT en antiparalelo con un diodo. Esta configuración permite que la corriente positiva sea manejada por el IGBT, mientras que la negativa por el diodo de descarga.

En la figura 13.9, se presenta la forma de onda de tensión y corriente sobre la carga en régimen permanente para un inversor de media onda, destacando la componente en conducción en cada instante de tiempo.

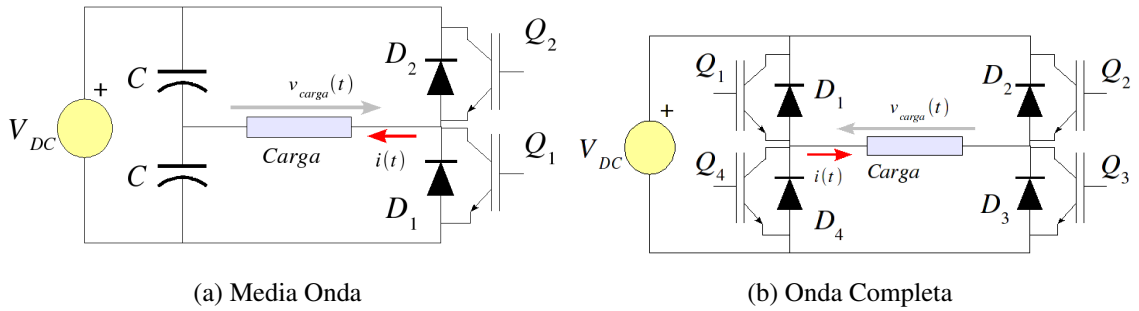


Figura 13.8: Inversor monofásico

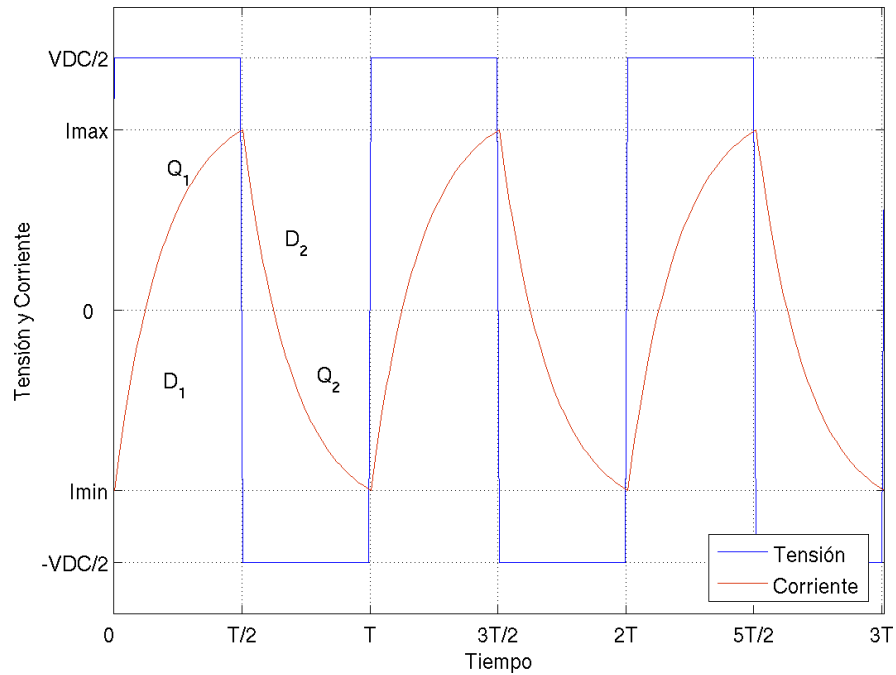


Figura 13.9: Tensión y corriente en la carga para un inversor de media onda

En la figura 13.10, se presenta la forma de onda de tensión y corriente sobre la carga en régimen permanente, para un inversor de onda completa, destacando la componente en conducción en cada instante de tiempo.

13.3.1. Expresión de Corriente en Régimen Permanente

Para el inversor monofásico de la figura 13.8, se puede apreciar que la para la configuración de media onda la tensión sobre la carga varía entre $\pm V_{DC}/2$, mientras que para el de onda completa varía ente $\pm V_{DC}$. La ecuación diferencial que describe el circuito para una carga del tipo RL viene dada por:

$$v_f(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (13.7)$$

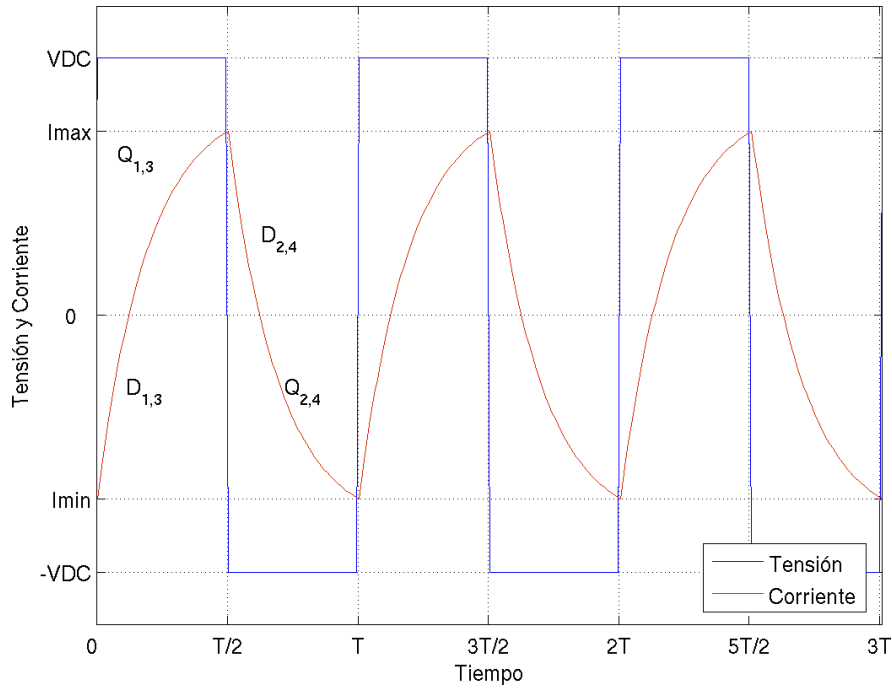


Figura 13.10: Tensión y corriente en la carga para un inversor de onda completa

Donde:

$$v_f(t) = \begin{cases} V_1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -V_1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Para el puente inversor de media onda $V_1 = V_{DC}/2$, mientras que para el de onda completa $V_1 = V_{DC}$.

Resolviendo la ecuación diferencial (13.7), para cada uno de los semiciclos obtenemos:

para $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$:

$$i(t) = k_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_1}{R} \quad (13.8)$$

Evalutando la condición inicial $i(0) = -I_{min}$ en la expresión (13.8), se obtiene:

$$i(t) = \frac{V_1}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - I_{min} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (13.9)$$

La condición final del intervalo se obtiene como:

$$i\left(\frac{T}{2}\right) = I_{max} = \frac{V_1}{R} \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) - I_{min} e^{-\frac{T}{2\tau}} \quad (13.10)$$

para $\frac{T}{2} \leq t \leq T$:

$$i(t) = k_2 e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{V_1}{R} \quad (13.11)$$

Evaluando la condición inicial $i(T/2) = I_{max}$ en la expresión (13.11), se obtiene:

$$i(t) = \frac{V_1}{R} \left(e^{-\frac{(t-T/2)}{\tau}} - 1 \right) + I_{max} e^{-\frac{(t-T/2)}{\tau}} \quad (13.12)$$

La condición final del intervalo, se obtiene como:

$$i(T) = I_{min} = \frac{V_1}{R} \left(e^{-\frac{T}{2\tau}} - 1 \right) + I_{max} e^{-\frac{T}{2\tau}} \quad (13.13)$$

Por simetría de la onda se cumple que:

$$I_{min} = -I_{max} \quad (13.14)$$

Sustituyendo la condición de simetría (13.14) en la ecuación (13.10), se obtiene:

$$\begin{aligned} I_{max} &= \frac{V_1}{R} \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) - I_{max} e^{-\frac{T}{2\tau}} \\ I_{max} \left(1 + e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) &= \frac{V_1}{R} \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) \\ |I_{max}| = |I_{min}| &= \frac{V_1}{R} \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right)}{\left(1 + e^{-\frac{T}{2\tau}} \right)} \end{aligned} \quad (13.15)$$

13.3.2. Tensión Efectiva

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V_1^2 dt} = V_1 \quad (13.16)$$

13.3.3. Expresión en Series de Fourier

13.3.3.1. Tensión

$$v(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_1}{n\pi} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad (13.17)$$

Nota: La expresión (13.17), es solo válida par los n impares.

13.3.3.2. Corriente

$$i(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_1}{n\pi} \frac{1}{Z} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T} - \phi_n\right) \quad (13.18)$$

donde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}$$

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{n\omega L}{R}\right)$$

13.3.4. Factor de Distorsión Armónica (*THD*)

El factor de distorsión armónica (*THD*) para tensión es:

$$THD = \frac{\sqrt{v_1^2 - \left(\frac{4V_1}{n\pi}\right)^2}}{\frac{4V_1}{n\pi}} = 0,48343 \quad (13.19)$$

13.3.5. Potencia Activa de 1^{ra} Armónica

$$P_1 = \left(\frac{4V_1}{n\pi \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right)^2 R \quad (13.20)$$

13.4. Inversor Trifásico

En la figura 13.11, se presenta el esquema de un inversor trifásico construido con IGBT y diodos de descarga libre en antiparalelo.

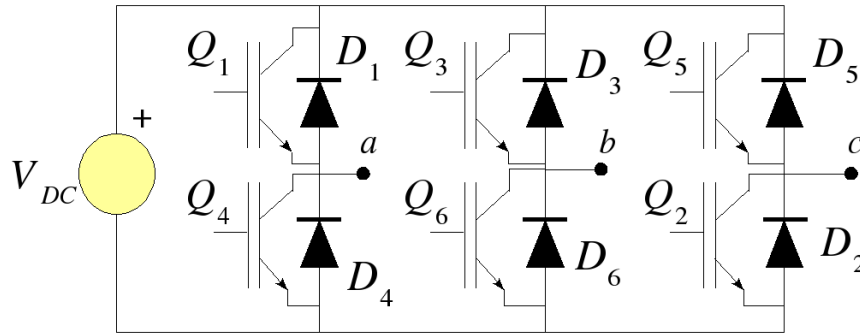


Figura 13.11: Inversor trifásico

El sistema trifásico generado a partir de la fuente de corriente continua debe cumplir las siguientes condiciones:

1. Las tensiones en las tres fases deben poseer igual módulo.
2. Debe existir un desfase de $2\pi/3$ entre las fases.
3. El sistema de tensiones debe tener una secuencia (a, b, c) o (a, c, b) .
4. La suma de las tensiones en cada instante de tiempo debe ser cero ($v_{ab}(t) + v_{bc}(t) + v_{ca}(t) = 0$).

En la figura 13.12, se presenta un posible sistema de tensiones trifásicas generadas por el inversor. Analizando este sistema de tensiones, se puede evidenciar que cumple las tres primeras condiciones pero la sumatoria de tensiones línea a línea instantáneas es diferente de cero.

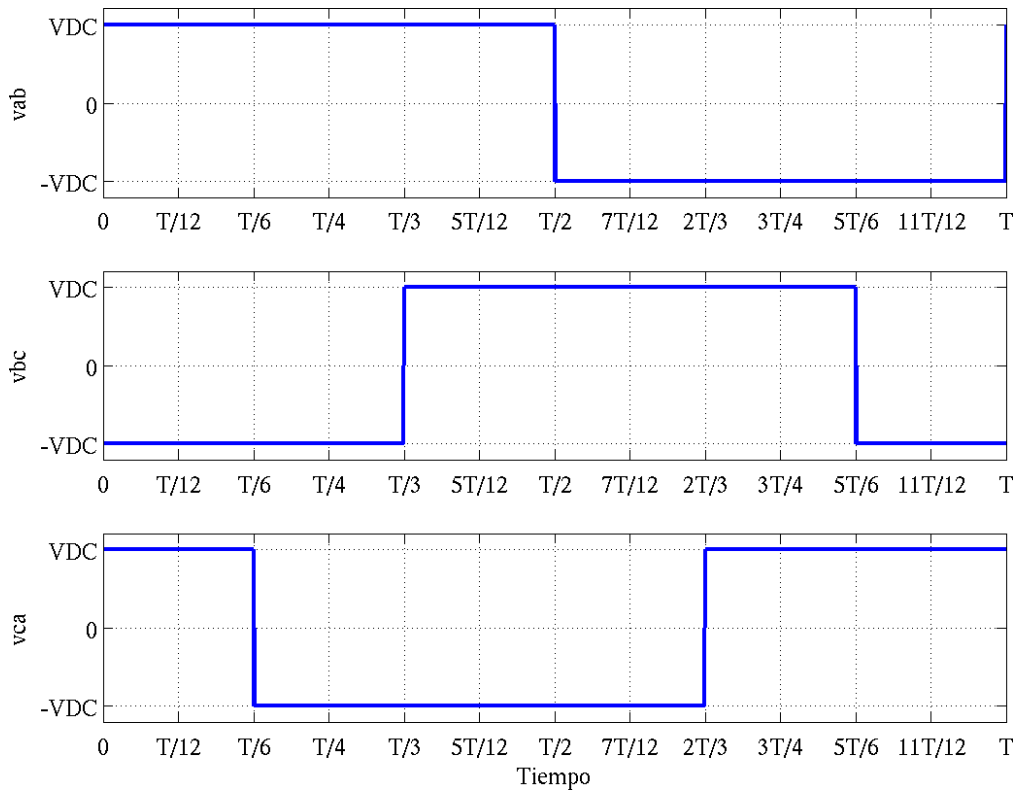


Figura 13.12: Sistema de tensiones trifásica

Estudiando la secuencia de disparo de los IGBT para generara este sistema trifásico de la figura 13.12, se pude deducir que para la obtención de esta forma de onda se requiere la operación simultanea de los dos componentes pertenecientes a la misma rama, esto ocasionaría un cortocircuito en la fuente de corriente continua, razón por la cual esta forma de onda no puede ser generada por este puente convertidor.

Para cumplir la condición que la sumatoria instantánea de tensiones entre las fases sea igual ha cero, las formas de onda generadas por el puente inversor no pueden poseer tercer armónico (secuencia 0). Esta condición garantiza que no exista operación simultánea de dos interruptores de la misma rama. En la figura 13.13, se presenta un sistema de tensiones trifásica sin tercer armónico, con su respectiva secuencia de disparo de las componentes para su generación en un inversor trifásico.

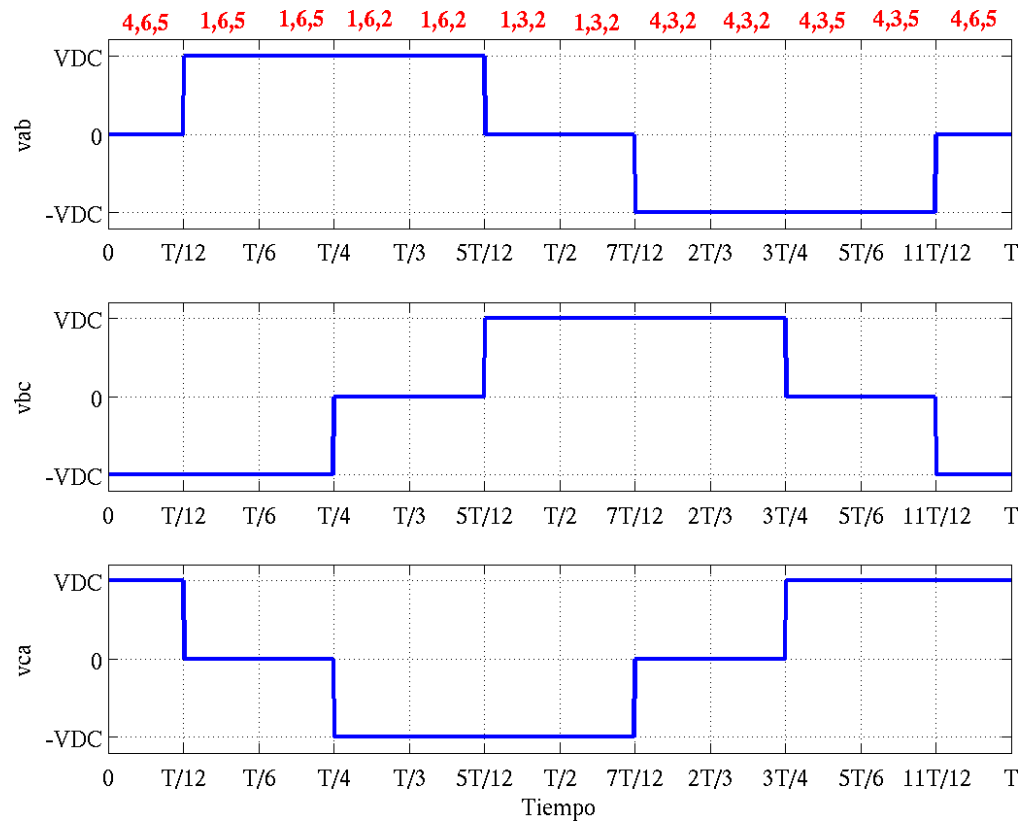


Figura 13.13: Sistema de tensiones trifásicas sin presencia de tercer armónico

En la figura 13.14, se presenta el contenido armónico de la tensión “ v_{ab} ” para las formas de onda de las figuras 13.12 y 13.13. Se puede apreciar la ausencia de terceros armónicos y sus múltiplos en el contenido armónico de las dos ondas correspondientes a la figura 13.13.

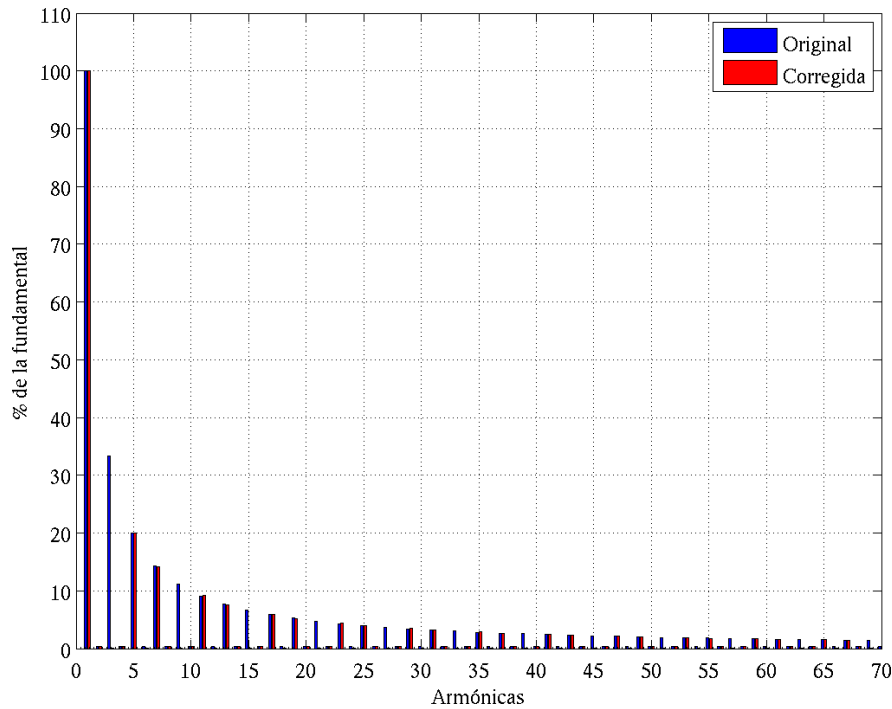


Figura 13.14: Contenido armónica del sistema de tensiones trifásicas con y sin tercer armónico

13.4.1. Tensión en Series de Fourier

La expresión en series de Fourier de la tensión línea a línea del inversor trifásico sobre la carga para la forma de onda de la figura 13.13 es:

$$v_{ab}(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_{DC}}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \sin\left(n\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\right) \quad (13.21)$$

$$v_{bc}(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_{DC}}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \sin\left(n\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (13.22)$$

$$v_{ca}(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_{DC}}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \sin\left(n\left(\omega t - \frac{7\pi}{6}\right)\right) \quad (13.23)$$

Se puede destacar que para $n = 3$ y sus múltiplos los coeficientes de de la serie son iguales ha cero.

13.4.2. Tensión Efectiva

La tensión efectiva total línea a línea sobre la carga es:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{2}{3}} V_{DC} \quad (13.24)$$

13.4.3. Factor de Distorsión Armónica Total

El factor de distorsión armónica total en tensión es:

$$THD = \frac{\sqrt{V_{rms}^2 - V_{rms1}^2}}{V_{rms1}} = 0,31084 \quad (13.25)$$

13.4.4. Modelo en Vectores Espaciales

Respetando que los interruptores de la misma rama operan de manera complementaria entre si, a fin de evitar cortocircuitos sobre la fuente de corriente continua.

$$\begin{aligned} S_{w4} &= \overline{S_{w1}} \\ S_{w6} &= \overline{S_{w3}} \\ S_{w2} &= \overline{S_{w5}} \end{aligned} \quad (13.26)$$

Se pueden redefinir los interruptores de la figura 13.11, en función de las fases del sistema trifásico como:

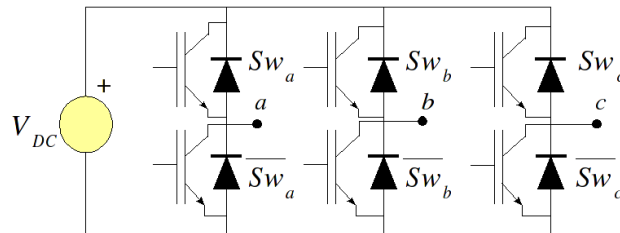


Figura 13.15: Esquema del inversor trifásico con operación complementaria de interruptores

Donde S_{w_x} igual a "1" corresponde al encendido del interruptor superior de la rama "x" y "0" corresponde al encendido del interruptor inferior de la rama.

Definiendo el vector espacial de tensión línea neutro como:

$$\vec{v}_{fn} \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} = v_{\alpha}(t) + jv_{\beta}(t) \quad (13.27)$$

A partir de la definición (13.27), se puede calcular el vector espacial de tensión aplicado a partir de las tensiones línea a línea, como:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{ll} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ab}(t) \\ v_{bc}(t) \\ v_{ca}(t) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_b(t) \\ v_c(t) \\ v_a(t) \end{bmatrix} \right] \\ \vec{v}_{ll} &= \left(1 - e^{j\frac{4\pi}{3}}\right) \vec{v}_{fn} \end{aligned} \quad (13.28)$$

$$\vec{v}_{ll} = \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}} \vec{v}_{fn} \quad (13.29)$$

El resultado de la expresión (13.29), es análogo al obtenido en régimen sinusoidal permanente al pasar de tensiones de línea a tensiones de fase.

13.4.4.1. Inversor

Utilizando la expresión (13.28) se puede calcular el vector espacial de tensiones línea a línea del inversor en función de los interruptores de las fases como:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{ll} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[(Sw_a - Sw_b) + e^{j\frac{2\pi}{3}} (Sw_b - Sw_c) + e^{j\frac{4\pi}{3}} (Sw_c - Sw_a) \right] V_{DC} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 - e^{j\frac{4\pi}{3}}\right) \left[Sw_a + e^{j\frac{2\pi}{3}} Sw_b + e^{j\frac{4\pi}{3}} Sw_c \right] V_{DC} \end{aligned} \quad (13.30)$$

Utilizando el resultado de la expresión (13.29) y la ecuación (13.30), se puede obtener el vector espacial de tensión aplicado por el inversor en función del estado del interruptor de cada fase como:

$$\vec{v}_{fn} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[Sw_a + e^{j\frac{2\pi}{3}} Sw_b + e^{j\frac{4\pi}{3}} Sw_c \right] V_{DC} \quad (13.31)$$

En la tabla 22.2, se presentan los vectores espaciales obtenidos con el inversor trifásico para cada una de las posibles combinaciones de los interruptores de la figura 13.15.

Tabla 13.2: Vectores espaciales de tensiones del inversor trifásico

Sw_a	Sw_b	Sw_c	$\overrightarrow{v_{fn}}$
0	0	0	0
0	0	1	$-\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}e^{j\frac{\pi}{3}}$
0	1	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}e^{-j\frac{\pi}{3}}$
0	1	1	$-\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}$
1	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}$
1	0	1	$\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}e^{-j\frac{\pi}{3}}$
1	1	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}e^{j\frac{\pi}{3}}$
1	1	1	0

En la figura 13.16, se presenta el vector espacial de tensiones que aplica el inversor a la carga en por unidad de la tensión de Corriente continua V_{DC} .

Se puede calcular la tensión fase neutro aplicada por el inversor a la carga a partir del vector espacial como:

$$\Re(\overrightarrow{v_{fn}}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(v_a(t) - \frac{1}{2}(v_b(t) + v_c(t)) \right) \quad (13.32)$$

Como el sistema no posee neutro conectado, se tiene que:

$$v_a(t) + v_b(t) + v_c(t) = 0 \Rightarrow v_a(t) = -(v_b(t) + v_c(t)) \quad (13.33)$$

Sustituyendo el resultado de la expresión (13.33) en la ecuación (13.32), se obtiene:

$$v_a(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re(\overrightarrow{v_{fn}}) \quad (13.34)$$

Si rotamos el vector espacial de la expresión (13.27) en $e^{j\frac{4\pi}{3}}$, y aplicando un procedimiento análogo al utilizado para la expresión (13.34), se obtiene:

$$\overrightarrow{v_{fn}}e^{j\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} e^{j\frac{4\pi}{3}} & 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} \Rightarrow v_b(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re(\overrightarrow{v_{fn}}e^{j\frac{4\pi}{3}}) \quad (13.35)$$

De la ecuación (13.33), se obtiene el valor de $v_c(t)$ como:

$$v_c(t) = -(v_a(t) + v_b(t)) \quad (13.36)$$

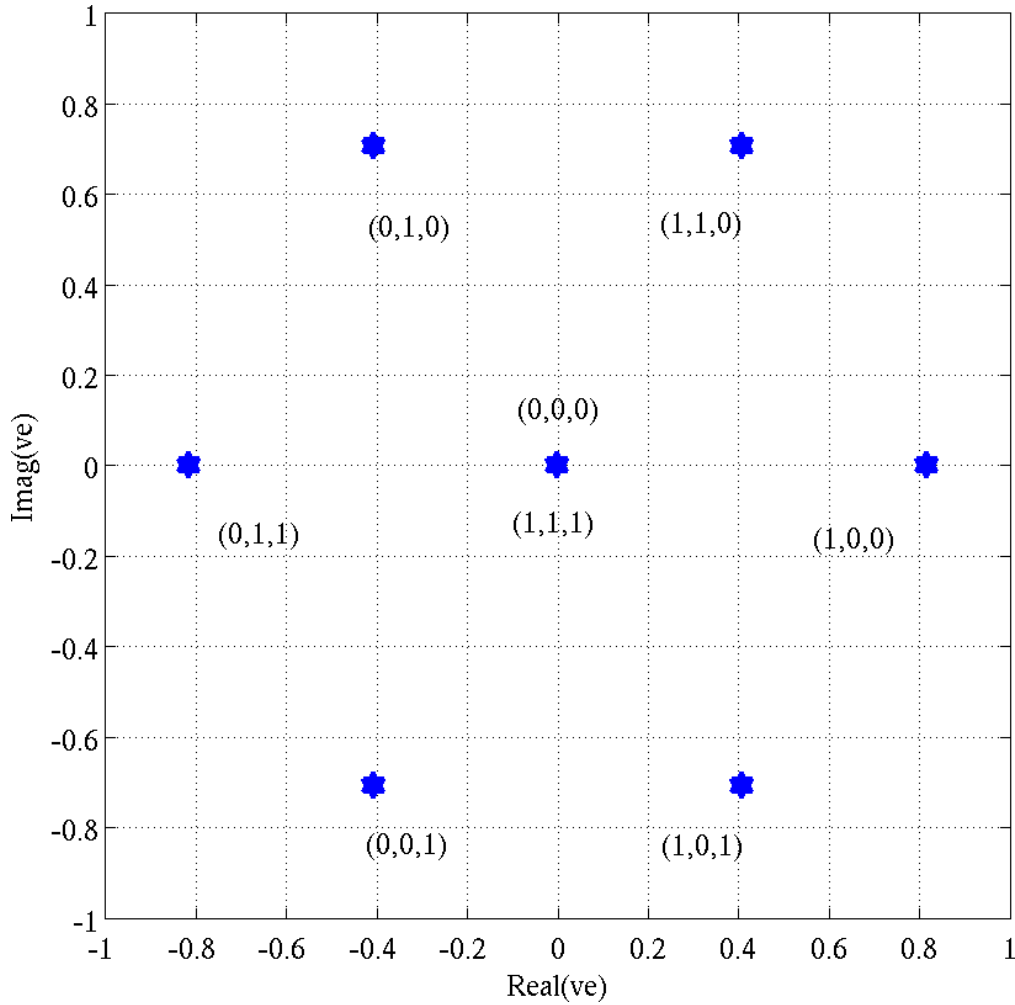


Figura 13.16: Tensión espacial del inversor trifásico.

En la figura 13.17, se presentan la tensión fase neutro generada por el inversor para la opción de conmutación mostradas en la figura 13.13.

Coefficientes de Fourier de la tensión fase neutro de la figura 13.17:

$$V_{n,l-n} = \left| \frac{2V_{DC}}{3n\pi} \left(2 + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right) \right| \quad (13.37)$$

$$n = 1, 5, 7, 11, 13, \dots$$

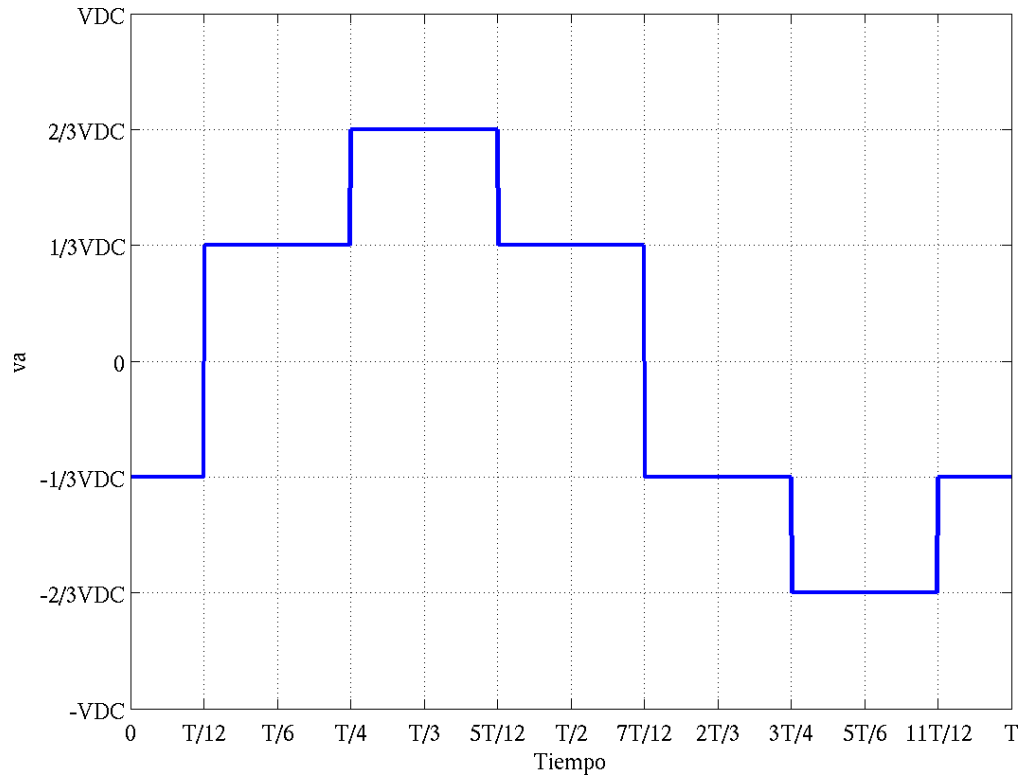


Figura 13.17: Tensiones fase neutro del inversor trifásico

13.4.4.2. Carga

En la figura 13.18, se presenta el modelo trifásico equilibrado de una carga activa y/o pasiva conectada en delta y estrella en bornes del inversor. El modelo en vectores espaciales del inversor y la carga se puede expresar como:

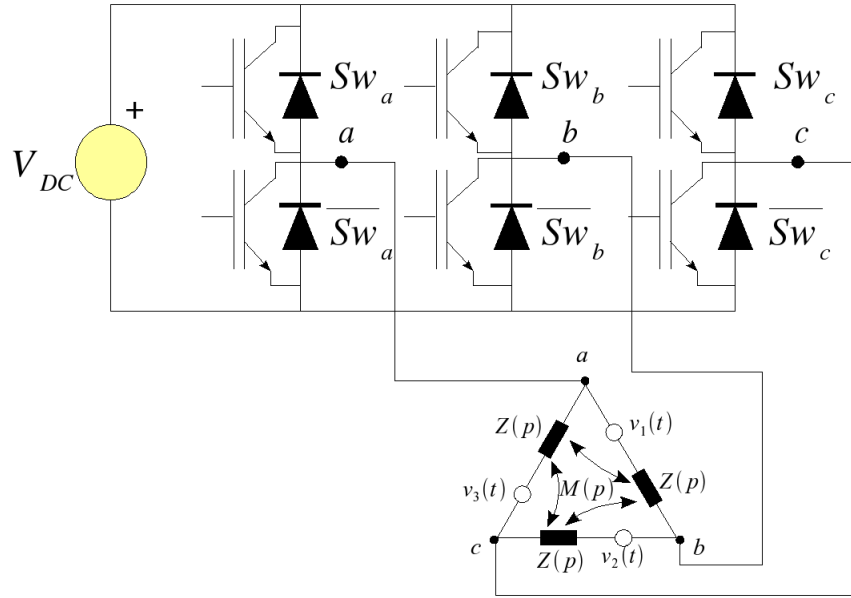
$$\vec{v}_{fn} = k\vec{e} + [Z(p) - M(p)]\vec{i} \quad (13.38)$$

donde:

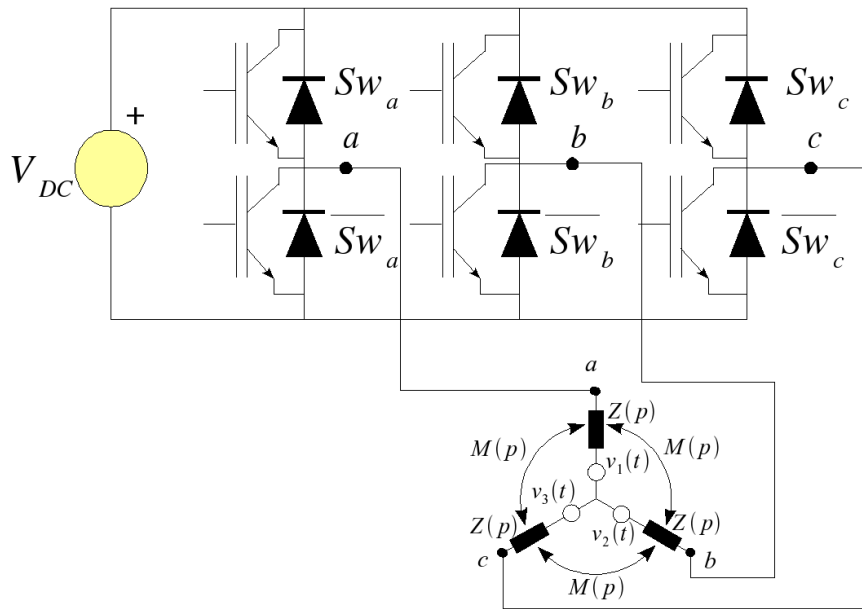
$$\vec{v}_{fn} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sw_a & Sw_b & Sw_c \end{bmatrix}^t$$

$$\vec{e} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) & v_2(t) & v_3(t) \end{bmatrix}^t$$

$$p = \frac{d}{dt}$$



(a) Delta



(b) Estrella

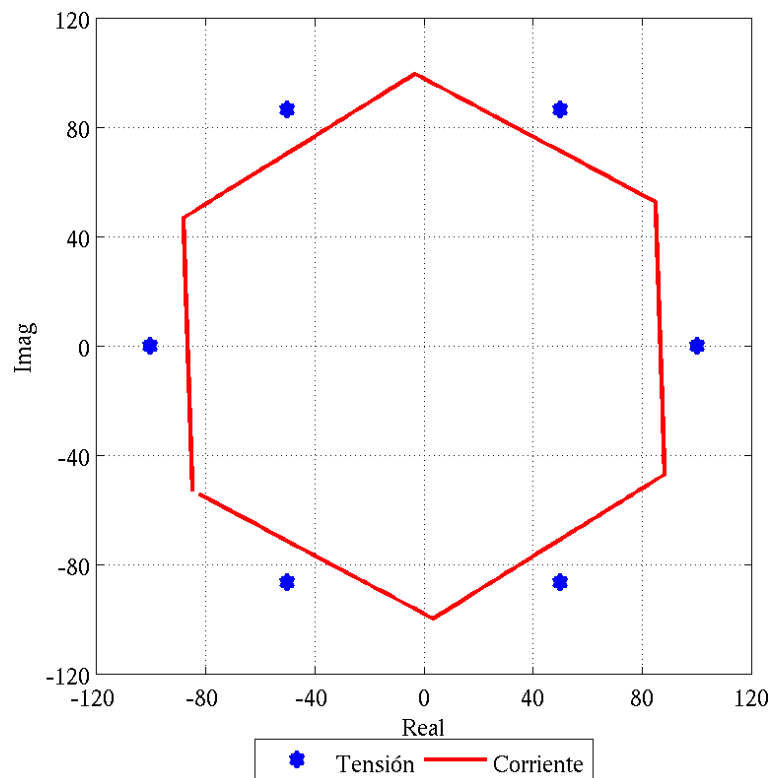
Figura 13.18: Inversor con carga activa y/o pasiva trifásica

En la tabla 13.3, se muestran los valores de la impedancia operacional $Z(p)$ y $M(p)$ de la expresión (13.38) para los elementos resistivos, inductivos y capacitivos.

Tabla 13.3: Impedancias operacionales en conexión estrella y delta

Elemento	k_Y	$Z_Y(p)$	$M_Y(p)$	k_Δ	$Z_\Delta(p)$	$M_\Delta(p)$
Resistencia	1	R	0	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}$	$\frac{R}{3}$	0
Inductancia	1	Lp	Mp	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}$	$\frac{L}{3}p$	$\frac{M}{3}p$
Capacitancia	1	$\frac{1}{Cp}$	0	$\frac{e^{-j\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3Cp}$	0

En la figura 13.19, se presenta el vector espacial de tensión y corriente en porcentaje de su valor pico, para una carga resistiva inductiva conecta en estrella de 60Ω y $223mH$, alimentada desde una fuente de corriente continua de $100V$, con la estrategia de disparo de la figura 13.13 a una frecuencia de $60Hz$. En la figura 13.32 se muestra la forma de onda de tensión y corriente en la fase "a", en porcentaje del valor pico correspondiente.

Figura 13.19: Vector espacial de tensión y corriente en la carga RL

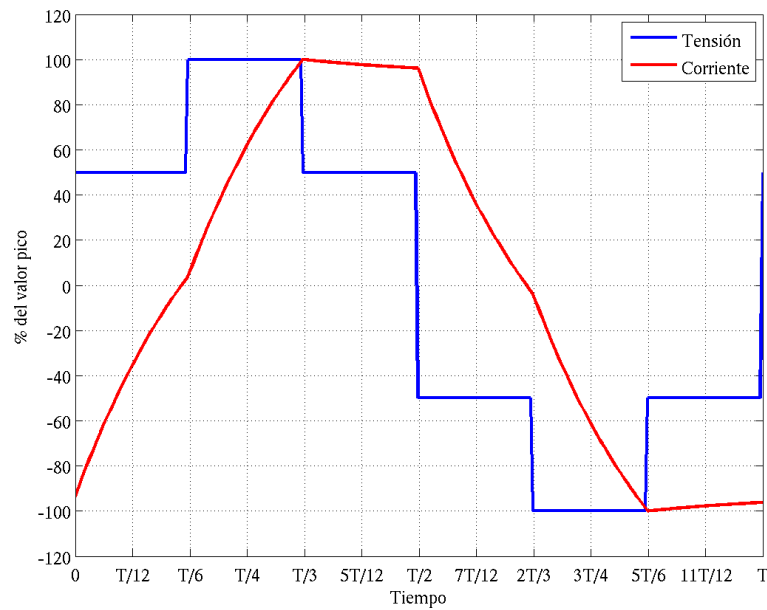


Figura 13.20: Tensión y corriente en la fase "a" de la carga *RL*

En la figura 13.21, se presenta el espectro armónico de la tensión y corriente de la fase "a" en porcentaje de la componente fundamental.

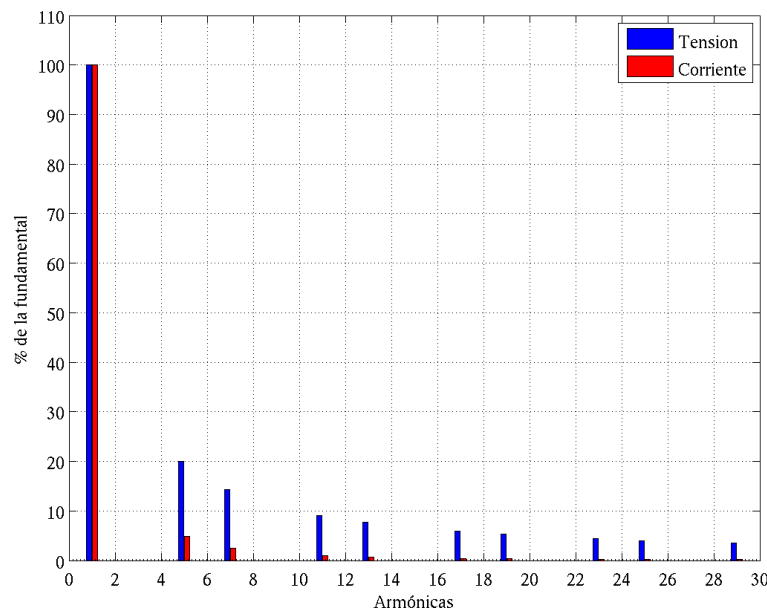


Figura 13.21: Espectro armónico de tensión y corriente en la fase "a" de la carga *RL*

13.5. Modulación por Ancho de Pulso (*PWM*)

La modulación por ancho de pulso (*PWM*, Pulse Width Modulation) proporciona un método para disminuir el factor de distorsión armónica (*THD*) en la corriente que suministra el inversor a la

carga. La salida de un inversor con *PWM* con algo de filtrado, cumple las regulaciones de distorsión armónica total más fácilmente que un inversor con salida mediante ondas cuadradas. Si bien la salida con *PWM* posee un contenido alto de armónicas, estas son de frecuencias elevadas lo cual facilita su filtrado y atenuación por parte de la carga.

La modulación *PWM* controla la amplitud de la tensión de salida utilizando diferentes formas de onda moduladoras o de referencia. Dos ventajas de esta modulación son la reducción de los requerimientos de filtrado y el control de la amplitud de la salida. Entre las desventajas podemos citar el incremento en las pérdidas del dispositivo interruptor por el mayor número de conmutaciones realizadas y una mayor complejidad de los circuitos de control.

La modulación *PWM* puede ser realizada de dos forma:

- Bipolar : Cuando el inversor utiliza dos estados $+V_{DC}$ y $-V_{DC}$.
- Unipolar: Cuando el inversor utiliza tres estados $+V_{DC}$, $-V_{DC}$ y 0.

En las figuras 13.22 y 13.23, se presentan los esquemas de modulación unipolar y bipolar para una onda sinusoidal de referencia y una triangular de portadora.

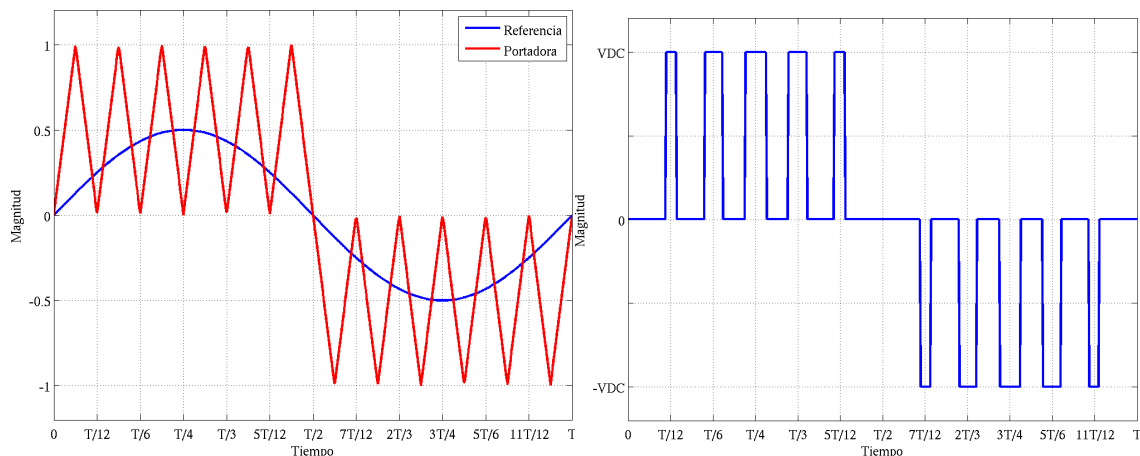
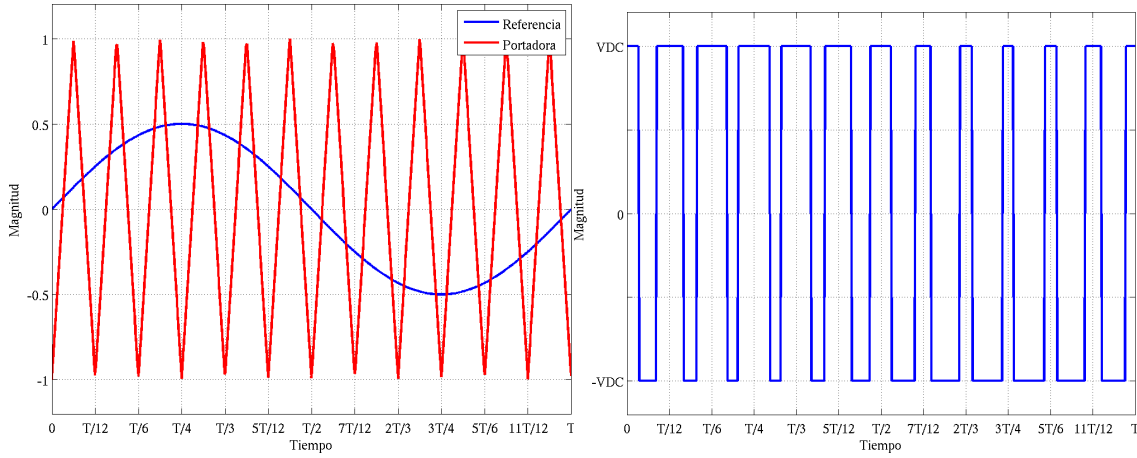


Figura 13.22: Modulación *PWM* Unipolar

Figura 13.23: Modulación *PWM* Bipolar

13.5.1. Índice de Modulación de Frecuencia

El índice de modulación de frecuencia m_f se define como el cociente entre la frecuencia de la portadora y de la referencia:

$$m_f = \frac{f_{portadora}}{f_{referencia}} \quad (13.39)$$

La señal de salida del *PWM* posee la misma frecuencia fundamental que la onda de referencia y armónicas en y alrededor de los múltiplos del índice de modulación. La escogencia de índices de modulación elevados facilita el filtrado de la onda de salida, pero incrementa las pérdidas en los dispositivos electrónicos de potencia utilizados en la conmutación.

13.5.2. Índice de Modulación de Amplitud

El índice de modulación de amplitud m_a se define como la relación entre la amplitud de la señal de referencia y la portadora:

$$m_a = \frac{V_{pico_{referencia}}}{V_{pico_{portadora}}} \quad (13.40)$$

Si $m_a \leq 1$, la amplitud de la componente fundamental de la salida del *PWM* es linealmente proporcional a m_a , es decir:

$$V_{rms1} = \sqrt{2} m_a V_{DC} \quad (13.41)$$

De esta forma se puede controlar la amplitud de la componente de frecuencia fundamental de la salida del *PWM* al variar m_a . Si m_a es mayor que uno, la amplitud de la fundamental de salida se incrementa pero de forma no lineal.

13.5.3. Contenido Armónico

En la figura 13.24, se presenta el contenido armónico de la salida del *PWM* unipolar y bipolar de las figuras 13.22 y 13.23, para este caso se utilizó un índice de modulación $m_f = 12$ y $m_a = 0,5$.

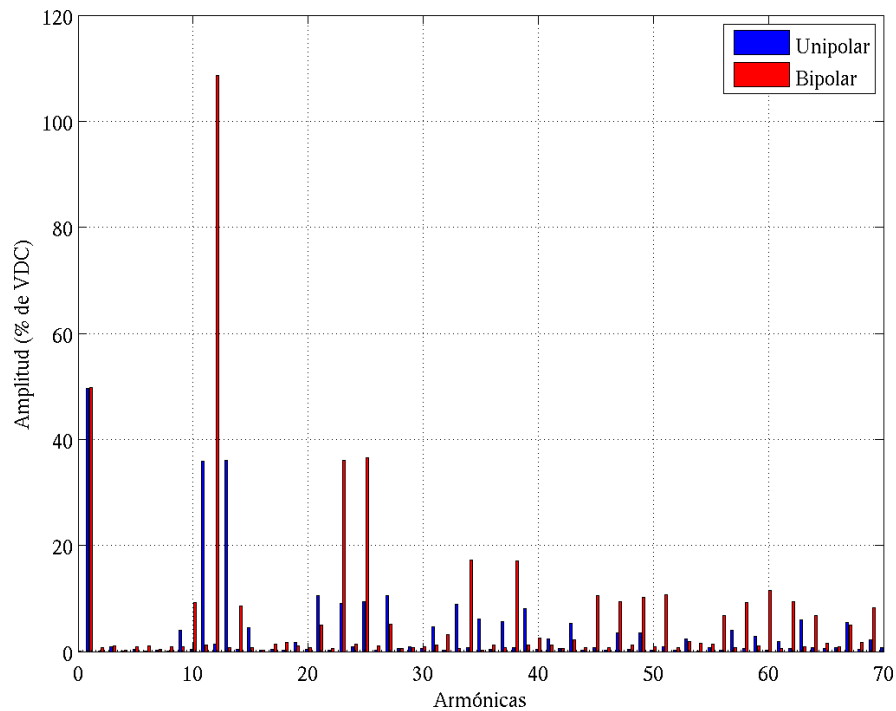


Figura 13.24: Contenido armónico de la modulación *PWM*

En la figura 13.24 se puede destacar que el valor de la fundamental tanto para la salida bipolar como para la unipolar, coincide con el índice de modulación de amplitud m_a . Los mayores contenidos armónicos se localizan en los alrededores del índice de modulación de frecuencia m_f . La salida bipolar presenta mayor contenido armónico que la señal unipolar.

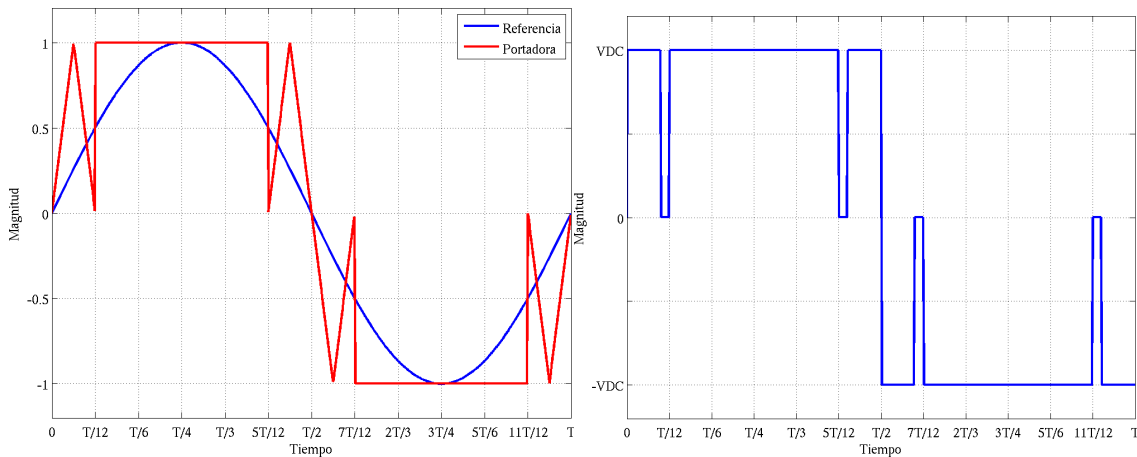
Si modificamos el índice de modulación de amplitud a uno ($m_a = 1$) obtendremos los resultados mostrados en la tabla 13.4 de valor efectivo en por unidad del valor de la tensión de corriente continua (v_{DC}) y distorsión armónica total para la modulación unipolar y bipolar:

Tabla 13.4: Característica de la modulación *PWM* para referencia sinusoidal con $m_a = 1$ y $m_f = 12$

	Valor efectivo total (V_{rms})	Valor efectivo 1 ^{ra} armónica (V_{rms1})	<i>THD</i>
Unipolar	0.7792	0.7077	0.4606
Bipolar	0.9690	0.7095	0.93

13.6. Modulación de Ancho de Pulso Modificada *SPWM*

En esta modulación se utiliza una sinusoidal como referencia pero la portadora se modifica a fin de disminuir el número de conmutaciones del puente inversor. La portadora que se utiliza varía como una diente de sierra en los extremos de cada semiciclo de la referencia, que corresponde a los sitios donde más varía la sinusoidal mientras que en la cresta se mantiene un pulso cuadrado. La modulación por diente de sierra se aplica en los siguientes rangos: $[0, \pi/3]$, $[2\pi/3, 4\pi/3]$ y $[5\pi/3, 2\pi]$. En el rango $[\pi/3, 2\pi/3]$ y $[4\pi/3, 5\pi/3]$ la portadora es un pulso cuadrado. En las figuras 13.25 y 13.26, se presentan los esquemas de esta modulación para $m_a = 1$ y $m_f = 12$ unipolar y bipolar.

Figura 13.25: Modulación *SPWM* Unipolar

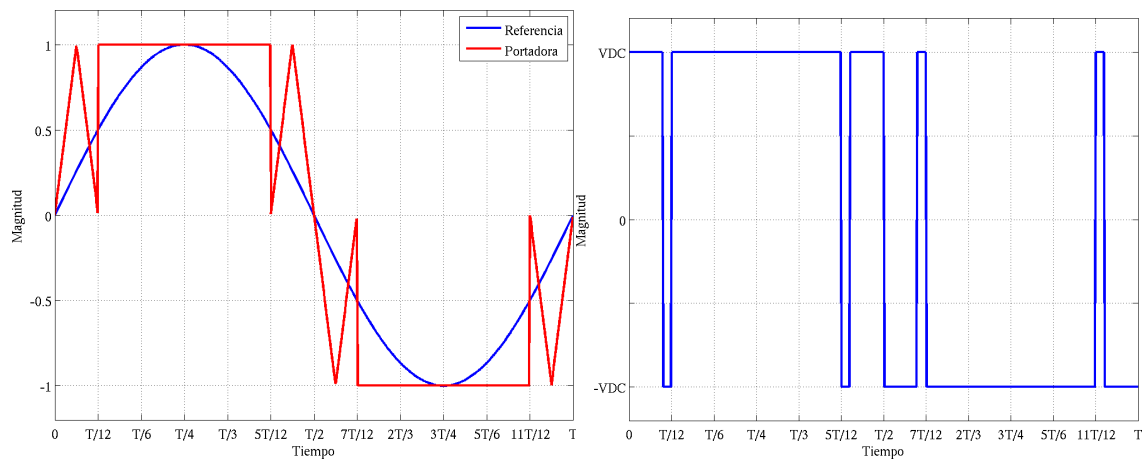


Figura 13.26: Modulación *SPWM* Bipolar

En la figura 13.27, se presenta el contenido armónico de la modulación por ancho de pulso modificada unipolar y bipolar.

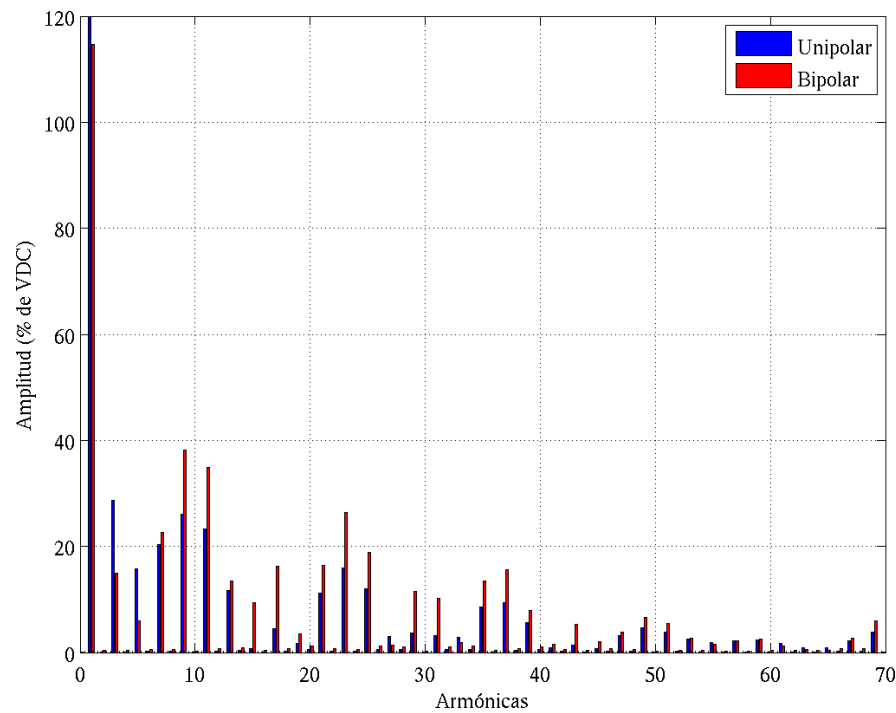


Figura 13.27: Contenido armónico de la modulación *SPWM*

En la tabla 13.5 se presenta el valor efectivo en por unidad del valor de la tensión de corriente continua (V_{DC}) y distorsión armónica total para la modulación *SPWM* unipolar y bipolar:

Tabla 13.5: Característica de la modulación *SPWM* para referencia sinusoidal con $m_a = 1$ y $m_f = 12$

	Valor efectivo total (V_{rms})	Valor efectivo 1 ^{ra} armónica (V_{rms_1})	<i>THD</i>
Unipolar	0.9585	0.8554	0.5057
Bipolar	0.9857	0.8104	0.6923

Esta modulación disminuye el número de conmutaciones del puente inversor disminuyendo sus pérdidas por este concepto, aumenta el valor efectivo total y de la 1^{ra} armónica de tensión comparado con la modulación *PWM* clásica y disminuye la distorsión armónica total generada por el puente convertidor.

13.7. Técnicas Avanzadas de Modulación.

En esta sección estudiaremos la modulación *PWM* bipolar y unipolar aplicadas a diferentes ondas de referencia, desde el punto de vista de distorsión armónica total generada, valor efectivo de la señal de salida y valor efectivo de la 1^{ra} armónica. Durante la comparación se utilizará una modulación de amplitud de uno ($m_a = 1$) y de frecuencia de doce ($m_f = 12$). Al finalizar la sección se presentara una tabla comparativa para cada modulación (unipolar y bipolar) a fin de ver cual es más efectiva desde los puntos de vista analizados.

13.7.1. Trapezoidal

En este caso la onda de referencia es una trapezoidal, esta onda se construye a partir de un triangular la cual se recorta a partir de una amplitud específica la cual puede ser ajustada. En la figuras 13.28 y 13.29, se presenta el esquema de esta modulación unipolar y bipolar, para esta referencia.

En la figura 13.30, se presenta el contenido armónico de la modulación por ancho de pulso modificada unipolar y bipolar. En la tabla 13.6 se presenta el valor efectivo en por unidad del valor de la tensión de corriente continua (V_{DC}) y distorsión armónica total para la modulación *PWM* unipolar y bipolar, con referencia trapezoidal:

Tabla 13.6: Característica de la modulación *PWM* para referencia trapezoidal

	Valor efectivo total (V_{rms})	Valor efectivo 1 ^{ra} armónica (V_{rms_1})	<i>THD</i>
Unipolar	0.8729	0.8395	0.2850
Bipolar	0.9854	0.8399	0.6137

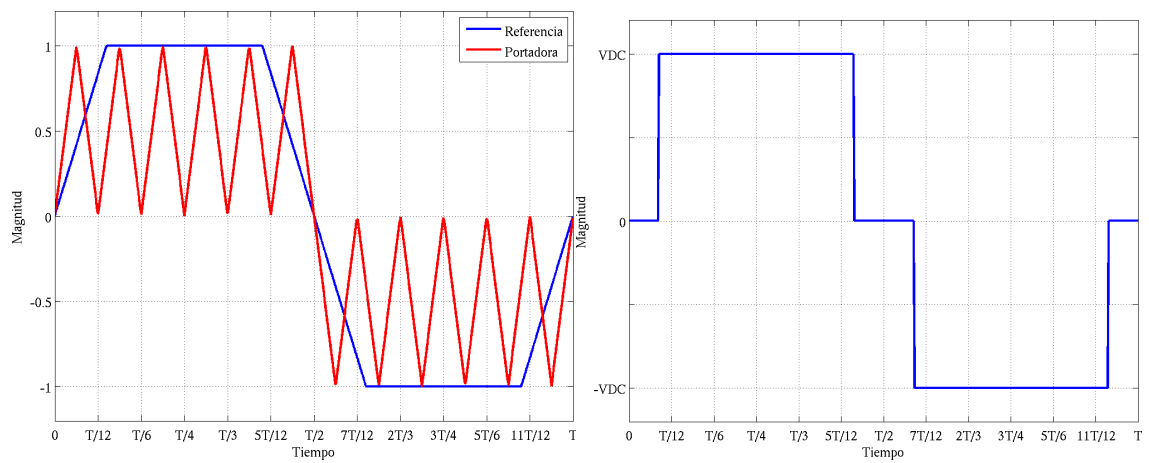


Figura 13.28: Modulación trapezoidal Unipolar

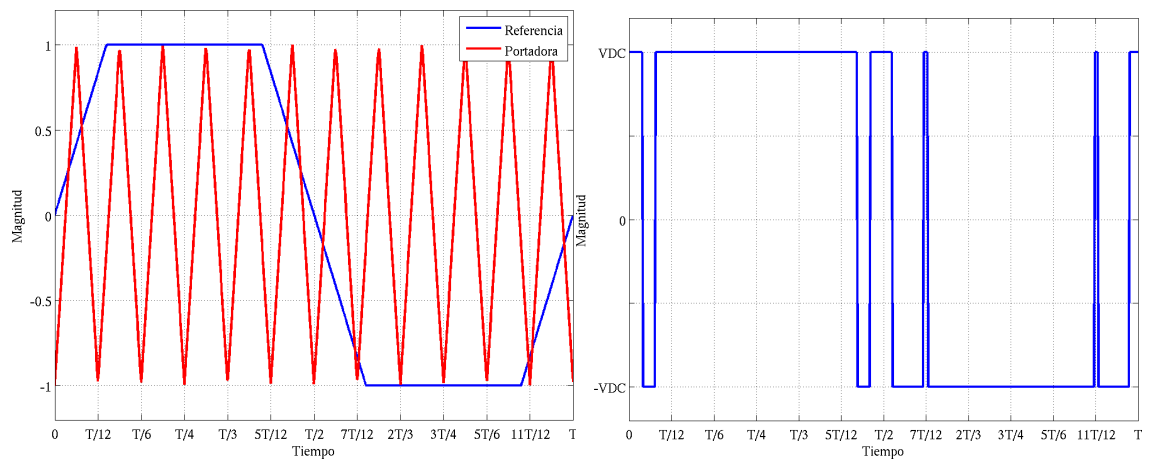


Figura 13.29: Modulación trapezoidal Bipolar

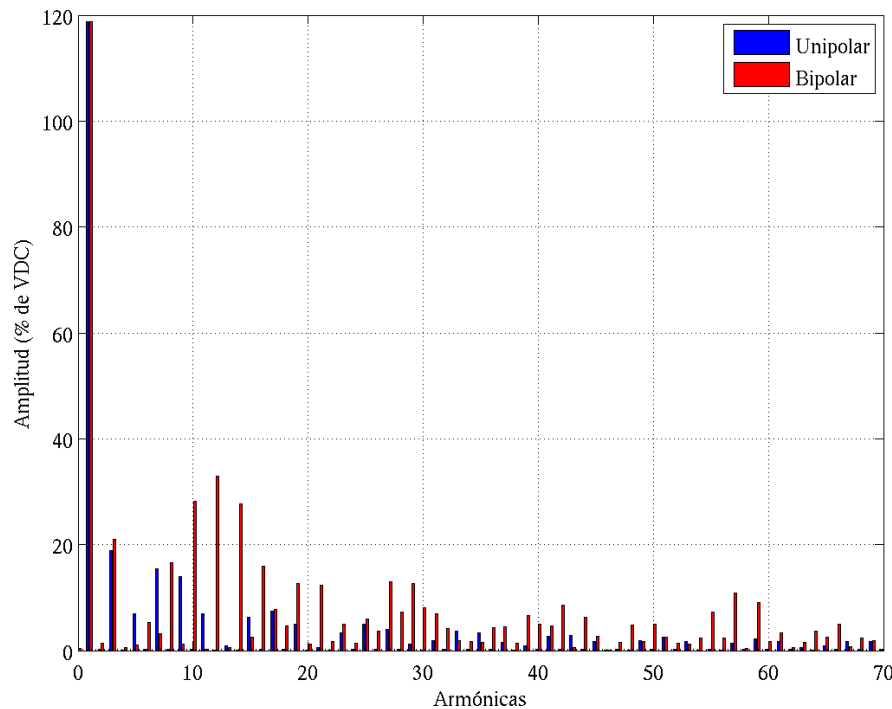


Figura 13.30: Contenido armónico para la modulación *PWM* con referencia trapezoidal

13.7.2. Por Inyección de Armónicas

En este caso la onda de referencia es una onda sinusoidal de frecuencia fundamental, con inyección de un contenido armónico específico de tercera y novena armónica. La expresión 13.42, muestra el contenido armónico más utilizado en esta modulación. En las figuras 13.31 y 13.32, se presenta el esquema de esta modulación unipolar y bipolar, para esta referencia.

$$v_{ref}(t) = 1,15 \sin(\omega t) + 0,27 \sin(3\omega t) - 0,029 \sin(9\omega t) \quad (13.42)$$

En la figura 13.33, se presenta el contenido armónico de la modulación por ancho de pulso modificada unipolar y bipolar. En la tabla 13.7 se presenta el valor efectivo en por unidad del valor de la tensión de corriente continua (V_{DC}) y distorsión armónica total para la modulación *PWM* unipolar y bipolar, con referencia por inyección de armónicas:

Tabla 13.7: Característica de la modulación *PWM* para referencia por inyección de armónicas

	Valor efectivo total (V_{rms})	Valor efectivo 1 ^{ra} armónica (V_{rms_1})	<i>THD</i>
Unipolar	0.8576	0.8127	0.3369
Bipolar	0.9754	0.8227	0.6369

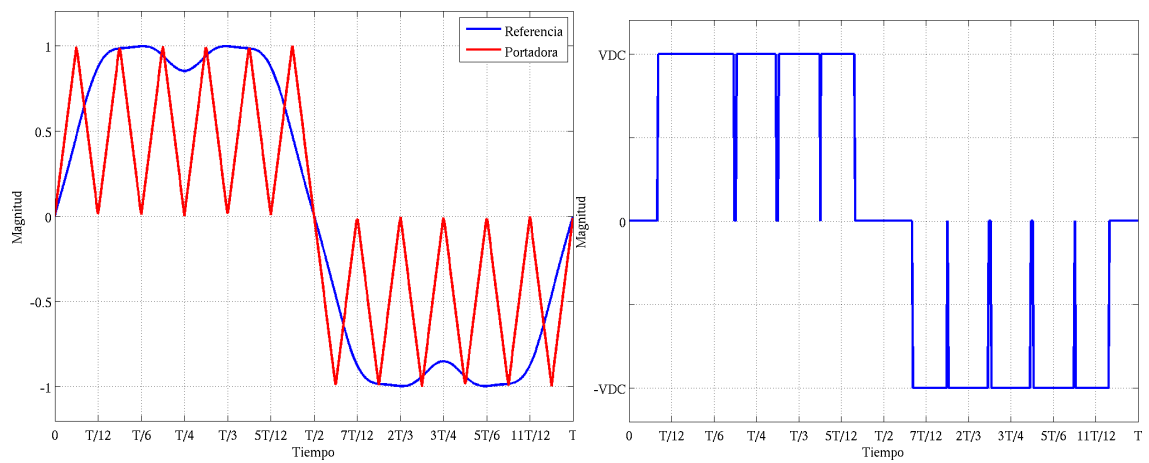


Figura 13.31: Modulación por inyección de armónicas Unipolar

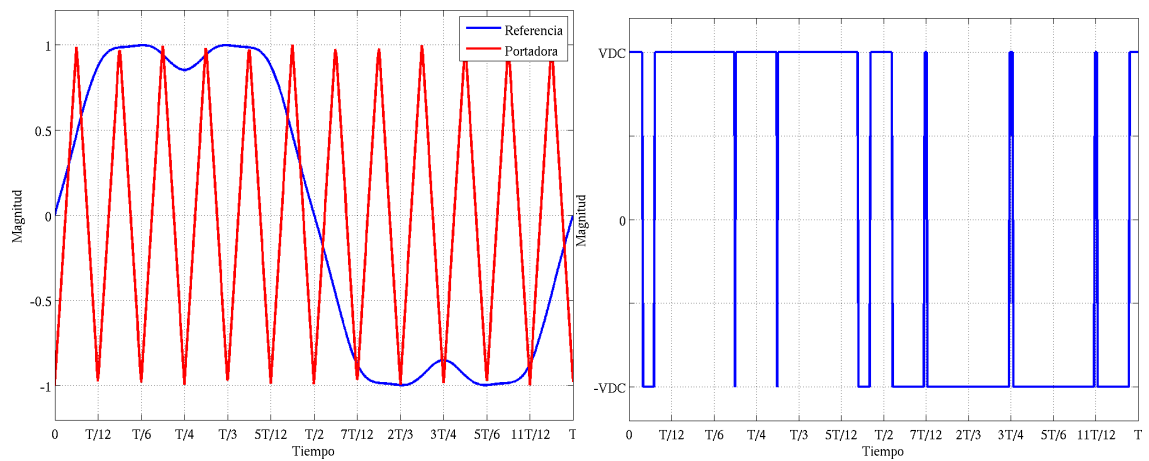


Figura 13.32: Modulación por inyección de armónicas Bipolar

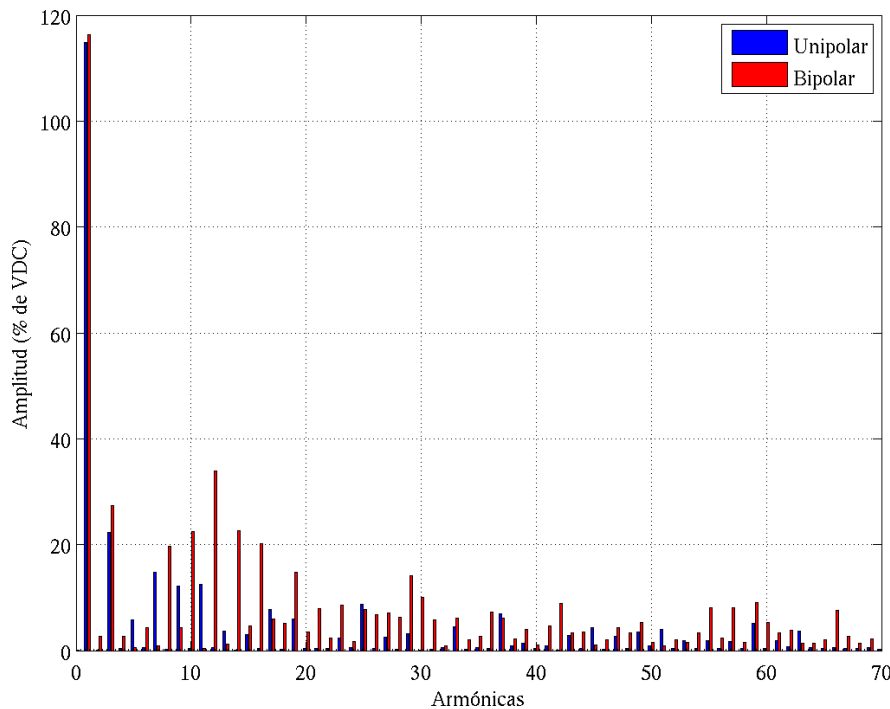


Figura 13.33: Contenido armónico para la modulación *PWM* con referencia armónica

13.7.3. Escalera

Esta modulación aproxima una referencia sinusoidal por niveles o peldaños, generalmente se utilizan de dos a cuatro peldaños en las aproximaciones. Los niveles de los escalones se calculan para eliminar armónicas específicas y para cada número de niveles se recomienda un índice de modulación de frecuencia específico m_f . Para obtener un valor elevado de la fundamental con baja distorsión armónica se recomienda los siguientes índices de modulación:

- Dos niveles: $m_f = 15$.
- Tres niveles: $m_f = 21$.
- Cuatro niveles: $m_f = 27$.

A continuación observaremos las formas de onda y contenido armónico para aproximaciones de dos, tres y cuatro niveles con los índices de modulación recomendados, para la modulación *PWM* bipolar y unipolar.

En la tabla 13.8 se presenta el valor efectivo en por unidad del valor de la tensión de corriente continua (V_{DC}) y distorsión armónica total para la modulación *PWM* unipolar y bipolar, con referencia escalonada para dos, tres y cuatro niveles:

Tabla 13.8: Característica de la modulación *PWM* para referencia escalonada

Índice de modulación en frecuencia (m_f)		Dos Niveles	Tres Niveles	Cuatro Niveles
		15	21	27
Valor efectivo total (V_{rms})		0.9068	0.9261	0.8461
Unipolar	Valor efectivo 1 ^{ra} armónica (V_{rms1})	0.8394	0.8614	0.7825
<i>THD</i>		0.4089	0.3947	0.4112
Valor efectivo total (V_{rms})		0.9846	0.9799	0.9531
Bipolar	Valor efectivo 1 ^{ra} armónica (V_{rms1})	0.8425	0.8680	0.7850
<i>THD</i>		0.6048	0.5239	0.6885

- Dos niveles: $m_f = 15$.

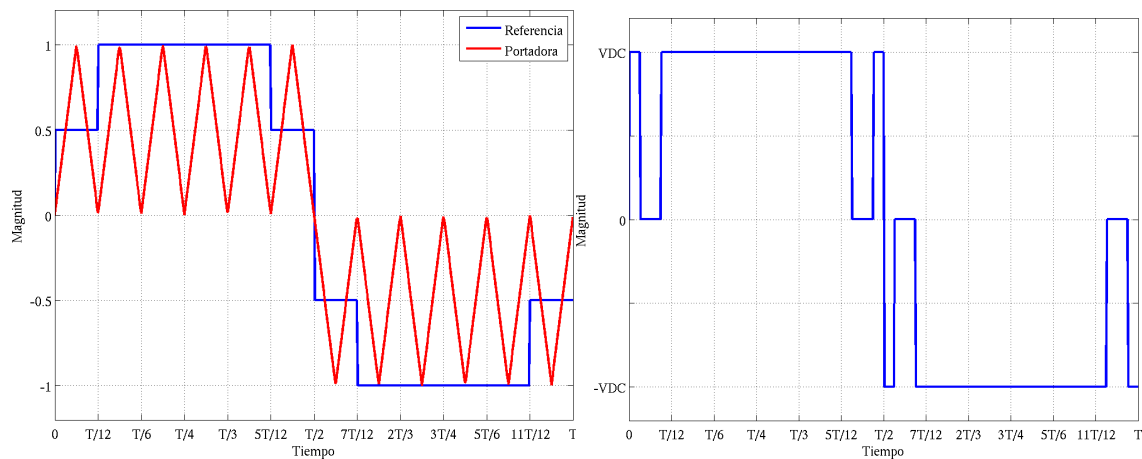


Figura 13.34: Modulación escalera 2 niveles Unipolar

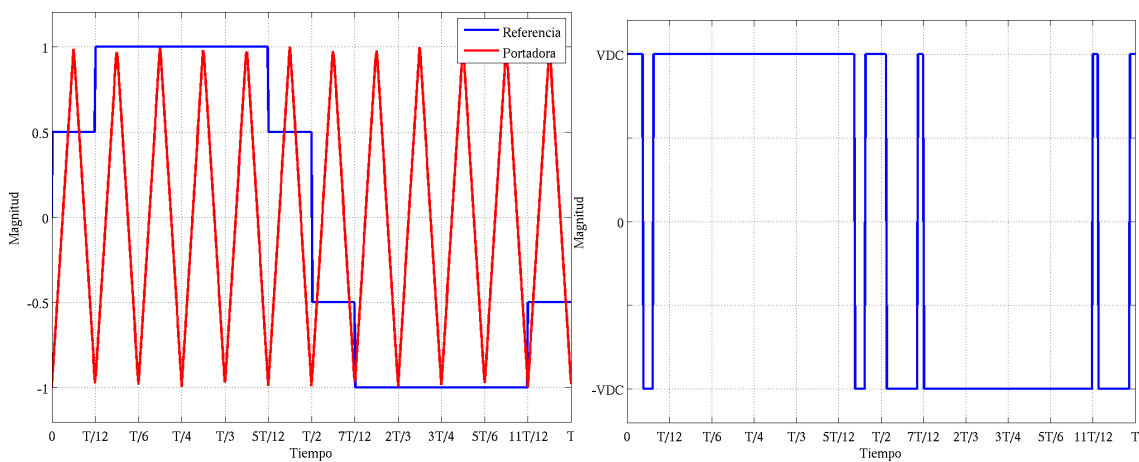


Figura 13.35: Modulación escalera 2 niveles Bipolar

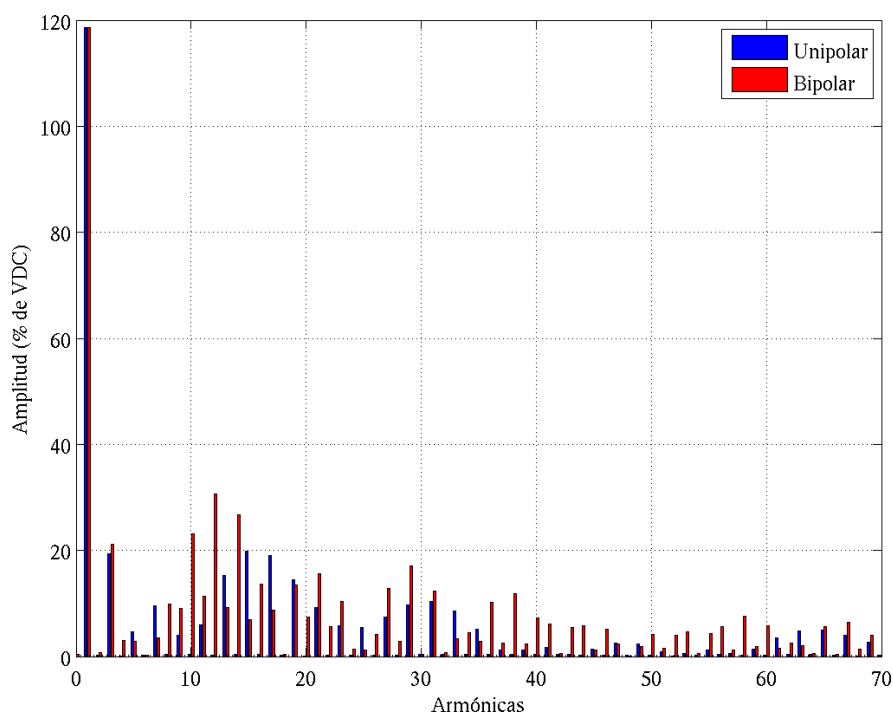


Figura 13.36: Contenido armónico para la modulación *PWM* con referencia escalera 2 niveles

- Tres niveles: $m_f = 21$.

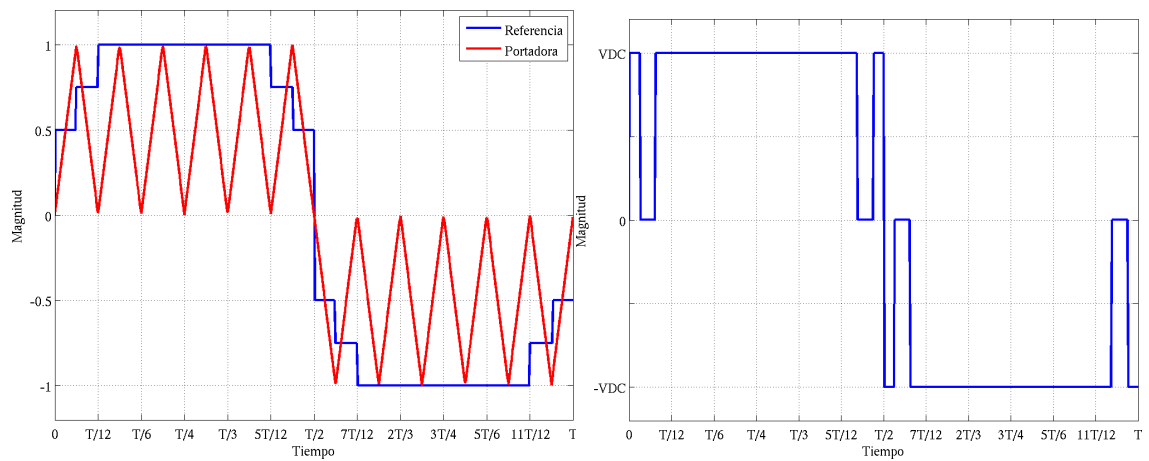


Figura 13.37: Modulación escalera 3 niveles Unipolar

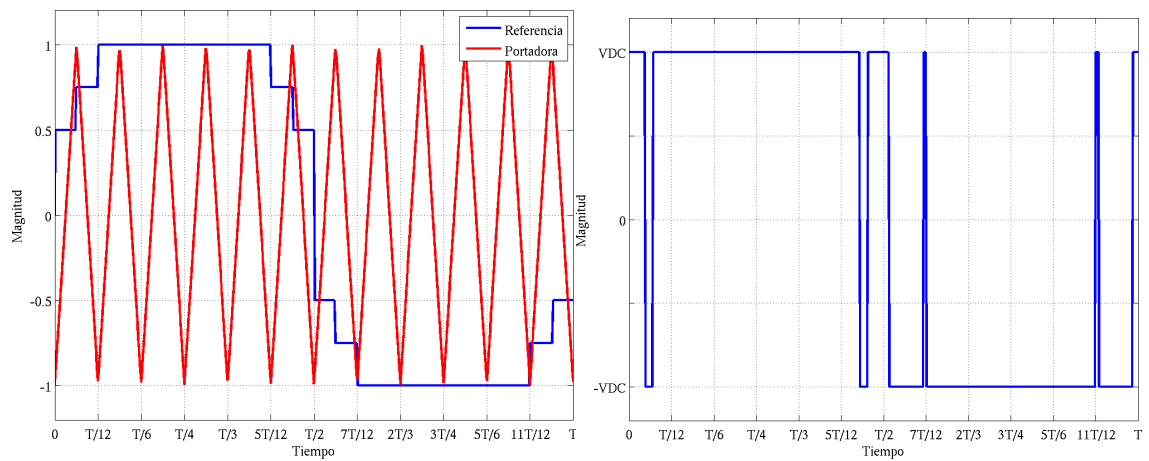


Figura 13.38: Modulación escalera 3 niveles Bipolar

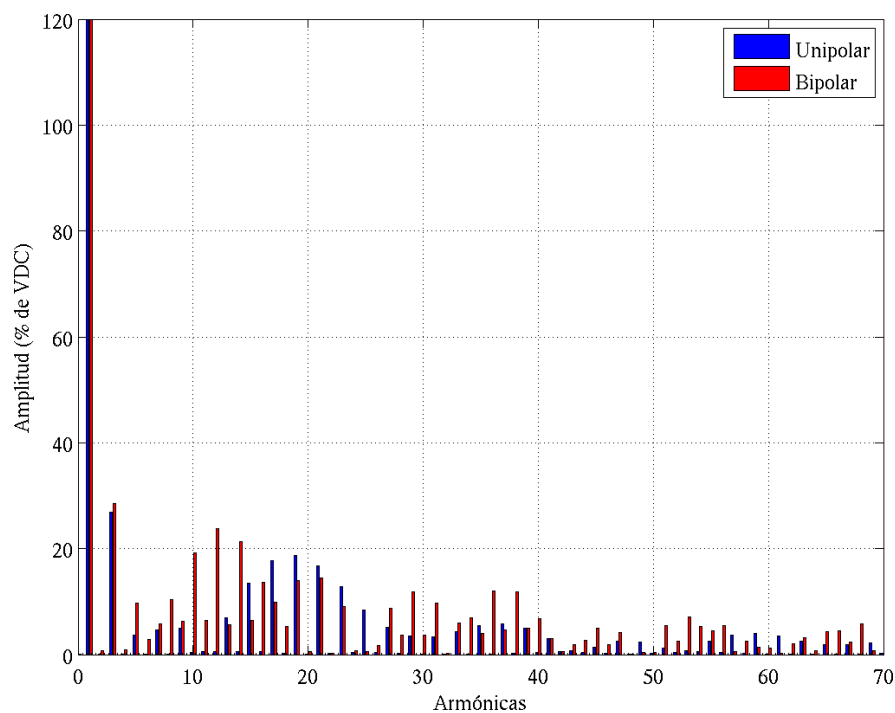


Figura 13.39: Contenido armónico para la modulación *PWM* con referencia escalera 3 niveles

- Cuatro niveles: $m_f = 27$.

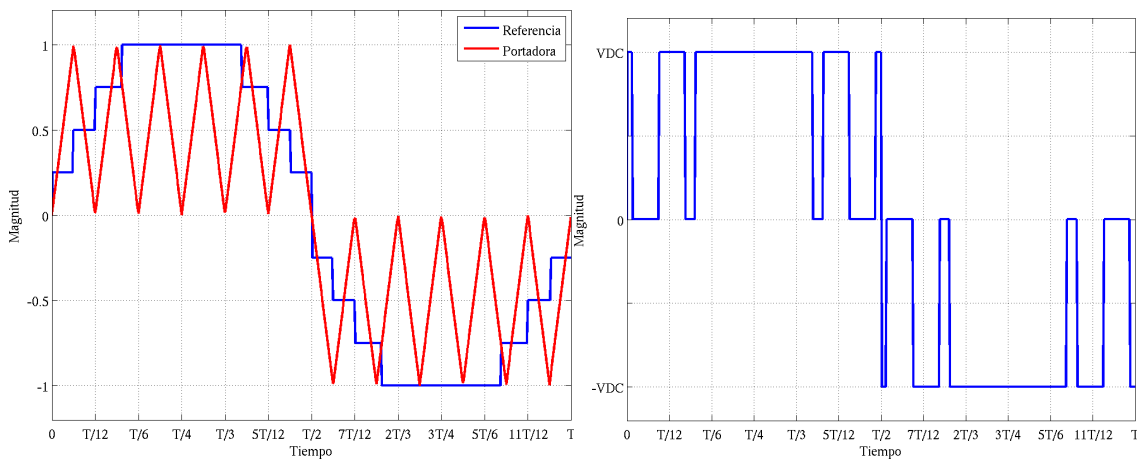


Figura 13.40: Modulación escalera 4 niveles Unipolar

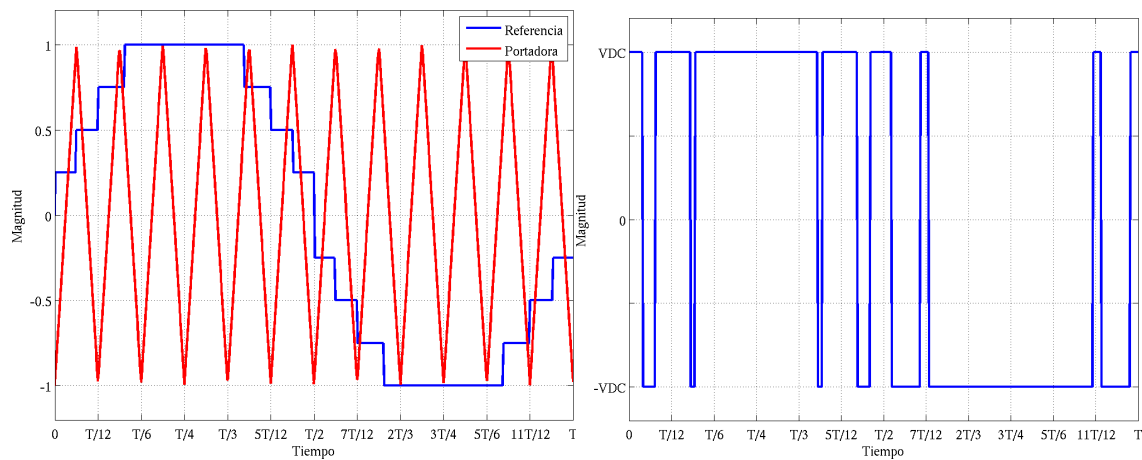
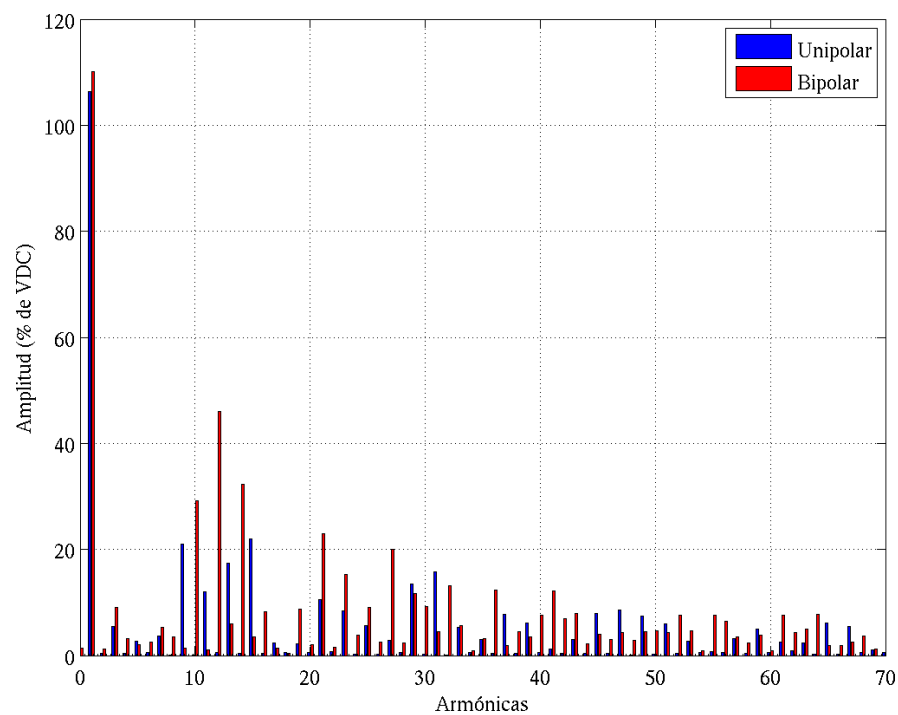


Figura 13.41: Modulación escalera 4 niveles Bipolar

Figura 13.42: Contenido armónico para la modulación *PWM* con referencia escalera 4 niveles

13.7.4. Por Pasos

La modulación por pasos consiste en aproximar una onda sinusoidal de referencia por niveles, esta discretización se realiza cada $\pi/9$. En las figuras 13.43 y 13.44, se presenta la forma de onda para

la modulación *PWM* unipolar y bipolar con un índice de modulación de amplitud de uno y de frecuencia de doce. En la figura 13.45, se presenta el contenido armónico de la modulación por ancho de pulso modificada unipolar y bipolar.

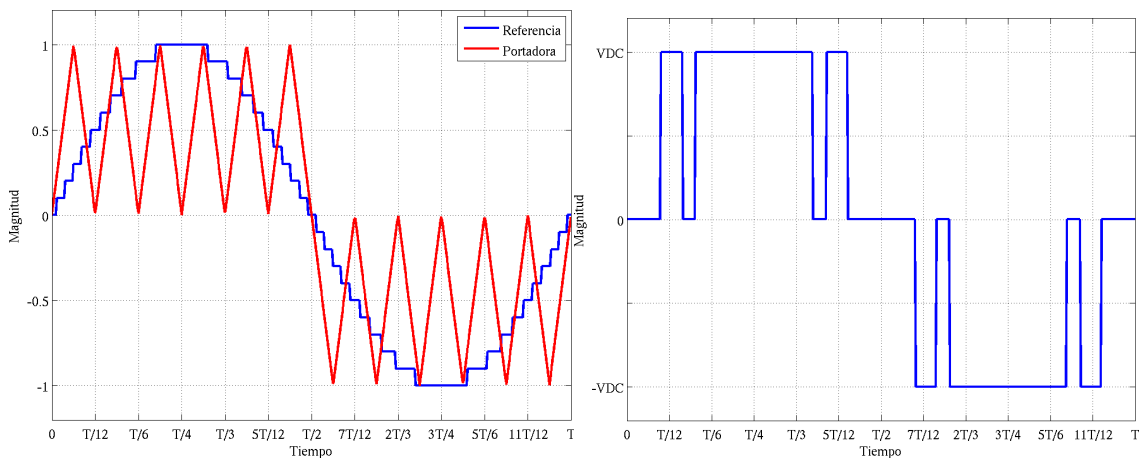


Figura 13.43: Modulación por pasos Unipolar

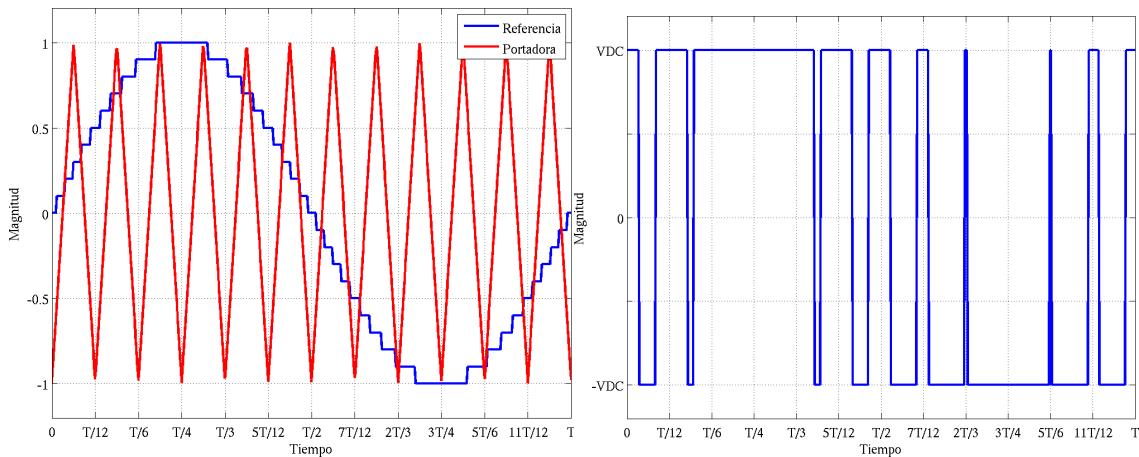


Figura 13.44: Modulación por pasos Bipolar

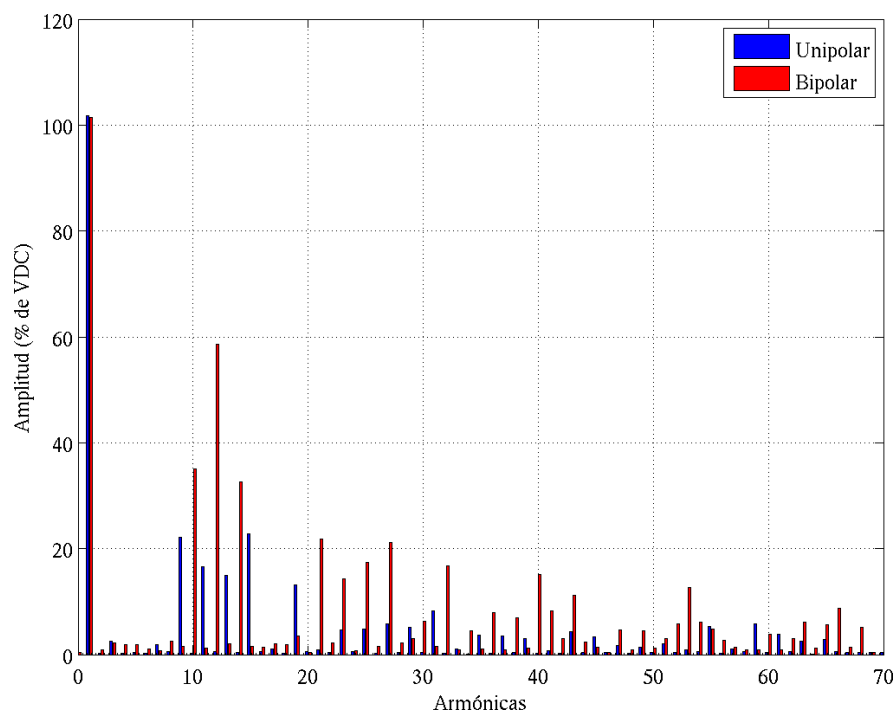


Figura 13.45: Contenido armónico para la modulación *PWM* con referencia por pasos

En la tabla 13.9 se presenta el valor efectivo en por unidad del valor de la tensión de corriente continua (V_{DC}) y distorsión armónica total para la modulación *PWM* unipolar y bipolar, con referencia por pasos:

Tabla 13.9: Característica de la modulación *PWM* para referencia por pasos

	Valor efectivo total (V_{rms})	Valor efectivo 1 ^{ra} armónica (V_{rms1})	<i>THD</i>
Unipolar	0.7875	0.7197	0.4443
Bipolar	0.9736	0.7177	0.9166

13.7.5. Resumen

En la tabla 13.10, se presenta un resumen de las modulaciones *PWM* unipolar y bipolar estudiadas para un índice de modulación de amplitud de uno ($m_a = 1$) y de frecuencia de doce ($m_f = 12$), con acepción de la modulación escalera que se realizo con los índices de modulación de frecuencia recomendados para los niveles estudiados.

Tabla 13.10: Modulaciones *PWM* para las diferentes referencias

Referencia de la Modulación	Unipolar			Bipolar		
	V_{rms}	V_{rms1}	THD	V_{rms}	V_{rms1}	THD
Sinusoidal	0.7792	0.7077	0.4606	0.9690	0.7095	0.9300
<i>SPWM</i>	0.9585	0.8554	0.5057	0.9857	0.8104	0.6923
Trapezoidal	0.8729	0.8395	0.2850	0.9854	0.8399	0.6137
Por Inyección de Armónicas	0.8576	0.8127	0.3369	0.9754	0.8227	0.6369
Escalera (2 niveles)	0.9068	0.8394	0.4089	0.9846	0.8425	0.6048
Escalera (3 niveles)	0.9261	0.8614	0.3947	0.9799	0.8680	0.5239
Escalera (4 niveles)	0.8461	0.7825	0.4112	0.9531	0.7850	0.6885
Por Pasos	0.7875	0.7197	0.4443	0.9736	0.7177	0.9166

Se puede observar en la tabla 13.10, como la modulación unipolar presenta menor distorsión armónica a la carga que la bipolar, pero esto requiere un puente inversor de tres estados. Ambas modulaciones obtienen valor efectivos de primera armónica similares. La escogencia de una referencia específica depende de los estados que maneje el puente convertidor y la máxima frecuencia de conmutación que soporten las componentes para los requerimientos de la carga.

13.8. Modulación Delta de Corriente

La modulación delta de corriente consiste en adecuar la estrategia de disparo de los componentes del inversor para seguir una referencia de corriente determinada, dentro de una banda de histéresis definida. La estrategia de disparo consiste en colocar tensión V_{DC} en la carga, si la referencia es mayor que la corriente medida en el circuito y $-V_{DC}$ si es menor. La frecuencia de operación del inversor depende del ancho de la ventana de histéresis a menor ancho mayor número de conmutaciones. En la figura 13.46, se presenta la corriente de referencia y mediada en la carga resistiva inductiva de un puente inversor monofásico. Para este ejemplo se utilizó una referencia de corriente sinusoidal de la forma: $i(t) = \sin(2\pi ft)$ con $R = 60\Omega$, $L = 223\text{ mH}$, $f = 60\text{ Hz}$ y $V_{DC} = 100\text{ V}$.

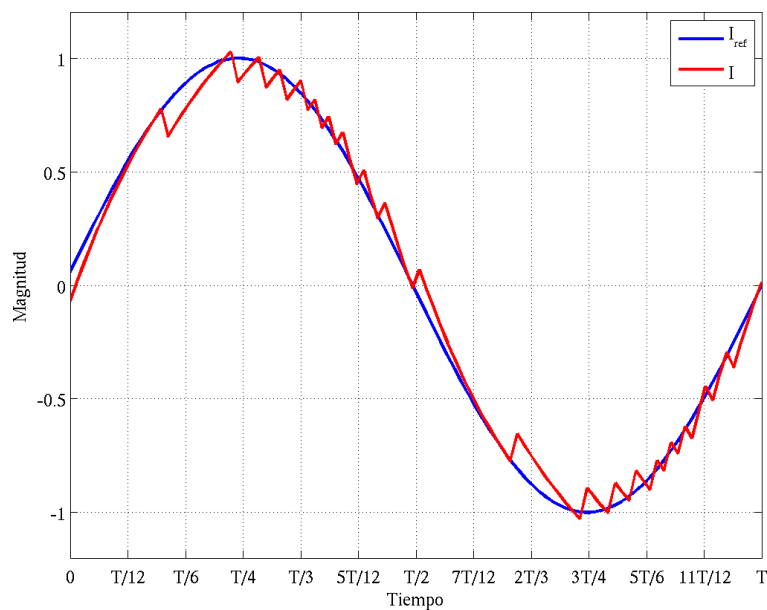


Figura 13.46: Corriente de referencia y real en un inversor monofásico accionado por modulación delta

En la figura 13.47, se presenta la tensión en bornes de la carga resistiva inductiva obtenida de la estrategia de conmutación por modulación delta de la figura 13.46.

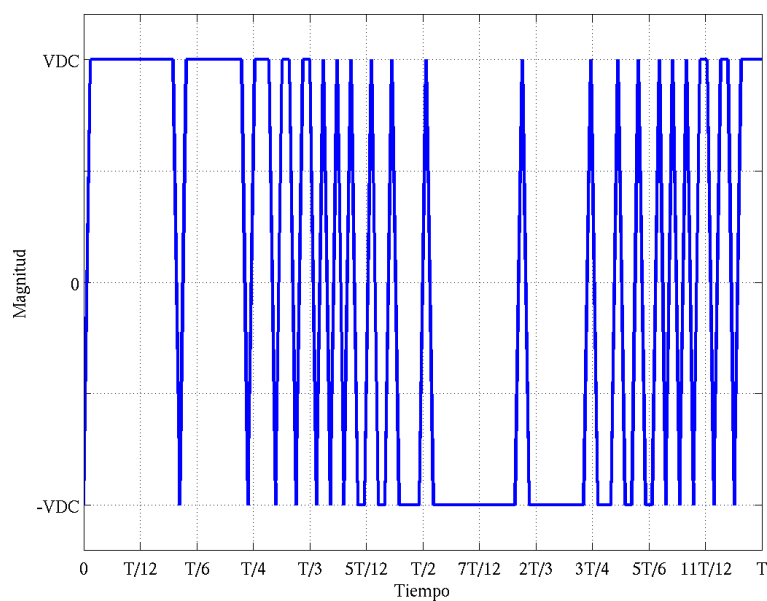


Figura 13.47: Tensión en la carga del inversor monofásico accionado por modulación delta

13.9. Instalación de Inversores

Al utilizar inversores la corriente alterna que circula por los conductores del equipo, su alimentación desde la red y la conexión al motor es reemplazada por un tren de pulsos de alta frecuencia que modifican los conceptos tradicionales aplicados a las instalaciones eléctricas industriales. La circulación de corrientes importantes de alta frecuencia produce caídas no lineales en conductores así como campos electromagnéticos y radiación que pueden perturbar el funcionamiento de equipos cercanos. Coexisten actualmente diversas legislaciones, en distintos países, para establecer límites a las perturbaciones introducidas por los equipos. Quizás la más exigente al respecto sea en la actualidad la norma europea que establece dos niveles de perturbación generada por un variador:

- El nivel industrial, que básicamente todo variador debe satisfacer sin la utilización de elementos exteriores, en la medida que el variador sea instalado de acuerdo a las recomendaciones del fabricante. Dichas recomendaciones dan métodos de cableado, protección, instalación y cableado.
- El nivel residencial, mas exigente que el anterior en el cual deben utilizarse generalmente filtros adicionales en la alimentación y salida del variador para limitar las perturbaciones introducidas. Aparte de utilizar los filtros el inversor debe ser instalado de acuerdo a las recomendaciones del fabricante.

El análisis de las perturbaciones generadas por el inversor nos lleva a dividir la instalación en 3 partes:

- **Cableado inversor-motor:** El cable variador motor es realmente una línea de transmisión donde circulan corrientes de alta frecuencia. Como toda línea de transmisión tiene una atenuación (producto de la derivación capacitiva de energía a masa) que reduce la energía transmitida y que alcanza finalmente el motor. En caso de instalaciones donde el motor se encuentre lejos del inversor (>100 metros) debe considerarse la utilización de conductores de baja capacidad o sobredimensionar el inversor para disponer de la energía necesaria para el motor. No debe descartarse la posibilidad de resonancias en una frecuencia dada de operación. Dicha línea además puede comportarse como antena radiante y perturbando por radiofrecuencia otros equipos o instalaciones. Se recomienda minimizar dichos efectos racionalizando el cableado, separando señal de potencia y equipos entre si utilizando conductores blindados con la conexión adecuada a masa, evitando la formación de lazos de masa que reducen el efecto del blindaje.
- **Instalación de inversor:** El inversor debido a las energías internas en juego puede considerarse como un emisor de radiofrecuencia. A fin de limitar este efecto el mismo debería estar

instalado en un gabinete metálico que actúe como jaula de faraday previendo la conveniente refrigeración térmica al equipo.

- **Suministro de energía:** Por el conductor de conexión del rectificador que alimenta el inversor, a la red de suministro circulan corrientes pulsantes que producen caídas no lineales en dicho cable. El fenómeno se denomina reinyección a la fuente, existiendo el riesgo de que si hubiera otros equipos conectados a la misma línea vean modificado o perturbado su funcionamiento. La minimización de la reinyección a la fuente implica la correcta selección de cableados en cuanto a componentes y distribución. Puede considerarse la utilización de filtros que limiten dicho efecto. Los fabricantes incluyen dichos filtros en los accesorios ofrecidos con el inversor.

13.10. Simulación

13.10.1. Inversor monofásico con carga resistiva inductiva.

- Programa Principal

```

1  % Programa Principal
2  global V f R L
3  % Inversor Monofásico
4  % Variables
5  V=input('Tensión DC ');
6  R=input('Carga Resistiva ');
7  L=input('Carga Inductiva ');
8  f=input('Frecuencia ');
9  % Cálculo de la corriente
10 y0=0; % Condición Inicial
11 [T,X]=ode1('corriente',0,20/f,y0,1/(100*f)); % Corriente en la Carga
12 Onda=(square(2*pi*f*T,50)); % Forma de Onda
13 Vcarga=V*Onda; % Tensión sobre la Carga
14 Vf=V*ones(length(T));
15 figure(3)
16 subplot(2,1,1); plot(T,X);
17 xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Corriente [A]'); grid;
18 subplot(2,1,2); plot(T,Vf,T,Vcarga,'r'); grid;
19 xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Tensión [V]'); legend('fuente','carga');
20 % Cálculo de Armónicos

```

```

21 Deltat=T(2)-T(1);
22 largo=length(T);
23 Np=100; carga=[X,Vcarga];
24 a=carga(largo-Np+1:largo,:);
25 a1=fft(a(:,1))*2/(Np); a1(1)=a1(1)/2;
26 a2=fft(a(:,2))*2/(Np); a2(1)=a2(1)/2;
27 figure(1)
28 subplot(2,1,1); bar((0:49),abs(a1(1:50))./abs(a1(2)),'r');
29 xlabel('Armónicas'); ylabel('p.u.fundamental')
30 legend('Contenido Armónico de Corriente');axis([-1 50 0 1.2]); grid;
31 subplot(2,1,2); bar((0:49),abs(a2(1:50))./abs(a2(2))); grid;
32 xlabel('Armónica'); ylabel('p.u. fundamental')
33 legend('Contenido Armónico de Tensión'); axis([-1 50 0 1.2]);
34 % Cálculo de Distorsión armónica
35 np=floor(Np/2);
36 Vrms=sqrt((sum((abs(a2(2:np))/sqrt(2)).^2))+abs(a2(1))^2)
37 THDv= sqrt(Vrms^2-(abs(a2(2))/sqrt(2))^2)/(abs(a2(2))/sqrt(2))
38 Irms=sqrt((sum((abs(a1(2:np))/sqrt(2)).^2))+abs(a1(1))^2)
39 THDi= sqrt(Irms^2-(abs(a1(2))/sqrt(2))^2)/(abs(a1(2))/sqrt(2))

```

■ Función corriente

```

1 % Función corriente.m
2 function px=corriente(t,x)
3 global V f R L
4 i=x;
5 Vcarga=V*(square(2*pi*f*t,50)); % Tensión sobre la Carga
6 px=(Vcarga-R*i)/L; % Derivada de la corriente en la Carga

```

13.10.2. Modelo en vectores espaciales del inversor trifásico con carga *RL*.

■ Programa Principal

```

1 % Progrma Principal
2 global V f R L w
3 % Inversor trifásico
4 % Variables

```

```

5 V=input('Tensión DC ');
6 R=input('Carga Resistiva ');
7 L=input('Carga Inductiva ');
8 f=input('Frecuencia '); T=1/f; w=2*pi*f;
9 % Cálculo de la corriente
10 y0=0; % Condición Inicial
11 [t,ies]=ode1('corriente3f',0,.2,y0,T/100); % Corriente en la Carga
12 % Tensiones
13 vab=((square(w*t,1/3*100)+1)*.5)-((square(w*t-pi,1/3*100)+1)*.5));
14 vbc=((square(w*t-2*pi/3,1/3*100)+1)*.5)-((square(w*t-pi-2*pi
    /3,1/3*100)+1)*.5));
15 vca=((square(w*t-4*pi/3,1/3*100)+1)*.5)-((square(w*t-pi-4*pi
    /3,1/3*100)+1)*.5));
16 ves=sqrt(2/3)*V*(vab+exp(j*2*pi/3)*vbc+exp(j*4*pi/3)*vca)*exp(-j*pi
    /6)/sqrt(3); % vector
    espacial
17 i=length(ies)-100:length(ies);
18 %Series de Fourier
19 Fv=fft(sqrt(2/3)*real(ves(i)))/(length(i)/2); Fv(1)=Fv(1)/2; Fv=Fv/Fv
    (2)*100;
20 Fi=fft(sqrt(2/3)*real(ies(i)))/(length(i)/2); Fi(1)=Fi(1)/2; Fi=Fi/Fi
    (2)*100;
21 figure(1)
22 magv=max(abs(ves(i)))/100; magi=max(abs(ies(i)))/100;
23 plot(real(ves(i))/magv,imag(ves(i))/magv,real(ies(i))/magi,imag(ies(i)
    )/magi,'r'); grid;
24 xlabel('Real'); ylabel('Imag'); legend('Tensión','Corriente'); axis('
    equal');
25 figure(2)
26 va=sqrt(2/3)*real(ves(i))/(sqrt(2/3)*max(real(ves(i))))*100;
27 ia=sqrt(2/3)*real(ies(i))/(sqrt(2/3)*max(real(ies(i))))*100;
28 plot(t(i),va,t(i),ia,'r'); grid;
29 xlabel('Tiempo (s)'); ylabel('% del valor pico'); legend('Tensión','
    Corriente');
30 figure(3)
31 clf
32 subplot(2,1,1); bar(0:30,abs(Fv(1:31))); grid; axis([0 30 0 100]);
33 xlabel('Armónicas'); ylabel('% de la Fundamental'); legend('Tensión')
    ;
34 subplot(2,1,2); bar(0:30,abs(Fi(1:31)),'r'); grid; axis([0 30 0 100])
    ;

```

```

35 xlabel('Armónicas'); ylabel('% de la Fundamental'); legend('Corriente
    ');

```

■ Función Corriente

```

1  % Función corriente3f.m
2  function px=corriente3f(t,x)
3  global V f R L w
4  i=x;
5  % Tensión sobre la Carga
6  vab1=((square(w*t,1/3*100)+1)*.5)-((square(w*t-pi,1/3*100)+1)*.5));
7  vbc1=((square(w*t-2*pi/3,1/3*100)+1)*.5)-((square(w*t-pi-2*pi
    /3,1/3*100)+1)*.5));
8  vca1=((square(w*t-4*pi/3,1/3*100)+1)*.5)-((square(w*t-pi-4*pi
    /3,1/3*100)+1)*.5));
9  % Vector Espacial
10 ves1=sqrt(2/3)*V*(vab1+exp(j*2*pi/3)*vbc1+exp(j*4*pi/3)*vca1)*exp(-j*
    pi/6)/sqrt(3);
11 px=(ves1-R*i)/L; % Derivada de la corriente en la Carga

```

13.10.3. Modulación delta

■ Programa principal

```

1  % Programa Principal
2  global V f R L SW k
3  % Inversor V=input('Tensión DC ');
4  R=input('Carga Resistiva ');
5  L=input('Carga Inductiva ');
6  f=input('Frecuencia ');
7  % Cálculo de la corriente
8  y0=0; % Condición Inicial
9  k=1;
10 t=0:1/(100*f):20/f;
11 SW=zeros(1,length(t));
12 [t,I]=ode1('corrientedelta',0,20/f,y0,1/(100*f)); % Corriente en la Carga
13 % Graficas

```

```

14 ref=sin(2*pi*f*t);
15 i=length(t)-99:length(t); % Último Ciclo
16 figure(1)
17 plot(t(i),ref(i),t(i),I(i),'r'); grid
18 axis([t(i(1)) t(i(length(i))) -1.2 1.2]);
19 xlabel('Tiempo (s)'); ylabel('Corriente (A) '); legend('I_r_e_f','I')
    ;
20 figure(2)
21 plot(t(i),SW(i));grid;
22 xlabel('Tiempo (s)'); ylabel('Tensión (V) ');
23 axis([t(i(1)) t(i(length(i))) -1.2 1.2]);

```

■ Función de corriente

```

1 % Función corrientedelta.m
2 function px=corrientedelta(t,x)
3 global V f R L SW k
4 i=x; ref=sin(2*pi*f*t); % Referencia de Corriente
5 k=k+1;
6 if abs(ref-i)>=0.05
7 SW(k)=sign(ref-i);
8 else
9 SW(k)=SW(k-1);
10 end
11 Vcarga=V*SW(k); % Tensión sobre la Carga
12 px=(Vcarga-R*i)/L; % Derivada de la corriente en la Carga

```

13.11. Ejercicios

1. El inversor de la figura 13.8a se alimenta de una fuente V_{DC} de 500V. El puente se controla mediante *SPWM* con una frecuencia fundamental de 60Hz y un índice de modulación de amplitud y frecuencia de 0,6 y 35 respectivamente. Determine:
 - a) Contenido armónico de la tensión sobre la carga hasta el armónico 20
 - b) Tensión efectiva y *THD* en la carga.
 - c) Corriente efectiva para una carga *RL* de 60Ω y 150mH.

d) Formas de onda de tensión y corriente.

2. Un inversor monofásico tipo puente “H” con control de ancho de pulso alimenta una carga $R = 10\ \Omega$ y $L = 35\text{ mH}$. Este inverso se alimenta de una fuente continua de 250 V y la frecuencia de salida del convertidor es 60 Hz . Determine el valor efectivo de la corriente fundamental cuando el pulso es igual a $T/2$. Si la frecuencia se reduce a 30 Hz determine el ancho del pulso para obtener el mismo valor de corriente en la carga a frecuencia fundamental.
3. Un inversor monofásico alimenta una carga RL serie con $R = 30\ \Omega$ y $L = 30\text{ mH}$. La frecuencia de salida es de 150 Hz . Especifique la tensión de fuente de continua tal que la corriente de carga para la frecuencia fundamental sea de $2,5$ amperes efectivos.
4. Un inversor monofásico de onda completa alimenta una carga RL serie de $30\ \Omega$ y 30 mH . La frecuencia de salida del inversor es de 120 Hz . Determine:
 - a) Especificar la fuente de alimentación DC para que la corriente efectiva de fundamental sea de 2 A .
 - b) Calcule la potencia consumida por la carga (Considere hasta la armónica 5).
 - c) Hasta que armónica usted consideraría para cometer un error en el cálculo de la corriente efectiva menor al 1% .
5. El puente de la figura 13.8b alimenta la carga de la figura 13.48. El convertidor tiene un esquema de modulación por PWM unipolar con $m_f = 15$ y $m_a = 0,8$. Los parámetros del filtro y la carga son $L_{\text{filtro}} = 15\text{ mH}$, $C_{\text{filtro}} = 47\ \mu\text{F}$ y $R = 50\ \Omega$. Determine:

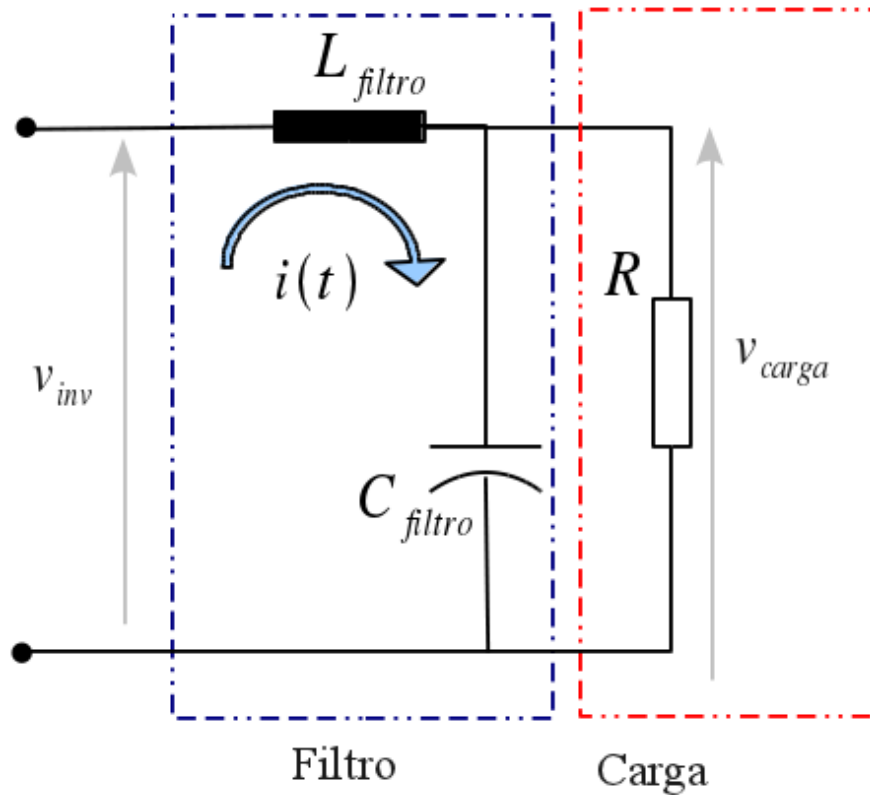


Figura 13.48: Problema 5

- a) Tensión V_{DC} para obtener una tensión efectiva en la carga resistiva de 115V efectivos a 200Hz.
 - b) Dibuje las formas de onda de tensión y corriente sobre la carga a la salida del convertidor (v_{inv}) y sobre la carga (v_r).
 - c) Potencia disipada por la carga.
 - d) Repita el problema utilizando *PWM* bipolar.
6. Un inversor trifásico de un pulso por semiciclo, posee una barra de continua regulable. La carga esta conformada por una estrella equilibrada con $R = 5\Omega$ y $L = 70mH$. La frecuencia de salida varia entre 30 y 60Hz. Determine el rango de tensión DC necesario para mantener la componente de frecuencia fundamental de la corriente en la línea en 10A
 7. Un inversor trifásico de un pulso por semiciclo esta alimentado de una fuente DC de 400V y puede variar la frecuencia de salida entre 25 y 100Hz. El inversor alimenta un carga *RL* serie conectada en estrella de 20Ω y $30mH$ por fase. Determine.
 - a) Para el rango de frecuencia del inversor como varia la corriente efectiva de fundamental de la corriente.

- b) Que efecto tiene sobre el THD de corriente y tensión línea neutro la variación de frecuencia.
 - c) Explique como resolvería el problema si la carga estuviese conectada en delta y no en estrella.
8. Un inversor trifásico alimenta una carga en estrella de 45Ω y $300mH$ por rama. El puente se alimenta desde una barra de corriente continua de $400V$. El esquema de control del inversor es por PWM unipolar con una frecuencia de conmutación de $5kHz$ y un índice de modulación de amplitud unitario. La frecuencia de fundamental suministrada a la carga es de $60Hz$. Determine:
- a) Contenido armónico de la tensión y corriente en la carga.
 - b) Potencia activa y reactiva instantánea y promedio en la carga.
 - c) Corriente y tensión efectiva en la carga.
9. Compare las técnicas de Modulación y Control de inversores a nivel de ventajas y desventajas. Explique su respuesta.

Parte VII

Especificaciones y Protección de Dispositivos Electrónicos de Potencia

Especificaciones de Componentes de Potencia

14.1. Aspectos Generales

Para especificar una componente de potencia se debe en cuenta los siguientes aspectos: tensión que soporta apagada, corriente media y efectiva que proporciona al circuito en conducción, capacidad de di/dt , capacidad de dv/dt , requisitos de activación y desactivación, frecuencia de operación y potencia que disipa en sus diferentes estados de operación.

La potencia que disipa un componente semiconductor, se puede clasificar de acuerdo a su estado de operación en:

- Bloqueo: Cuando la componente se encuentra apagada.
- Conducción: Cuando la componente esta encendida.
- Conmutación: Son las producidas por el cambio de estado entre conducción y bloqueo y viceversa.
- Circuitos Auxiliares: Son las producidas por los circuitos asociados de encendido o apagado de la componente, generalmente se consideran por separado y no afectan en la determinación del semiconductor.

14.2. Tensión

Se debe tener en cuenta al momento de especificar una componente la tensión pico que soporta la componente de forma directa (en conducción) e inversa (apagado).

14.3. Corriente

Se debe considerar en la especificación la corriente promedio y efectiva de la componente en conducción, su corriente de fuga en apagado y de pico repetitivo y no repetitivo.

14.4. Frecuencia de Interrupción

Al momento de especificar la frecuencia de operación de la componente se deben considerar los tiempos requeridos para el encendido y pagado de la componente con seguridad, así como los tiempos muertos que por seguridad hay que tomar al momento de conmutar elementos de la misma rama a fin de poder garantizar que no se produzcan cortocircuitos en las ramas.

14.5. Capacidad de Variación de Corriente (di/dt)

El dispositivo requiere un tiempo para que toda la superficie conductora permita el flujo de corriente. Si la corriente aumenta con rapidez, el flujo se concentraría en una determinada parte del semiconductor superando su densidad de corriente y deteriorándolo permanentemente. Para limitar el di/dt se utilizan inductores en serie con los dispositivos de potencia, esta inductancia generalmente se denomina *inductor de amortiguamiento*.

14.6. Capacidad de Variación de Tensión (dv/dt)

Debido a las capacitancias interna de los semiconductores de potencia es necesario limitar la tasa de crecimiento de la tensión durante las operaciones de conmutación del dispositivo. Generalmente para limitar el dv/dt se utilizan circuitos auxiliares de conmutación denominados *Snubber*. El Snubber más común consiste en un arreglo *RC* en paralelo con la componente.

14.7. Requisitos de Activación y Apagado de Compuerta

Otro aspecto al considerar al momento de especificar una componente son los requerimientos de encendido y apagado de la misma, desde el punto de vista de niveles de tensión, corriente, pérdidas, circuitos adicionales y costo que estos para el circuitos de potencia.

14.8. Protección con Fusible I^2t

Cuando el equipo de potencia requiere protección contra cortocircuitos en la línea de alimentación y esta se realiza con fusibles es necesario una operación coordinada entre este y la componente. El I^2t del dispositivo semiconductor debe ser mayor que el del fusible a fin de garantizar una operación selectiva de este, a fin de que el equipo se encuentre protegido ante fallas.

14.9. Temperatura

Durante la operación de los dispositivos de potencia es necesario que estos no superen las máximas temperaturas de operación del semiconductor, ya que pueden variar sus propiedades dieléctricas. Los factores que influyen en el aumento de la temperatura de los dispositivos son: las pérdidas en las diferentes zonas de operación y el intercambio de calor con el medio ambiente (modelo térmico).

14.10. Pérdidas en Diodos y Tiristores

Para especificar un diodo o un tiristor por sus pérdidas se deben tomar en cuenta las potencias promedio disipadas en cada estado de operación y compararlas con las indicadas por el fabricante. Un aspecto a considerar al hacer la comparación, es el tipo de prueba realizada por el fabricante para determinar las pérdidas totales de la componente como son: el tipo de onda de corriente y tensión utilizadas para cargar el dispositivo. En los diodos y tiristores las pérdidas por bloqueo son muy bajas debido a que las corrientes de fuga de estas componentes están en el orden de los micro amperes, mientras las de conmutación por su baja frecuencia de conmutación (frecuencia industrial) son poco significativas al compararlas con las de conducción. Por esta razón se enfoca el estudio de las pérdidas a únicamente las de conducción, dejando un margen de sobre diseño por no considerar las contribuciones de bloqueo y conmutación.

14.10.1. Pérdidas de Conducción

Para calcular las pérdidas promedio de conducción es necesario parametrizar la característica de corriente del diodo y de conducción del tiristor mostrada en la figura 14.1.

La parametrización más sencilla para la característica mostrada en la figura 14.1, es una recta de la forma:

$$v(t) = V_{TO} + R_D i(t) \quad (14.1)$$

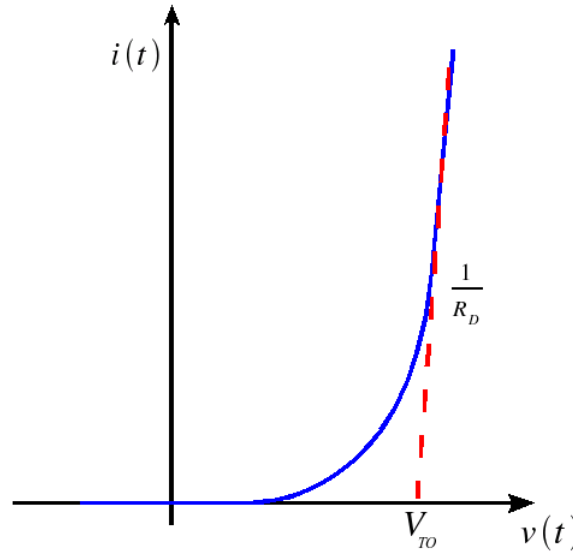


Figura 14.1: Característica de conducción del diodo y tiristor

Donde V_{TO} es la tensión de ruptura del dispositivo que está alrededor de uno a dos voltios y R_D es la resistencia dinámica de la componente y coincide con el inverso de la pendiente de la característica. Los valores de V_{TO} y R_D son dados por el fabricante como especificación de la componente en su hoja de datos.

A partir de la expresión (14.1), se puede calcular la potencia promedio de conducción como:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt \\
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T [V_{TO} + R_D i(t)] i(t) dt \\
 P &= V_{TO} \left[\frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \right] + R_D \left[\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt \right] \\
 P &= V_{TO} I_{0_{comp.}} + R_D I_{rms_{comp.}}^2
 \end{aligned} \tag{14.2}$$

Las corrientes media y efectiva de la ecuación (14.2), corresponden a las que circulan por la componente durante su operación.

14.10.2. Modelo Térmico.

El modelo térmico es una representación eléctrica, a través de un circuito RC , del fenómeno de calentamiento de la componente al disipar potencia. Este modelo sirve para especificar el disipador a ser colocado con la componente para garantizar que la componente no se deteriore a efecto del incremento de temperatura durante el proceso de conducción. El calentamiento de la componente

debe ser tal que la juntura semiconductor no supere los 175°C para evitar el cambio de estado del silicio y su pérdida de propiedades semiconductoras y por el otro se tiene como limitación que el calor irradiado no puede incrementar la temperatura ambiente. En el modelo térmico la temperatura es representada por la tensión del circuito y la potencia disipada por la corriente. Por esta razón el cociente entre la temperatura y la potencia es denominado resistencia térmica que tiene unidades de $[\text{C}/\text{W}]$. Cada interfaz de dos materiales entre el semiconductor hasta el disipador se representa con una resistencia y capacitancia térmica. En la figura 14.2, se presenta el modelo térmico del dispositivo.

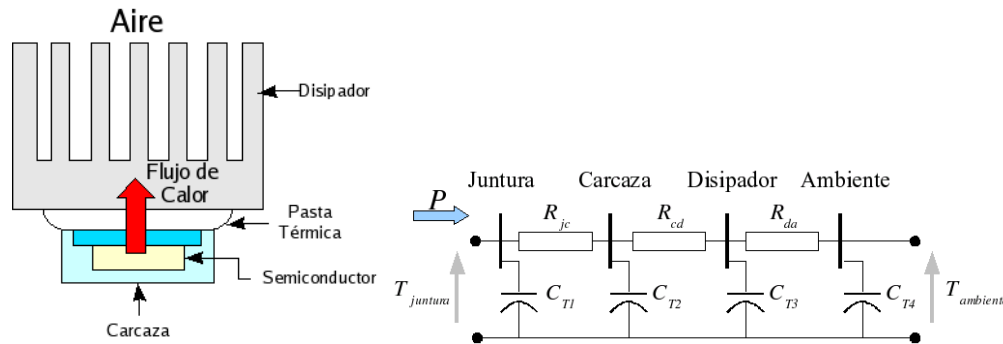


Figura 14.2: Modelo térmico del diodo y tiristor

El circuito RC de la figura 14.2 presenta una constante de tiempo asociada, dada por el producto de la resistencia y capacitancia térmica, un análisis pesimista de este proceso desprecia la constantes de tiempo y supone un proceso instantáneo de transferencia de calor entre la juntura semiconductor y el medio ambiente. Para evitar el deterioro del semiconductor se debe cumplir que:

$$T_{juntura} - T_{ambiente} \geq P \sum R_{T\acute{e}rmicas} \quad (14.3)$$

Como para la determinación de la potencia promedio se utilizó una aproximación en la parametrización de la curva de conducción del diodo y del tiristor y adicionalmente, se despreciaron las pérdidas de conmutación y bloque del dispositivo se considerará un factor de seguridad en la ecuación (14.8), de 0,8.

$$0,8 (T_{juntura} - T_{ambiente}) \geq P \sum R_{T\acute{e}rmicas} \quad (14.4)$$

$$0,8 (T_{juntura} - T_{ambiente}) \geq P [R_{juntura-carcaza} + R_{carcaza-disipador} + R_{disipador-ambiente}]$$

De la expresión (14.4), se puede calcular la resistencia térmica disipador - ambiente como:

$$R_{disipador-ambiente} \leq \left[\frac{0,8 (T_{juntura} - T_{ambiente})}{P} - R_{juntura-carcaza} - R_{carcaza-disipador} \right] \quad (14.5)$$

14.11. Pérdidas en Transistores

Para especificar un transistor por sus pérdidas se deben tomar en cuenta las potencias promedio disipadas en conducción, bloqueo y conmutación y compararlas con las indicadas por el fabricante. A diferencia del caso de los diodos y tiristores en los transistores por sus altas frecuencias de conmutación las pérdidas en estos procesos puede ser comparables o superiores a las de conducción.

14.11.1. Pérdidas de Bloqueo

Estas son producida por las corrientes de fuga de la componente y la tensión colector emisor o drain source en bloqueo, es decir en no conducción. Las corrientes de fuga en componentes semiconductoras, están en el orden de los micro amperes. La potencia promedio de bloqueo se calcula como:

$$P_{bloqueo} = V_{CE_{corte}} \left[\frac{1}{T} \int_{t_{on}}^T I_{fuga} dt \right]$$

$$P_{bloqueo} = V_{CE_{corte}} \frac{[T - t_{on}]}{T} I_{fuga} \quad (14.6)$$

$$P_{bloqueo} = V_{CE_{corte}} I_{fuga} [1 - \delta]$$

14.11.2. Pérdidas de Conducción

Estas pérdidas son producidas cuando la componente conduce y depende de la corriente media por la componente y la tensión colector emisor o drain source de saturación. La tensión de saturación de un transistor estas alrededor de uno a dos voltios. La potencia promedio de conducción se puede calcular como:

$$P_{conduccion} = V_{CE_{sat}} \left[\frac{1}{T} \int_0^{t_{on}} I_c dt \right]$$

$$P_{conduccion} = V_{CE_{sat}} \frac{t_{on}}{T} I_c \quad (14.7)$$

$$P_{conduccion} = V_{CE_{sat}} \delta I_c$$

14.11.3. Pérdidas de Conmutación

Estas pérdidas se deben al proceso de encendido y apagado de las componentes. Este proceso es aleatorio y depende de como se derrumba la barrera de potencial a medida que empieza a circular corriente en el caso del encendido, como se restituye la barrera de potencial conforme se extingue la circulación de la corriente en el apagado. Estas pérdidas dependen directamente del número de operaciones de encendido y apagado que realice la componente durante su operación. Para calcular la potencia promedio de encendido y apagado hay que tener en cuenta que es un proceso aleatorio, que se puede ajustar a un modelo estadístico de la operación de encendido y apagado. Como todo proceso de diseño se debe tener en cuenta el peor caso para determinar la máxima potencia disipada en esta condición. Los procesos de encendido y apagado de las componentes son similares por eso para la determinación de las pérdidas se estudiara sólo el encendido, las pérdidas de apagado se calcularan de igual forma teniendo en cuenta que los tiempos de apagado de los transistores. El tiempo de apagado de un transistor está en el orden de tres a cuatro veces el de encendido.

Para estudiar las pérdidas de encendido se estudiaran tres modelos estadístico de este fenómeno.

14.11.3.1. Modelo 1

En la figura 14.3, se presenta el esquema de tensión y corriente en la componentes durante el proceso de encendido. En este modelo se asume que la barrera de potencial no se derrumba hasta que la corriente por la componente no se establece completamente.

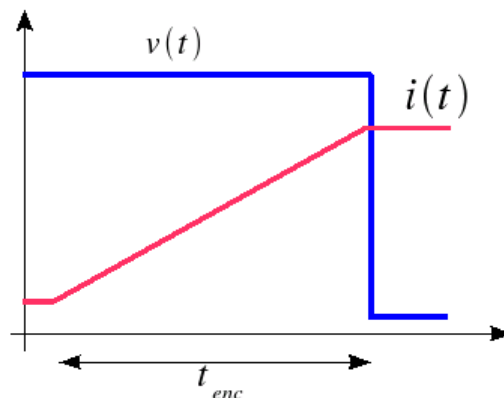


Figura 14.3: Tensión y corriente durante el encendido de un transistor "Modelo 1"

Para calcular las pérdidas promedio se parametrizará la corriente a una rampa de la forma:

$$i(t) = \frac{I_c}{t_{enc}} t \quad (14.8)$$

Donde:

t_{enc} es el tiempo de encendido de la componente.

Utilizando la expresión (14.8) y asumiendo la tensión constante e igual a $V_{CE_{corte}}$ se puede calcular la potencia como:

$$P_{conmu} = \frac{1}{T} \int_0^{t_{enc}} i(t) V_{CE_{corte}} dt$$

$$P_{conmu} = \frac{1}{T} \int_0^{t_{enc}} V_{CE_{corte}} \left[\frac{I_c}{t_{enc}} t \right] dt \quad (14.9)$$

$$P_{conmu} = f V_{CE_{corte}} I_c \frac{t_{enc}}{2}$$

Donde:

f es la frecuencia de conmutación de la componente.

14.11.3.2. Modelo 2

En la figura 14.4, se presenta el esquema de tensión y corriente en la componente durante el proceso de encendido. En este modelo se asume que la barrera de potencial se derrumba al mismo tiempo que se establece la corriente por la componente.

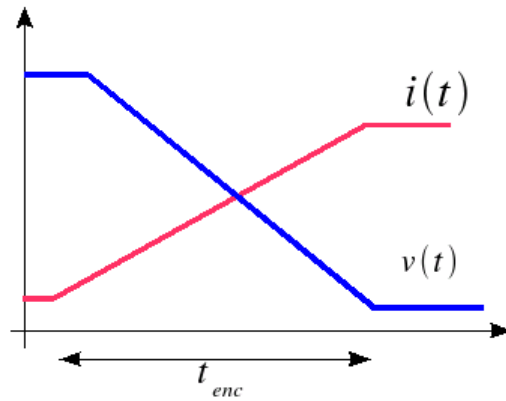


Figura 14.4: Tensión y corriente durante el encendido de un transistor "Modelo 2"

Para calcular las pérdidas promedio se parametrizará la corriente a una rampa como en la expresión (14.8), y la tensión se parametriza de la forma:

$$v(t) = \frac{V_{CE_{corte}} - V_{CE_{sat}}}{t_{enc}} t \quad (14.10)$$

Utilizando la expresión (14.8) y (14.10) se puede calcular la potencia como:

$$P_{conmu} = \frac{1}{T} \int_0^{t_{enc}} i(t) v(t) dt$$

$$P_{conmu} = \frac{1}{T} \int_0^{t_{enc}} \left[\frac{I_c}{t_{enc}} t \right] \left[\frac{V_{CE_{corte}} - V_{CE_{sat}}}{t_{enc}} t \right] dt \quad (14.11)$$

$$P_{conmu} = f (V_{CE_{corte}} - V_{CE_{sat}}) I_c \frac{t_{enc}}{6}$$

14.11.3.3. Modelo 3

En la figura 14.5, se presenta el esquema de tensión y corriente en la componente durante el proceso de encendido. En este modelo se asume que la barrera de potencial se derrumba completamente al circular la corriente por la componente.

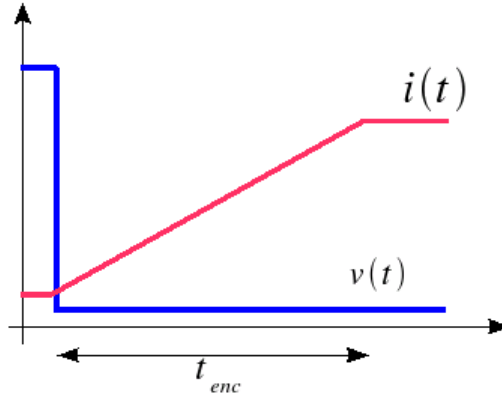


Figura 14.5: Tensión y corriente durante el encendido de un transistor "Modelo 3"

Para calcular las pérdidas promedio se parametrizará la corriente a una rampa como en la expresión (14.8), y la tensión se asumirá constante e igual a $V_{CE_{sat}}$. Se puede calcular la potencia como:

$$P_{conmu} = \frac{1}{T} \int_0^{t_{enc}} i(t) V_{CE_{sat}} dt$$

$$P_{conmu} = \frac{1}{T} \int_0^{t_{enc}} V_{CE_{sat}} \left[\frac{I_c}{t_{enc}} t \right] dt \quad (14.12)$$

$$P_{conmu} = f V_{CE_{sat}} I_c \frac{t_{enc}}{2}$$

14.11.4. Pérdidas Totales

Para encontrar las pérdidas totales del transistor es necesario sumar las de conducción, bloqueo y conmutación tanto en encendido como apagado. Para las pérdidas de conmutación se considera

el modelo estadístico uno por ser el más pesimista y el que considera mayores disipaciones de potencia. Entonces las pérdidas totales de un transistor se pueden resumir como:

$$P_{total} = P_{bloqueo} + P_{conduccion} + (P_{conmu_{enc}} + P_{conmu_{off}})$$

$$P_{total} = V_{CE_{corte}} I_{fuga} [1 - \delta] + V_{CE_{sat}} \delta I_c + f V_{CE_{corte}} I_c \left(\frac{t_{enc}}{2} + \frac{t_{off}}{2} \right) \quad (14.13)$$

Donde:

t_{off} es el tiempo de apagado de la componente.

Protección de Sobrecorriente en Semiconductores

15.1. Aspectos generales

En este capítulo se estudian los esquemas de protección contra sobre corriente mas utilizados en semiconductores y como se realiza su ajuste a fin de impedir el deterioro del semiconductor ante esta eventualidad. Los dispositivos más utilizados en la protección de semiconductores son los fusibles ultra rápidos, los interruptores termo-magnéticos también conocidos como breaker o *ITM* y la protección activa que brinda los manejadores ("*driver*") de disparo de los transistores de potencia.

15.2. Fusibles ultra rápidos

Los semiconductores pueden soportar de forma transitoria sobre corrientes de intensidad bajas y medias con una duración inferior a un ciclo de la fuente de alimentación. Esta especificación es dada por el fabricante de la pastilla semiconductora y generalmente su determinación se realiza con una forma sinusoidal de medio ciclo. La protección contra sobre carga puede llevarse a cabo con algún elemento de interrupción lenta o por medio de un circuito de mando. Para sobre corrientes altas específicamente de cortocircuito se debe limitar su duración a periodos inferiores a la fuente de alimentación, la única alternativa para interrumpir estas altas corrientes en tiempos menores a un ciclo de operación son los fusibles ultra rápidos. La coordinación de este fusible no se realiza bajo la característica tiempo corriente del fusible sino de acuerdo al parámetro I^2t , cuyo concepto ilustra la disipación de energía que la corriente provoca en el semiconductor originando la elevación de su temperatura sin ocasionar su destrucción, mientras que en el fusible representa la energía necesaria para que este alcance su fusión e interrumpa la corriente. En la figura 15.1, se presenta los dos esquemas más comunes de los fusibles ultra rápidos.

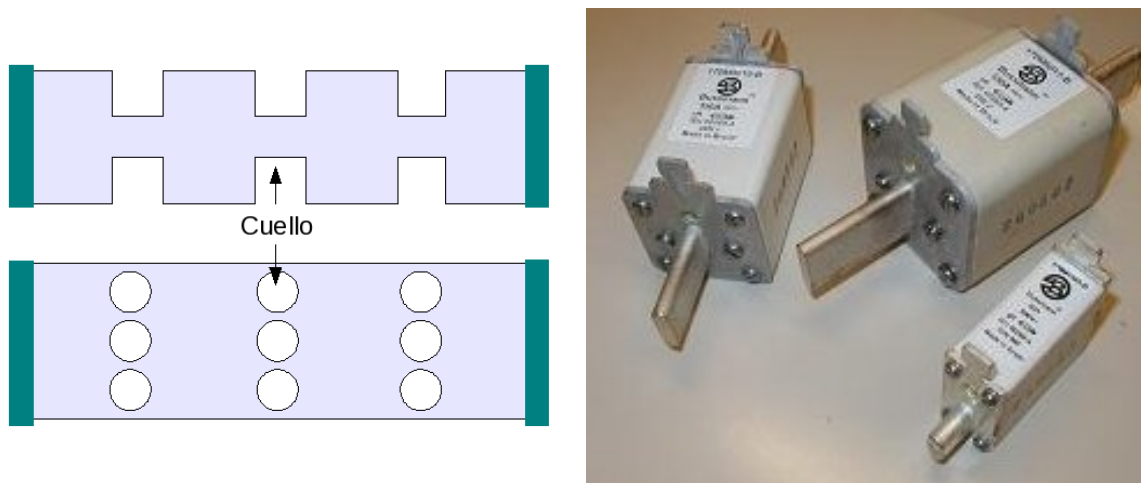


Figura 15.1: Tipos y forma interior de los fusibles ultra rápidos de potencia

El cuello es la parte de menor sección del fusible y es donde tiene lugar la fusión. Para sobre corrientes moderadas los tramos entre alrededor del cuello sirven como disipador pero ante altas corrientes esta área no es capaz de disipar el calor lo cual ocasiona la elevación de la temperatura hasta alcanzar la fusión del filamento. En la figura 15.2, se presenta la característica de corriente del fusible durante su proceso de fusión e interrupción de la corriente.

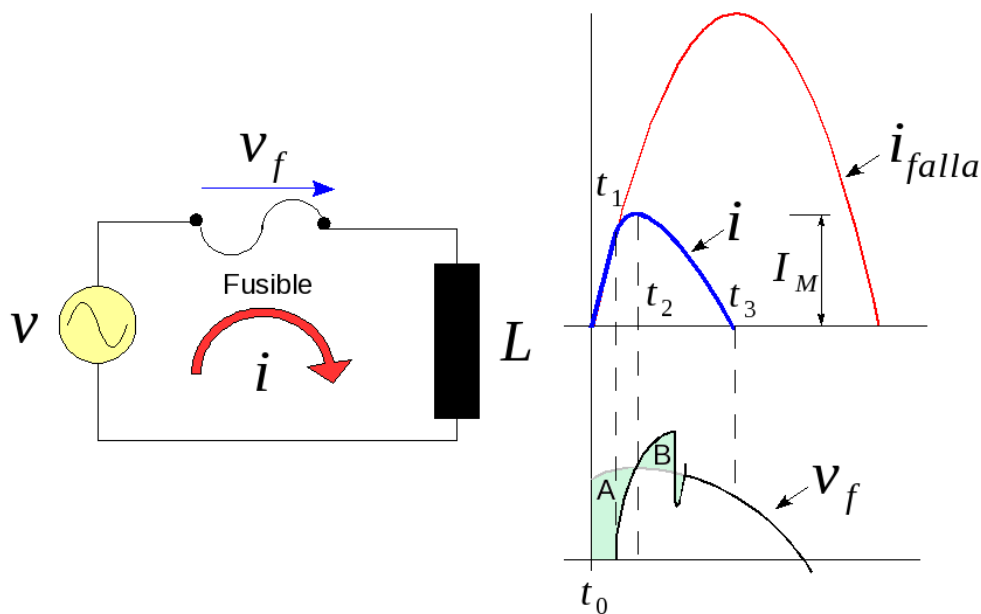


Figura 15.2: Evolución temporal de la corriente y tensión en un fusible ultra rápido durante la fusión.

En t_1 se produce la fusión y aparece sobre los terminales del fusible la tensión del arco eléctrico v_f . En t_2 la tensión del fusible iguala a la tensión de la fuente y la corriente llega a su valor máximo I_M . Cuando el área B iguala a la área A , en el instante t_3 la corriente se extingue y el circuito queda abierto, entonces se puede definir los siguientes tiempos de operación:

- Tiempo de Fusión:

$$t_f = t_1 - t_0 \quad (15.1)$$

- Tiempo de arco:

$$t_a = t_3 - t_1 \quad (15.2)$$

- Tiempo de actuación:

$$t_t = t_f + t_a = t_3 - t_0 \approx \frac{3(I^2 t)}{I_M^2} \quad (15.3)$$

Generalmente la coordinación del fusible ultra rápido no se realiza con el tiempo de actuación sino con el parámetro $I^2 t$, este parámetro se define como:

$$I^2 t = \int_{t_A}^{t_B} i^2 dt \quad (15.4)$$

Este valor depende de la duración y de la forma de onda considerada, generalmente para semiconductores se calcula a partir de un semiciclo de onda sinusoidal, mientras que para los fusibles se calcula a partir de una onda triangular. Este hecho hace que ambos parámetros no se puedan comparar directamente. Para coordinar la actuación del fusible afín de proteger el semiconductor se debe cumplir:

$$I_M (I^2 t)_{fusible} \leq 6 \cdot 10^{-3} (2f (I^2 t)_{semiconductor})^{3/2} \quad (15.5)$$

donde:

f Frecuencia de la fuente de alimentación.

Para el caso de corriente continua la expresión (15.5) se escala por un factor β como:

$$I_M (I^2 t)_{fusible} \leq \frac{6 \cdot 10^{-3}}{\beta} (4f (I^2 t)_{semiconductor})^{3/2} \quad (15.6)$$

donde:

$$\begin{aligned} \beta &= 0,4 + \frac{3,7}{3+\tau} & \tau &\leq 20ms \\ \beta &= 0,45 + 5,5 \cdot 10^{-3} \tau & 20ms &\leq \tau \leq 50ms \end{aligned} \quad (15.7)$$

15.3. Protección termo-magnética

La protección de diodos y tiristores mediante fusibles ultra rápidos es segura, sin embargo posee el problema de los costos de reposición del fusible luego de su operación. Esto no presenta mayor inconveniente debido a que esta protección esta pensada como respaldo y opera ocasionalmente, cuando no funciona otras protecciones primarias o cuando se presenta una falla de altas corrientes como un cortocircuito en la barra de continua.

En aplicaciones donde condiciones de operación imprevistas son frecuentes y habituales como en equipos portátiles y de enseñanza, se emplea para proteger los diodos y tiristores interruptores termo-magnéticos similares a los utilizados en la protección de instalaciones eléctricas, y en los que la unidad de apertura magnética para altas corrientes se realiza más sensible y rápida a fin de proteger el semiconductor.

Los interruptores termo-magnéticos poseen dos métodos de apertura: uno térmico mediante un sensor bi-metálico con tiempo de actuación largo que puede ser ajustado para abrir a partir de sobrecargas mayores o iguales al 10 % de la corriente nominal y una unidad magnética compuesta por un pequeño solenoide que actúa en pocos mili segundos para altas corrientes. Ambas unidades desencadenan o activan un mecanismo de apertura donde el arco es seccionado en una cámara apaga-chispas a fin de lograr su extensión y por tanto la interrupción de la corriente. En la figura 15.3, se presenta una vista interna de un interruptor termo-magnético.

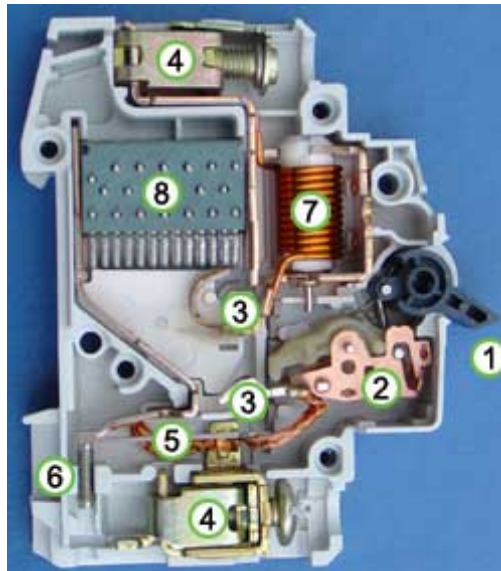


Figura 15.3: Vista interna de un interruptor termo-magnético

Donde:

1. Interruptor.

2. Mecanismo de disparo.
3. Terminales donde se establece el arco eléctrico.
4. Terminales
5. Unidad térmica
6. Ajuste temporización unidad térmica
7. Unidad magnética.
8. Cámara apaga-chispas

En la figura 15.4, se presenta la curva tiempo corriente de estos dispositivos donde se puede observar la característica térmica para corrientes pequeñas y la magnética para altas corrientes. Estos dispositivos no se han generalizado para aplicaciones en este campo y son pocos los fabricantes que lo ofrecen comercialmente.

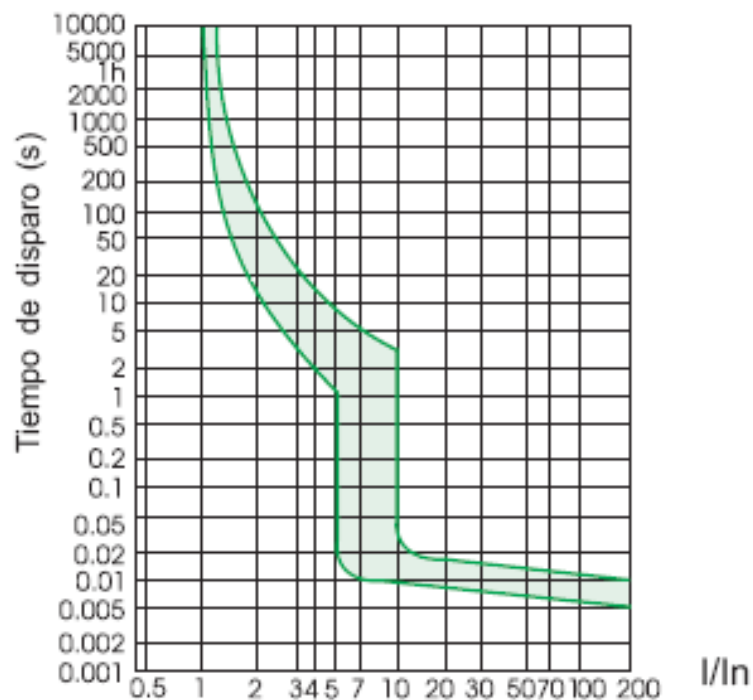


Figura 15.4: Curva tiempo corriente de un interruptor termo-magnético

La naturaleza mecánica de estos dispositivos produce tolerancias apreciables en las características que se observan en la figura 15.4, que obligan a tomar márgenes de seguridad conservadores en el diseño. Adicionalmente por su sensibilidad a vibraciones mecánicas tienden a no utilizarse en aplicaciones con movimiento. Su selección para protección de semiconductores se puede realizar

utilizando el mismo concepto de I^2t utilizado en los fusibles ultra rápidos, o bien utilizando la característica tiempo corriente del interruptor. En el caso del semiconductor la corriente máxima que soporta durante medio ciclo de una sinusoidal sin daño se puede calcular de los datos del fabricante como:

$$I_{max} = \sqrt{4f(I^2t)} \quad (15.8)$$

Los interruptores termo-magnéticos rápidos se emplear también como dispositivos de conexión y desconexión habitual y como protección primaria contra sobre corrientes para equipos de electrónica de potencia sencillos.

15.4. Protección activa de transistores

Los transistores de potencia en todas su versiones (BJT, MOSFET, IGBT, etc.) poseen en sus manejadores de disparo la posibilidad de limitar o interrumpir la corriente en caso que alcance valores excesivos simplemente deshabilitando el pulso de disparo de la componente. Este esquema de protección se basa en la medición de corriente que circula por la componente, esto se realiza añadiendo una resistencia en serie con el terminal de emisor o surtidor del transistor. Esta resistencia es de un bajo valor óhmico y de una especificación capaz de manejar la corriente en conducción de la componente. La tensión sobre esta resistencia es monitoreada por un circuito comparador que se ajusta para que a partir de un valor deshabilite las ordenes de disparo a las bases o gates de los transistores. Los tipos de protección y niveles de prioridad que están disponibles en las unidades de manejo de disparo de los transistores son:

- **Nivel 1:** Generación de una alarma de sobrecarga con posible envío de señales a otra protección para su apertura.
- **Nivel 2:** Generación de alarma por sobrecarga debido a la disminución de la tensión de alimentación del puente con posible envío de señales a otra protección para su apertura.
- **Nivel 3:** Sobre corriente en una fase o a tierra se procede a la desconexión de la unidad de disparo y apagado de todos los transistores que componen el puente y se envía una señal de alarma.

Para los niveles uno y dos el fenómeno se presenta en todas las fases del puente convertidor y si esta no supera el 10 % de la corriente nominal de diseño no se procede a la desconexión en caso contrario una protección deberá proceder a la apertura de acuerdo a un temporización previamente establecida. Estas unidades también protegen contra sobretensión en la fuente de alimentación, la

cual cuando supera un 15 % de la tensión de diseño se procede a la desconexión de la unidad de disparo y apagado de todos los transistores que componen el puente.

Barra de Corriente Continua

16.1. Aspecto Generales

Son muchas las aplicaciones que requieren una fuente de corriente continua ideal, con un rizado inferior al obtenido con los diferentes rectificadores de diodos o controlados. Para lograr esto es necesario la inclusión de un filtro, el tamaño de este depende del número de fases del rectificador empleado y del rizado de corriente o tensión deseado. Otro aspecto a considerar en el diseño de una barra de corriente continua, es que la carga DC entregue durante ciertos periodos de operación energía a la barra, en el caso de utilizar un rectificador controlado o activo esta energía puede ser traspasada al lado de corriente alterna, pero si se utiliza un rectificador de diodos esta energía no puede ser traspasada e incrementaría la tensión de la barra si esta posee un condensador para disminuir el rizado de tensión. Para evitar elevar la tensión de operación de la barra DC durante los periodos de regeneración se utiliza una resistencia de frenado a fin de disipar la energía proveniente de la carga DC. En este capítulo se presentan los diferentes tipos de filtros empleados y el dimensionamiento de la resistencia de frenado en las barras de corriente continua.

16.2. Filtros

La escogencia de un tipo de filtro específico depende de los requerimientos de la carga DC conectada a la Barra. Si se desea disminuir el rizado de corriente es necesario la inclusión de inductancia en el filtro a fin de lograr este objetivo, recordando que la inclusión de un valor mínimo de inductancia en la barra de continua permite garantizar para rectificadores de media onda y monofásicos que alcancen la condición continuada de corriente, con su consecuentes beneficios que anteriormente se presentaron en el capítulo respectivo. Cuando el objetivo es disminuir el rizado de tensión es necesario la colocación de un capacitor en el filtro generalmente este condensador se trabaja a un 85 % de su valor nominal de tensión a fin de poder permitir durante operaciones transitorias de poca duración la regeneración de la carga DC sin la colocación de resistencia de frenado. En la figura 16.1, se presenta el esquema de conexión del filtro en la barra DC.

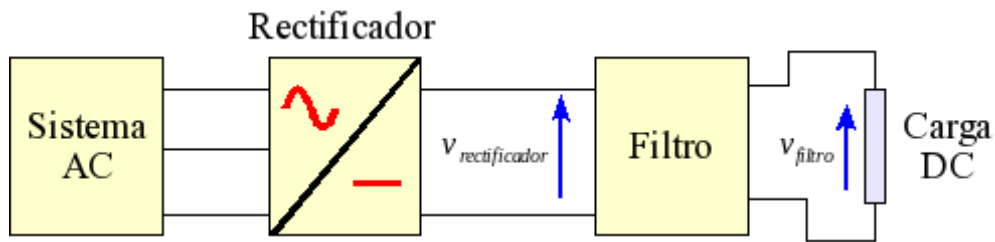


Figura 16.1: Filtro en la barra de corriente continua

Los tipos de filtros utilizados en las barras de corriente continua, para rectificadores son:

- **Filtro L :** Consta de una inductancia serie con la carga
- **Filtro C :** Formado por un condensador en paralelo a la carga.
- **Filtro LC :** Es un filtro L conectado en cascada con el filtro C .
- **Filtro π :** Están conformado por un filtro LC conectado en cascada con un filtro C .
- **Filtro LC doble:** Consta de dos filtros LC conectados en cascada.

En la figura 16.2, se presentan los esquemas de los diversos tipos de filtros para rectificadores

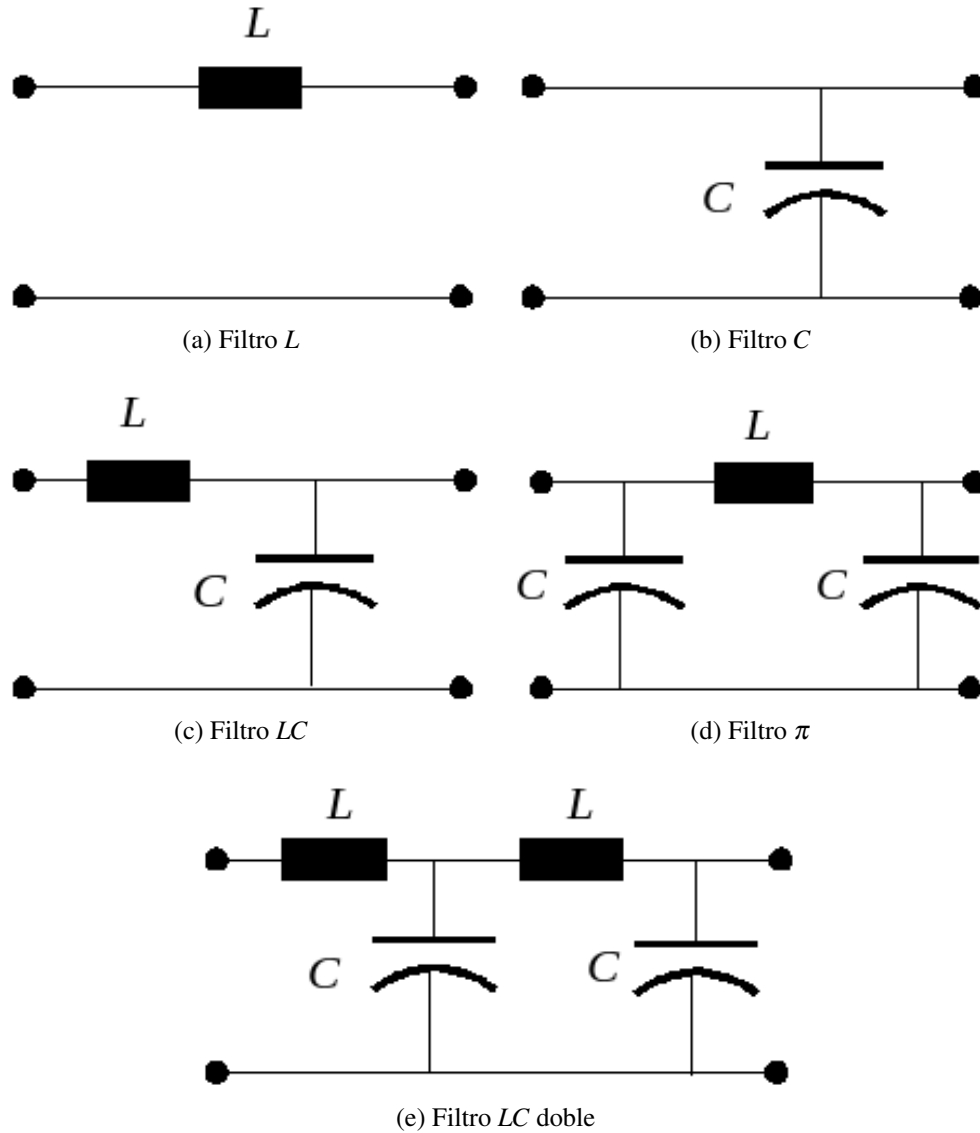


Figura 16.2: Diversos tipos de filtros para rectificadores

El rizado producido por los rectificadores controlados es mayor que los de diodos y por ende requieren filtros de mayor tamaño. Generalmente las cargas en la barra de corriente continua requieren la regulación de tensión, por eso el filtro más utilizado es el LC , esta configuración se le conoce como filtro pasa bajos. Suponiendo que el puente trabaja en condición continuada y que el flujo de corriente por la inductancia L es siempre diferente de cero, puede aplicarse el principio de superposición y ver el efecto del filtro sobre cada armónico de tensión proporcionada por el rectificador. El mayor valor de rizado se alcanza cuando el puente trabaja en vacío, el filtro LC presenta la siguiente función de transferencia en el dominio de la frecuencia:

$$\frac{v_{filtro}(S)}{v_{rectificador}(S)} = \frac{\frac{1}{SC}}{SL - \frac{1}{SC}} = \frac{1}{S^2LC - 1} \quad (16.1)$$

La relación (16.1), muestra que el filtro es más efectivo a medida que se incrementa la frecuencia del armónico considerado y cuanto mayor sea el producto de la inductancia y la capacitancia que lo conforman. Cada armónico es atenuado aproximadamente por el cuadrado de su frecuencia, esto hace que al momento de diseñar el filtro se realice para una frecuencia de corte para armónicos de bajo orden. Dos aspectos a considerar al momento de diseño del filtro es la frecuencia natural (ω_n) de corte del filtro LC la cual no puede ser excitada por el contenido armónico del rectificador y en caso de utilizar bobinas con núcleo de hierro las pérdidas adicionales producto de las corrientes armónicas.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (16.2)$$

Para conseguir un rizado a la salida determinado el producto LC ha de tener un valor determinado. Para escoger los valores de L y C se debe tener en cuenta adicionalmente:

- Un valor bajo de L hace que sus pérdidas y, por tanto, las del filtro sean bajas.
- Un valor bajo de L mejora la estabilidad dinámica del filtro.
- Un valor alto de L limita las máximas corrientes en la barra de corriente continua.

Generalmente los fabricantes optan por utilizar como inductancia L el valor obtenido de las barra de conexión dentro del BUS DC y no colocan inductancia adicional para el filtro. En el caso que la exigencia del rizado de salida sea muy pequeña es preferible utilizar un filtro LC doble.

16.3. Manejador de frenado dinámico y regenerativo

Durante la operación de un máquina eléctrica con un variador de velocidad, esta puede estar sometida a operaciones de frenado mecánico o eléctrico para disminuir su velocidad. El frenado mecánico es externo al variador y esta colocado en la carga mecánica e introduce un par contrario al movimiento con la finalidad de detener o disminuir la velocidad del accionamiento. El frenado eléctrico se clasifica en dinámico y regenerativo. En cualquiera de los dos casos la máquina opera como generador y la energía cinética del accionamiento es transformada en energía eléctrica.

16.3.1. Frenado dinámico

Durante el frenado dinámico, la energía eléctrica alterna en los terminales de la máquina es convertida en corriente continua por los diodos de descarga libre del inversor y suministrada a la barra de corriente continua del rectificador, para ser disipada en una resistencia de frenado (R_d) la cual es

accionada por un transistor de compuerta aislada o IGBT. En la figura 16.3, se presenta el esquema del convertidor con unidad de frenado dinámico.

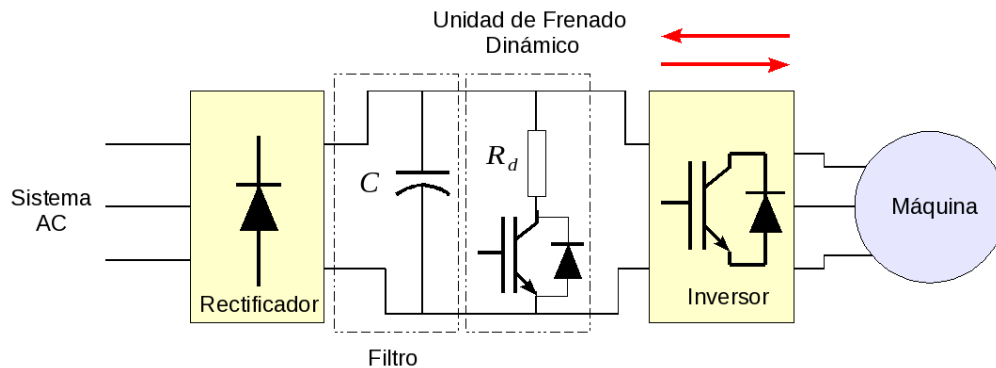


Figura 16.3: Convertidor de velocidad con unidad de frenado dinámico

La operación de la unidad de frenado dinámico es muy sencilla, cuando la máquina actúa como generador y la tensión en sus terminales supera la tensión de la barra de corriente continua, en esta etapa el inversor actúa como rectificador utilizando los diodos de descarga libre de los IGBT que lo conforman. Esta operación establece un flujo de corriente que no puede circular al sistema alterno por el rectificador de diodos, originando que el condensador (C) del filtro se comience a cargar y empiece a elevar la tensión de la barra. La unidad de frenado dinámico se activa cuando la tensión de la barra supera el 10 % de su valor nominal con la finalidad de que la resistencia de frenado (R_d) disipe el exceso de energía y limite la tensión de la barra a su tensión nominal de diseño. El principio de operación de esta unidad es la misma que el chopper reductor donde se controla la razón de conducción (δ) del IGBT para obtener la característica de disipación de potencia de la figura 16.4.

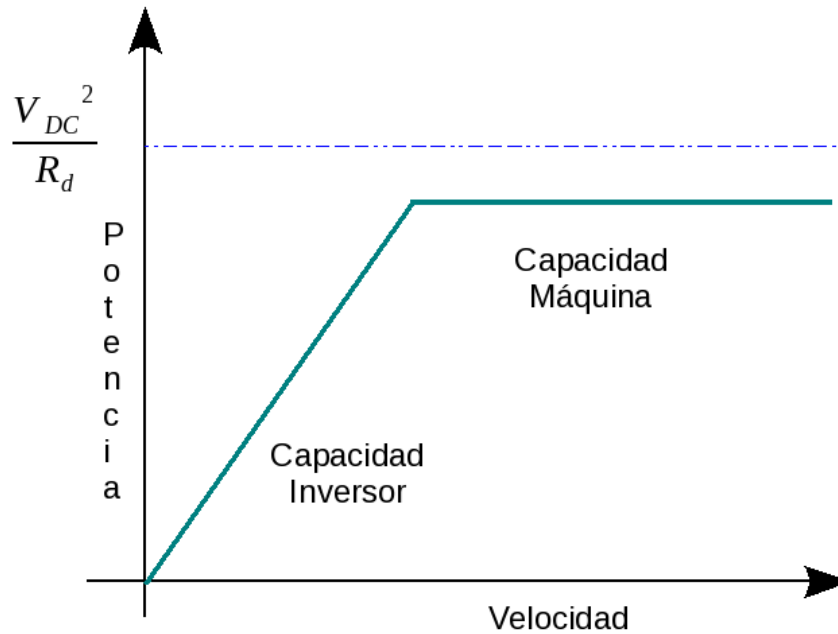


Figura 16.4: Característica de disipación de potencia de la unidad de frenado dinámico

La máxima disipación de potencia se obtiene cuando la razón de conducción del chopper es igual a uno, es decir el IGBT esta todo el tiempo en conducción y es igual a:

$$P_{max} = \frac{V_{DC}^2}{R_d} \quad (16.3)$$

El valor máximo de resistencia de frenado (R_d) que se puede instalar esta limitada por la capacidad de la máquina y del inversor en soportar la operación de frenado. En general se instala una resistencia de un 15 a 30 % de la potencia de variador por las limitaciones anteriormente señaladas.

16.3.2. Frenado regenerativo

En el frenado regenerativo la energía suministrada a la barra de corriente continua por la máquina eléctrica es traspasada al sistema de corriente alterna al sustituir el rectificador de diodos de la figura 16.3 por un rectificador activo o *PWM* o en su defecto por un rectificador controlado.

Parte VIII

Accionamientos de Máquinas Eléctricas Rotativas

Introducción a los Sistemas con Accionamiento Eléctrico.

17.1. Aspectos Generales

En las últimas décadas, se han implementado diversas estrategias de control para el accionamiento de la máquina eléctrica a través de puentes convertidores electrónicos. Estas estrategias permiten obtener una excelente respuesta del convertidor electromecánico en estado estacionario, pero una pobre respuesta en régimen dinámico de operación. Entre las causas que producen esta pobre respuesta dinámica, encontramos los cambios en el enlace de flujo en el entre hierro de la máquina, debido al proceso de conmutación de los interruptores estáticos del puente convertidor. Esta pequeña variación afecta la magnitud y fase del enlace de flujo. Para corregir estas variaciones en el enlace de flujo es necesario controlar instantáneamente la magnitud y fase de las corrientes en cada una de las bobinas que conforman el estator y rotor. La mayoría de las estrategias de los accionamientos en corriente alterna, utilizan la magnitud y frecuencia de las corrientes del estator como variable de control, y no toman en cuenta su fase. Esto ocasiona una desviación en la fase y magnitud del enlace de flujo en el entre hierro de la máquina.

Las variaciones en el enlace de flujo en el entre hierro de la máquina, ocasionan oscilaciones en el par eléctrico instantáneo entregado por el convertidor, esto se refleja como fluctuaciones en la velocidad y oscilaciones del eje mecánico. Esta condición es indeseable en la mayoría de los accionamientos que requieren altas prestaciones dinámicas, tales como actuadores robóticos, bombas de extracción, donde se requiere alta precisión, rápido posicionamiento o un control preciso de velocidad ante variaciones de la carga mecánica. Las variaciones en el enlace de flujo en el entre hierro ocasionan altos picos de corriente en el estator de la máquina. Estos picos de corriente deben ser suplidos por el convertidor electrónico durante la operación del accionamiento. Para cubrir este requerimiento, es necesario el sobre dimensionar las componentes de potencia, lo cual incrementa el costo total del convertidor estático de energía.

Al comparar los accionamientos de corriente alterna con los de corriente continua, y en especial con los de la máquina de corriente continua en conexión independiente, en lo relativo al control dinámico de velocidad, en la máquina DC es más sencillo este control debido, a que se puede controlar de manera independiente el flujo, el cual se mantiene constante durante la operación, y el par eléctrico. El par eléctrico y el flujo magnético se controlan independientemente a través únicamente del control de la magnitud de la corriente de armadura y campo del convertidor electromecánico. La sencillez del control de la máquina DC, se basa en que sólo se debe controlar la magnitud de las corrientes en el campo y la armadura, a diferencia de los motores AC donde existen más grados de libertad (magnitud, frecuencia y fase) lo que complica más el controlador.

En la máquina de corriente alterna es posible realizar un control del flujo y del par eléctrico de manera independiente al igual que la máquina de corriente continua. Para controlar el par y el flujo de manera independiente es necesario controlar la fase, magnitud y frecuencia de las corrientes en el estator. Las corrientes en el estator dependen por una parte del enlace de flujo en el rotor el cual es función de la posición angular de este con respecto al estator y de la corriente que circula por el rotor. Para realizar el control de la corriente del estator es necesario conocer en cada instante del tiempo el enlace de flujo del rotor el cual varía dinámicamente con la posición del rotor. El control de fase, magnitud y frecuencia de la corriente del estator se puede realizar a través del puente inversor utilizando control vectorial.

El control vectorial de las máquinas AC es equivalente al control independiente de flujo y par de la máquina de corriente continua. Este control incrementa las características dinámicas del accionamiento al tomar en cuenta todos los grados de libertad presentes en la corriente del estator en cada una de las fases y reduce las fluctuaciones en el enlace de flujo en el entre hierro de la máquina, debidos a las conmutaciones del puente inversor.

17.2. Accionamiento para Máquinas Eléctricas

En la figura 17.1, se presenta el esquema de un accionamiento para una máquina eléctrica. Un accionamiento eléctrico persigue conseguir una determinada respuesta de un sistema mecánico. Estas respuestas pueden ser: velocidad, par, posición o aceleración. Adicionalmente, los accionamientos deben cumplir una serie de restricciones (tiempo de respuesta, aceleraciones máximas, sobre oscilación de la variable a controlar y no sobrepasar determinados valores de corriente, tensión u otras).

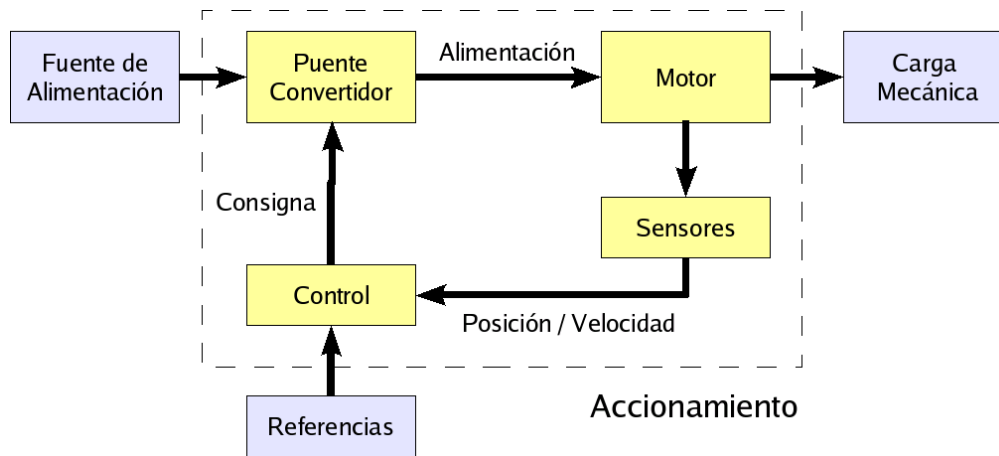


Figura 17.1: Esquema de un accionamiento eléctrico de motores

Partes principales de un accionamiento eléctrico:

- **Fuente de alimentación:** en general, la red eléctrica de corriente alterna o un generador.
- **Convertidor electrónico de potencia:** Puede ser una combinación de distintos tipos de convertidores: AC - DC, AC - AC, DC - AC, DC - DC. El convertidor podría ser reversible en potencia o no reversible.
- **Sistema de control:** puede ser analógico, digital o una combinación de ambos. A menudo se emplean micro controladores o procesadores digitales de señales (*DSP*) de gran velocidad y capacidad de cálculo.
- **Motor eléctrico:** de AC o de DC. La tendencia es usar motores de AC.
- **Sistema de transmisión (caja de engranajes) y carga mecánica:** Puede ser pasivo (el par es siempre en sentido contrario a la velocidad de giro) o activo (el par tiene un sentido único, independientemente del sentido de giro), característico de los aparatos de elevación.
- **Sensores:** transformadores de intensidad o de tensión, sondas de efecto Hall, tacómetros o encoders. La tendencia es eliminar los sensores mecánicos y sustituirlos por observadores, disminuyendo las fallas y necesidades de mantenimiento.

Las máquinas eléctricas más empleadas para realizar accionamientos eléctricos son las de corriente alterna y corriente continua. Entre las máquinas de corriente alterna tenemos: inducción, sincrónicas de imán permanente y de reluctancia. El puente convertidor electrónico se define en función de dos aspectos fundamentales: el sistema de alimentación: continua o alterna que determina su entrada y la máquina eléctrica a emplear que determina la salida (continua o alterna). En la tabla 17.1, se presentan los convertidores electrónicos más utilizados en la fabricación de accionamientos.

Tabla 17.1: Puentes convertidores utilizados en accionamientos.

Puente Electrónico	Fuente de Alimentación	Máquina Eléctrica
Chopper	Corriente Continua	Corriente Continua
Rectificador No Controlado y Controlado	Corriente Alterna	Corriente Continua
Inversor	Corriente Continua	Corriente Alterna
Ciclo convertidor	Corriente Alterna	Corriente Alterna
Controlador AC - AC	Corriente Alterna	Corriente Alterna

El esquema de control del accionamiento, debe garantizar un proceso de conversión de energía eléctrica a mecánica eficiente, teniendo en cuenta la calidad de la energía suministrada al motor y a la red de alimentación. Hoy en día con el poder de cálculo y velocidad de los Procesadores Digitales de Señales (*DSP*), permiten que el esquema de control se puede realizar el tiempo real, incrementando las prestaciones dinámicas del accionamiento, ante cambios brusco de la carga y reduciendo el impacto de armónicas al sistema de alimentación y al motor. Entre las prestaciones más solicitadas en los accionamientos eléctricos encontramos:

- Sistema mecánico:
 - Control rápido, continuo y a distancia del sistema.
 - Ajuste de variables (caudal, presión, etc.).
 - Características dinámica:
 1. Tiempos cortos en arranque, paro e inversión.
 2. Tiempos cortos en cambios de velocidad.
 3. Control de aceleración.
 - Requerimientos de precisión:
 1. Mantener la velocidad constante.
 2. Parar en una posición determinada.
 3. Suministrar par a bajas velocidades
- Sistema eléctrico de alimentación y motor
 - Menor sobre intensidad de arranque.
 - Posibilidad de ahorro de energía.
 - Control del factor de potencia.
 - Control de la inyección de armónicos.

- Menores esfuerzos mecánicos en el motor.
- Menor calentamiento

Para alcanzar estas características y prestaciones, es necesario tener presente que los accionamientos eléctricos presentan una naturaleza multidisciplinaria donde intervienen varias áreas del conocimiento, en la figura 17.2, se presentan algunas de estas áreas.

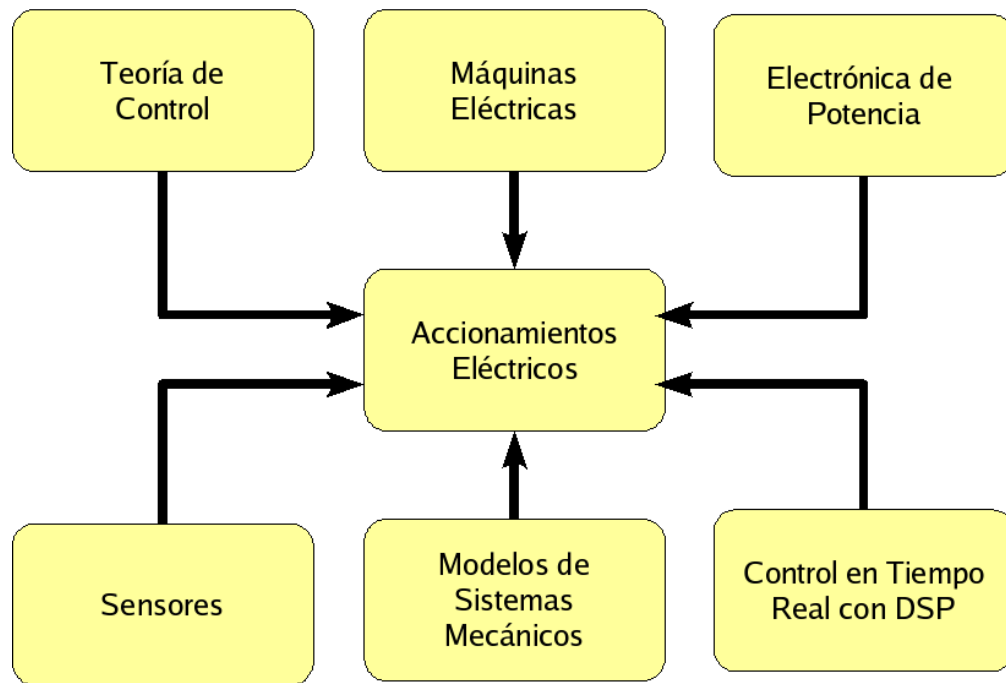


Figura 17.2: Multidisciplinariedad de las accionamientos eléctricos

En los capítulos siguiente se estudiarán las áreas del conocimiento más importantes para entender el funcionamiento, prestaciones, características e impacto sobre la carga y el sistema eléctrico de alimentación, de los accionamientos de máquinas eléctricas. Las aplicaciones de los accionamientos eléctricos son muy variadas, entre las principales encontramos:

- **Procesos industriales:** agitadores, bombas, ventiladores, compresores, etc.
- **Maquinaria:** cabrestantes, prensas, afiladores, molinos, etc.
- **Acondicionamiento de calor y frío industrial:** bombas, sopladores, compresores, etc.
- **Industria del acero y del papel:** elevación, grúas, rodillos, etc.
- **Transporte:** ascensores, vehículos, trenes, metros, etc. Industria textil: telares, etc.
- **Industria del alimento:** transporte, ventilación, empaquetado, etc.

- **Industria del petróleo, gas y minería**
- **Residencial:** bombas, congeladores, lava platos, lavadoras, etc.
- **Industria manufacturera.**
- **Industrial Textil.**

Sistemas Mecánicos

18.1. Aspectos Generales

En este capítulo se estudian las ecuaciones que describen el comportamiento y características de los sistemas mecánicos más comunes de los accionamientos eléctricos. En la figura 18.1, se presenta el esquema de un sistema mecánico lineal, donde f_e es la fuerza actuante, f_L la fuerza resistente, M la masa del cuerpo y x la posición relativa a un eje de coordenadas.

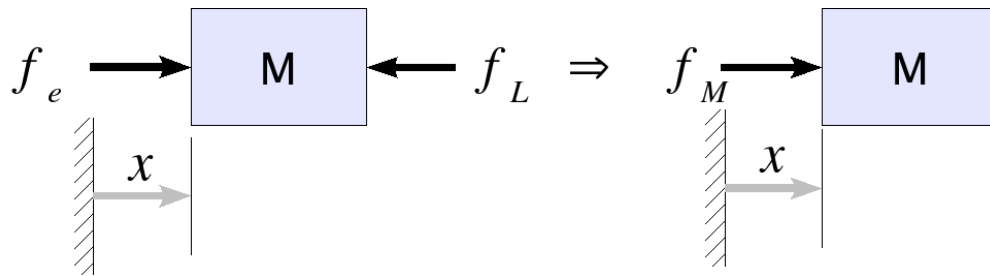


Figura 18.1: Sistema mecánico lineal.

Aplicando las ecuaciones de movimiento en una dimensión podemos calcular:

La velocidad:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (18.1)$$

La aceleración:

$$a = \frac{f_e(t) - f_L(t)}{M} = \frac{f_M(t)}{M} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (18.2)$$

La potencia:

$$p(t) = f_M(t) \cdot v(t) \quad (18.3)$$

La energía cinética:

$$W_M(t) = \frac{1}{2} M \cdot v(t)^2 \quad (18.4)$$

En la figura 18.2, se presenta el esquema de un sistema mecánico rotacional, donde f es la fuerza actuante, Mg es la componente de peso de la fuerza resistente, M la masa del cuerpo y φ la posición relativa a un eje de coordenadas.

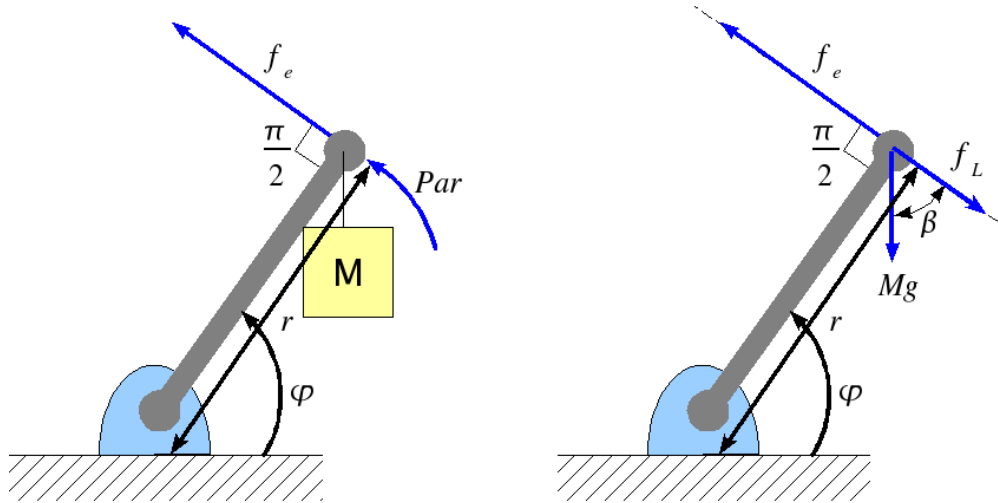


Figura 18.2: Sistema mecánico rotacional.

Aplicando las ecuaciones de movimiento circular, podemos calcular:

El par:

$$\vec{T}_e = (\vec{f}_e - \vec{f}_L) \times \vec{r} \quad (18.5)$$

donde:

$$f_L = Mg \cdot \text{sen}(\beta) \quad (18.6)$$

Debido a que la fuerza se aplica perpendicularmente a la barra el producto vectorial es máximo por lo tanto el módulo de la ecuación (18.5), se reduce a:

$$T_r = (f_e - f_L) r \quad (18.7)$$

En un accionamiento eléctrico el par resultante T_r , se puede calcular de manera análoga. En la figura 18.3, se presenta un esquema del sistema mecánico de un accionamiento eléctrico, donde

T_e es el par producido por el motor y T_m el par de la carga que se opone al movimiento, que esta conformado por el par de la carga mecánica y el par de fricción. En este caso el par resultante T_r es:

$$T_r = T_e - T_m \quad (18.8)$$

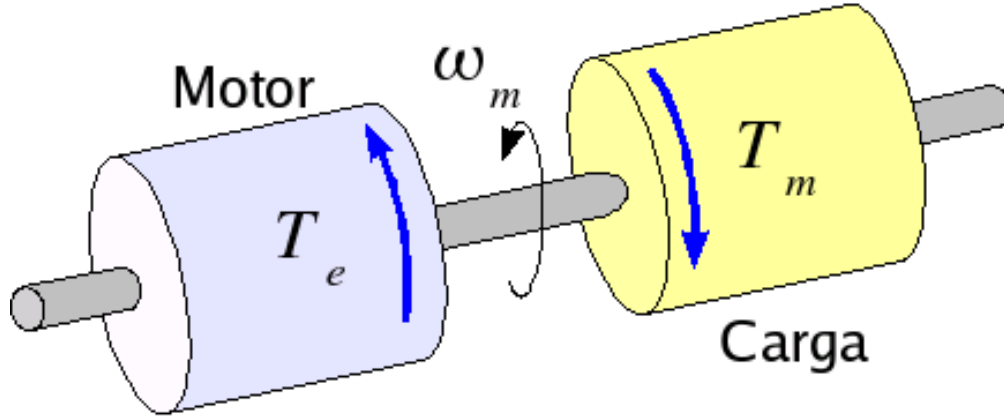


Figura 18.3: Sistema mecánico de un accionamiento eléctrico

La aceleración:

$$a_m = \frac{T_r(t)}{(J_m + J_L)} = \frac{T_r(t)}{J_{eq}} = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \frac{d\omega_m(t)}{dt} \quad (18.9)$$

donde:

- J_m es el momento de inercia del motor.
- J_L es el momento de inercia de la carga.
- J_{eq} es la inercia total del conjunto máquina carga.

La inercia de un cilindro sólido de masa " M " y de radio " r ", se puede calcular como:

$$J = \frac{1}{2} M \cdot r^2 \quad (18.10)$$

La velocidad:

$$\omega_m(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_m(0) + \int_0^t a_m(\tau) d\tau \quad (18.11)$$

La posición:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \omega_m(\tau) d\tau \quad (18.12)$$

La potencia:

$$p(t) = T_r(t) \cdot \omega_m(t) \quad (18.13)$$

La energía cinética:

$$W_M(t) = \frac{1}{2} J \cdot \omega_m(t)^2 \quad (18.14)$$

18.2. Par de Fricción o Rozamiento

El par de fricción o rozamiento (T_f) esta compuesto por tres componentes: la fricción estática, la fricción de Coulomb y la fricción viscosa. El par de fricción puede ser representado como:

$$T_f = T_{estático} + T_{Coulomb} + T_{viscosa} = T_{estático} + T_{Coulomb} + k \cdot \omega_m(t) \quad (18.15)$$

Donde:

- La fricción estática ($T_{estático}$) es debido a las diferencias del coeficiente dinámico al comenzar un movimiento, frecuentemente este término se desprecia.
- La fricción de Coulomb ($T_{Coulomb}$) es constante e independiente de la velocidad y es el producto del rozamiento entre sólidos.
- La fricción viscosa ($T_{viscosa}$) corresponde a la característica de rozamiento entre sólidos y líquidos y es proporcional a la velocidad.

En la figura 18.4, se presenta la característica del par de fricción de un accionamiento eléctrico.

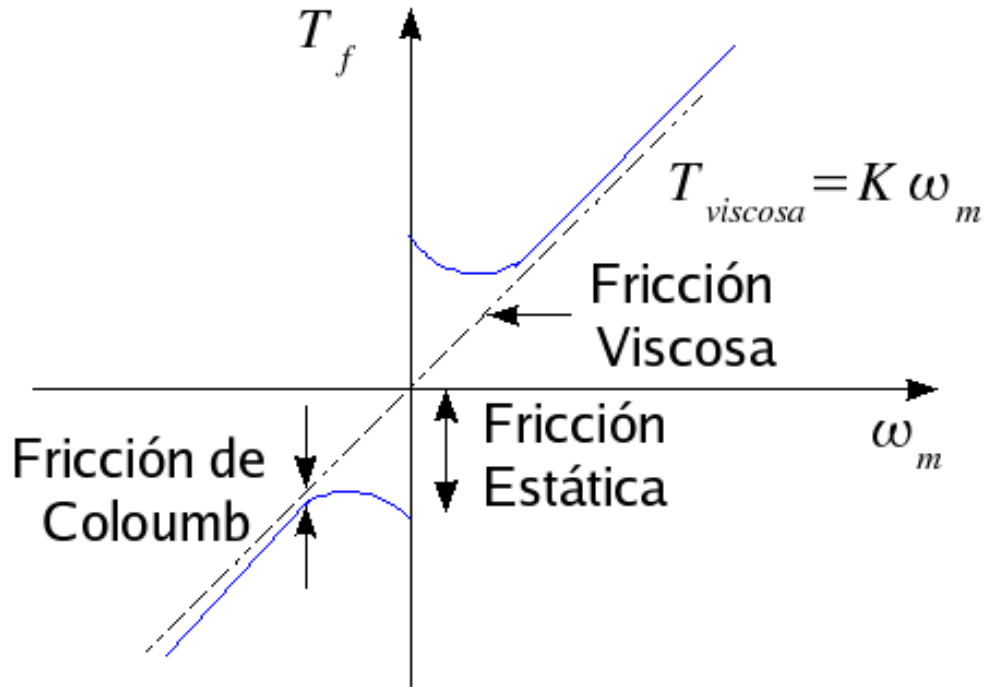


Figura 18.4: Característica de fricción de un accionamiento

18.3. Par de Torsión

Para acoples muy largos y finos entre la máquina eléctrica y la carga mecánica se pueden producir diferencias en las velocidades en ambos extremos del acople. Esta diferencia de velocidad se traduce en un par de torsión (T_t) aplicado sobre el eje de rotación que tratara de deformarlo y produce fluctuaciones o oscilaciones en el par de la máquina y en algunos casos puede producir la fractura del eje en los regímenes de aceleración y desaceleración. En la figura 18.5, se muestra una presentación esquemática de este fenómeno.

El par de torsión en el eje se puede calcular como:

$$T_{torsión} = K(\varphi_{mot} - \varphi_{carga}) = K(\omega_{mot} - \omega_{carga}) dt \quad (18.16)$$

$$T_{torsión} = K\Delta\omega dt$$

donde:

$$\Delta\omega = \omega_{mot} - \omega_{carga} \quad (18.17)$$

La aceleración del motor y la carga se puede calcular como:

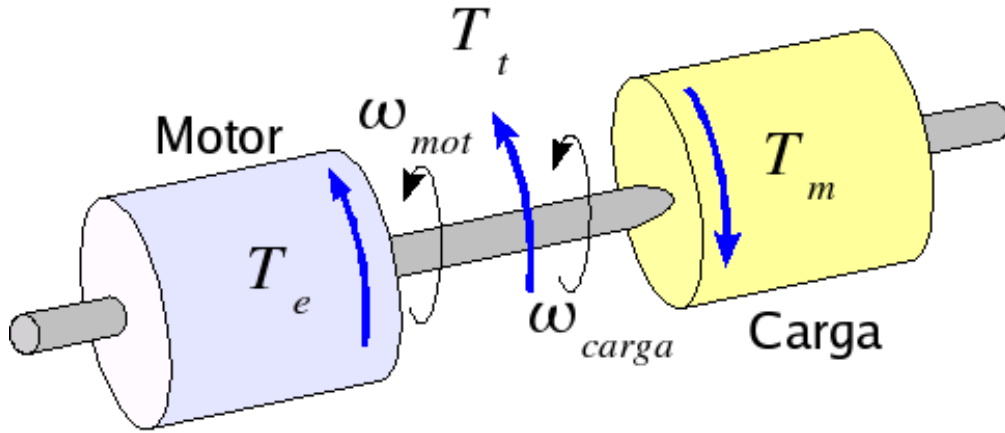


Figura 18.5: Par de torsión

$$\frac{d\omega_{mot}(t)}{dt} = \frac{T_e - T_{torsión}}{J_{mot}} \quad (18.18)$$

$$\frac{d\omega_{carga}(t)}{dt} = \frac{T_{torsión} - T_m}{J_{carga}} \quad (18.19)$$

Calculando el par del motor de la ecuación (18.18), obtenemos:

$$T_e = J_{mot} \frac{d\omega_{mot}(t)}{dt} + T_{torsión} \quad (18.20)$$

Derivando la ecuación (18.20) y reemplazando ω_{mot} de la ecuación (18.17), se obtiene:

$$\frac{dT_e}{dt} = J_{mot} \frac{d^2\Delta\omega(t)}{dt^2} + \frac{dT_{torsión}}{dt} \quad (18.21)$$

Sustituyendo la definición del par de torsión (18.16) en la ecuación (18.21), se obtiene:

$$\frac{dT_e}{dt} = J_{mot} \frac{d^2\Delta\omega(t)}{dt^2} + K\Delta\omega(t) \quad (18.22)$$

La ecuación característica de la expresión (18.22), es:

$$J_{mot}s^2 + K = 0 \quad (18.23)$$

Esta ecuación característica tiene dos polos complejos conjugados, lo que ocasiona una respuesta natural oscilatoria en la velocidad. En la figura 18.6, se presenta un equivalente eléctrico de la figura 18.5.

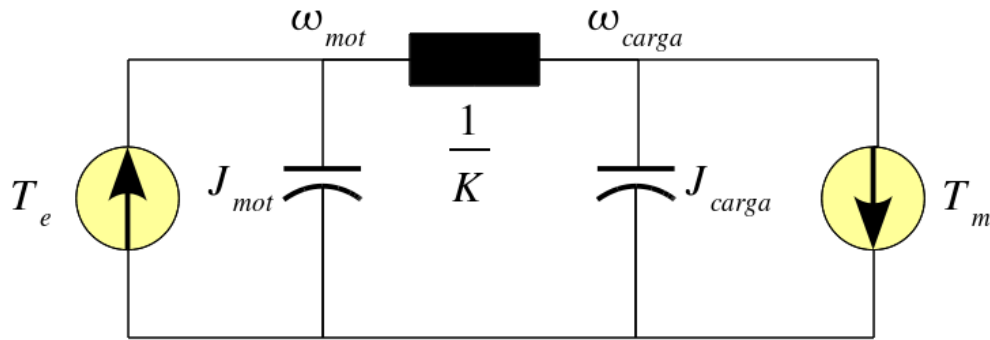


Figura 18.6: Equivalente eléctrico de la figura 18.5

Si el valor de K tiende a infinito (∞), no aparece diferencia de velocidad entre la carga mecánica y el motor y se puede considerar una inercia equivalente (J_{eq}).

$$J_{eq} = J_{mot} + J_{carga} \quad (18.24)$$

18.4. Conversión Entre Sistemas Lineales y Rotatorios

En la figura 18.7, se presenta el esquema de una banda transportadora que relaciona un sistema lineal con el rotatorio de la máquina eléctrica.

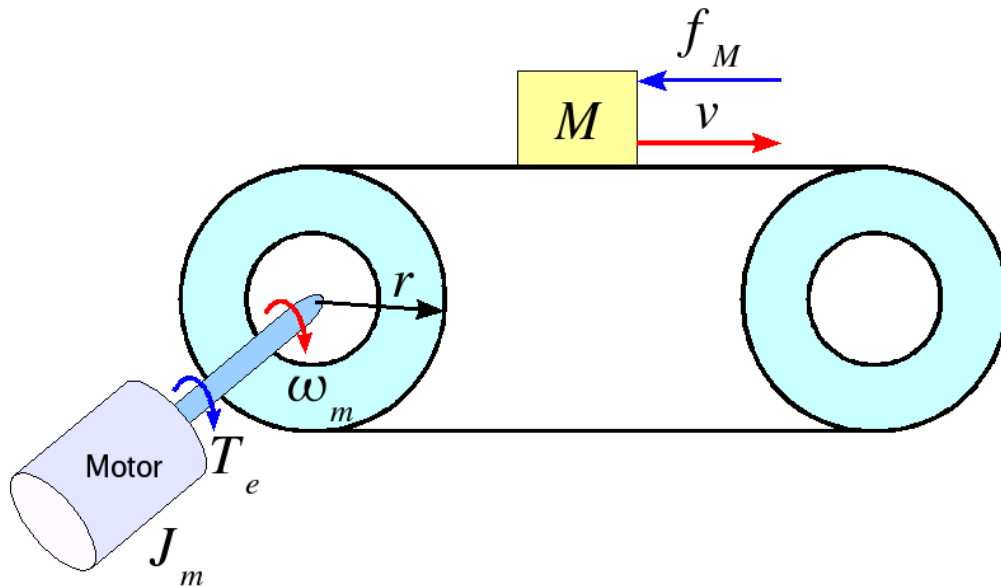


Figura 18.7: Esquema de una banda transportadora

La fuerza y velocidad lineal que debe suministrar el motor a la banda viene dado por la siguiente expresión:

$$f_e = M \frac{dv(t)}{dt} + f_L \quad (18.25)$$

$$v(t) = r\omega_m \quad (18.26)$$

donde:

r	es el radio del rodillo de la banda donde se acopla el motor.
M	la masa transportada.
$v(t)$	la velocidad lineal de la transportadora.
f_L	la fuerza resistente al movimiento.
ω_m	La velocidad angular del motor.

De la ecuación (18.25), se puede calcular el par mecánico entregado por el motor a la banda como:

$$T_m = r \cdot f_e = r^2 M \frac{dv(t)}{dt} + r \cdot f_L \quad (18.27)$$

El par eléctrico total entregado por el motor es la superposición del par mecánico y el par requerido para acelerar el motor.

$$T_e = J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + r^2 M \frac{dv(t)}{dt} + r \cdot f_L \quad (18.28)$$

18.5. Caja de Cambio o Engranajes

La caja de cambio o de engranajes es en la mecánica lo que un transformador es en la electricidad, su funcionamiento es análogo donde: el par es a la corriente y la velocidad es a la tensión. En la figura 18.8, se presenta un esquema de caja de cambio con engranajes circulares ideal.

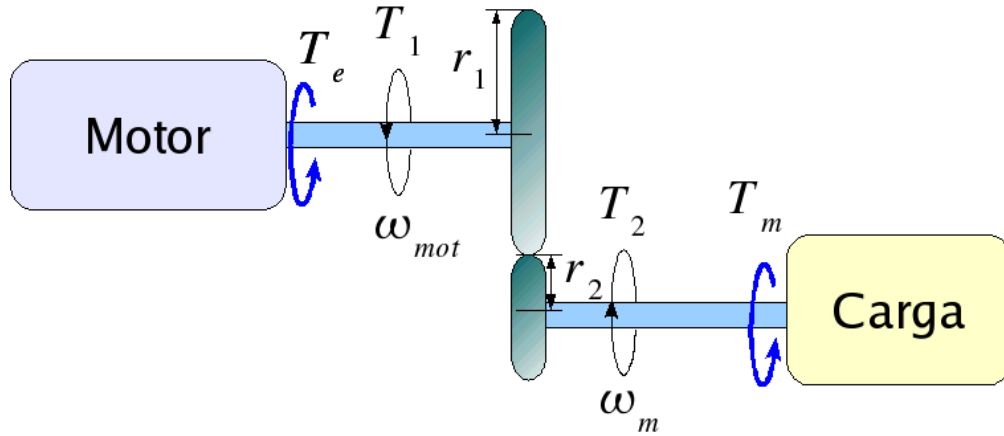


Figura 18.8: Esquema de una caja de cambios

En una caja de cambio la velocidad tangencial en los engranajes cilíndricos es igual, es decir:

$$r_1 \omega_{mot} = r_2 \omega_m \quad (18.29)$$

Si consideramos la caja de cambios ideal, es decir sin pérdidas, la potencia entregada por un engranaje es igual a la potencia del otro.

$$\omega_{mot} \cdot T_1 = \omega_m \cdot T_2 \quad (18.30)$$

Donde:

$$T_1 = T_e - J_{mot} \frac{d\omega_{mot}(t)}{dt} \quad (18.31)$$

$$T_2 = T_m + J_{carga} \frac{d\omega_m(t)}{dt} \quad (18.32)$$

De las expresiones (18.29) y (18.30), se obtiene la siguiente relación de la caja:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_m}{\omega_{mot}} = \frac{T_1}{T_2} \quad (18.33)$$

En conclusión si la velocidad se incrementa el par disminuye y si la velocidad disminuye el par aumenta.

Sustituyendo las expresiones (18.31) y (18.32) en la ecuación (18.30) y utilizando la relación de la caja de cambios (18.33), se obtiene:

$$T_e - T_m \frac{r_1}{r_2} = J_{mot} \frac{d\omega_{mot}(t)}{dt} + \frac{r_1}{r_2} J_{carga} \frac{d\omega_m(t)}{dt} \quad (18.34)$$

Calculando la velocidad angular de la carga de la expresión (18.33), se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_m &= \frac{r_1}{r_2} \omega_{mot} \\ \frac{d\omega_m}{dt} &= \frac{r_1}{r_2} \frac{d\omega_{mot}}{dt} \end{aligned} \quad (18.35)$$

Si se sustituye el resultado de la ecuación (18.35) en la expresión (18.34), se obtiene:

$$T_e - T_m \frac{r_1}{r_2} = J_{mot} \frac{d\omega_{mot}(t)}{dt} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 J_{carga} \frac{d\omega_{mot}(t)}{dt} = \left(J_{mot} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 J_{carga}\right) \frac{d\omega_{mot}(t)}{dt} \quad (18.36)$$

Donde:

$$J_{eq} = J_{mot} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 J_{carga} \quad (18.37)$$

18.6. Características Mecánicas de Operación de un Accionamiento Eléctrico

18.6.1. Par acelerante

Definiendo el par acelerante (T_a) como la diferencia entre el par eléctrico y el mecánico referido al mismo eje, un accionamiento eléctrico puede operar en tres regímenes de operación: aceleración si $T_a > 0$, desaceleración si $T_a < 0$ y en régimen permanente si $T_a = 0$.

$$T_a = T_e - T_m = J_{eq} \frac{d\omega_{mot}(t)}{dt} \quad (18.38)$$

18.6.2. Cuadrantes de Operación de un Accionamiento

En la figura 18.9, se presentan los cuadrantes de operación de un accionamiento eléctrico.

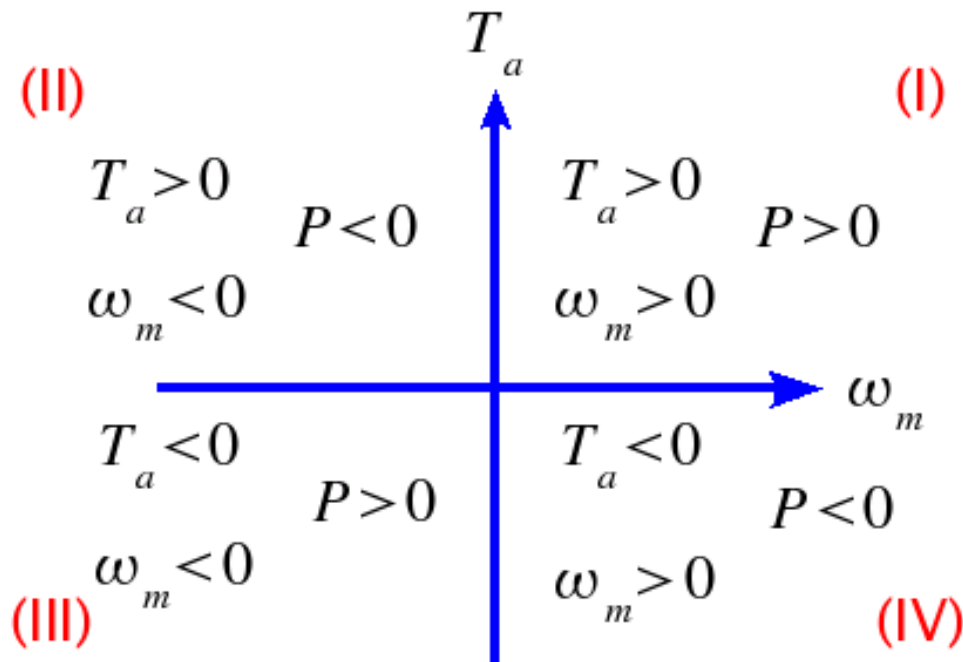


Figura 18.9: Cuadrantes de operación de un accionamiento eléctrico

Una máquina eléctrica funciona como motor cuando desarrolla un par en el mismo sentido que la velocidad de giro. Si se desea que la velocidad de giro pueda invertirse el par ha de hacerlo también (cuadrantes I y III). Sea cual sea el sentido de marcha, si la máquina funciona como motor debe consumir potencia activa del convertidor electrónico.

En muchas aplicaciones existen instantes de tiempo en los cuales la máquina eléctrica ha de desarrollar un par opuesto a la velocidad de giro (cuadrantes II y IV). Cuando la máquina eléctrica desarrolla un par opuesto a la velocidad de giro se dice que funciona en régimen de frenado. En este caso la potencia mecánica es negativa (cuadrantes II y IV).

Se desea reducir de forma rápida la velocidad de giro (por ejemplo cuando un tren llega a una estación). En este caso la velocidad de giro en tracción tiene el mismo sentido que en frenado. La máquina pasaría del cuadrante I al cuadrante IV (o del III al II). Se desea retener un peso en descenso (un tren bajando una cuesta o un peso en una grúa en descenso). En este caso la velocidad de giro en tracción tiene sentido opuesto al de frenado. En tracción la máquina trabajaría en el cuadrante I y en frenado en el cuadrante II. En general el funcionamiento de la máquina en los cuadrantes II y IV se realiza durante tiempos breves (régimenes transitorios), aunque en algún caso podrían ser tiempos elevados (una vagoneta bajando una rampa prolongada).

En funcionamiento como freno la máquina eléctrica desarrolla un par opuesto a la velocidad y por tanto recibe energía mecánica de la carga (el exceso de energía cinética entre dos velocidades o la

energía potencial de un peso en descenso). Para poder frenar se ha de poder convertir esta energía mecánica en otro tipo de energía. Caben tres posibilidades de conversión:

- Convertirla en energía eléctrica y devolverla a la red en condiciones adecuadas (tensión y frecuencia de red).
- Convertirla en energía eléctrica y disipar dicha energía en forma de calor en una resistencia.
- Convertirla en calor en el interior de la máquina.

Lo más racional es devolver energía a la red, pero ello requiere un convertidor reversible, el cual es más caro que uno no-reversible. Para evaluar si vale la pena regenerar energía se ha de tener en cuenta que la energía mecánica puesta en juego depende del momento de inercia total del sistema mecánico (máquina eléctrica más carga), de la velocidad y del número de frenadas por hora, y por otra, la existencia o no de consumidores cercanos que puedan usar dicha energía. En los trenes de largo recorrido los convertidores no son reversibles: el tren realiza pocas paradas y en general no existen trenes cercanos al que está frenando. Por el contrario, en los trenes de cercanías (o metros) se recupera la energía, ya que el tren efectúa numerosas paradas y existen muchas unidades en un determinado tramo de vía.

El frenado eléctrico no siempre es necesario, y se puede recurrir a un freno mecánico o al frenado libre. En ocasiones lo que se precisa es un frenado suave, de forma que la máquina desarrolle un par en el mismo sentido del movimiento pero de valor inferior al demandado por la carga mecánica que impida la frenada brusca (es el caso de cintas transportadoras o para evitar el golpe de ariete en válvulas).

18.6.3. Par Resistente

El par resistente que opone la carga a ser movida es, en general, una función de la velocidad de giro (en algunos casos también depende de la posición, como es el caso de un muelle). Los pares resistentes pueden ser clasificados en cuatro categorías:

- Pares invariables con la velocidad ($T_m = k_0$).
 - Extrusoras, bombas y compresores de émbolo con presión constante: puede ser un par oscilante en el tiempo. Trabajan en un sólo cuadrante.
 - Grúas (elevación): cuatro cuadrantes (en el II cuadrante en régimen transitorio). En el III cuadrante para bajar a gran rapidez. Habitualmente tienen un contrapeso. Requieren un freno mecánico. El par que ofrecen es la suma de un término constante y una fricción viscosa, pero de forma simplificada se puede despreciar este último término, especialmente a bajas velocidades.

- Cintas transportadoras (transporte horizontal), trenes de laminación, cepillos, cilindros de laminación, molinos de bolas, máquinas y herramientas con fuerza de corte constante (tornos) y en general mecanismos en los que prevalece el rozamiento sólido (guía que se traslada, carretilla).
 - Cabestrante: se exige que el motor pueda desarrollar par nominal en reposo. Funciona en los cuadrantes I y IV. El control ha de ser de par.
- Pares linealmente dependientes de la velocidad ($T_m = k_1 \omega_m$).
- Calandrias con rozamiento viscoso (máquinas para alisado de tejidos y papel), exprimidores, lavadoras.
 - Pulidoras
 - Frenos de Foucault
- Pares que dependen del cuadrado de la velocidad ($T_m = k_2 \omega_m^2$).
- Bombas centrífugas, ventiladores, compresores de émbolo trabajando en una red abierta de tuberías. Trabajan en el primer cuadrante. Con una pequeña reducción de velocidad se puede variar mucho el caudal.
 - Máquinas en las que predomina el efecto centrífugo
- Pares que dependen inversamente de la velocidad ($T_m = \frac{k_3}{\omega_m}$).
- Bobinadoras: posibilidad de oscilación del sistema mecánico. Enrollado (papel, hilo, otros).

La ecuación general de par resistente es:

$$T_m = k_0 + k_1 \omega_m + k_2 \omega_m^2 + \frac{k_3}{\omega_m} \quad (18.39)$$

En la figura 18.10, se presentan dos ejemplos de par resistente, para una función cuadrática y para una inversamente proporcional a la velocidad en función de la velocidad angular.

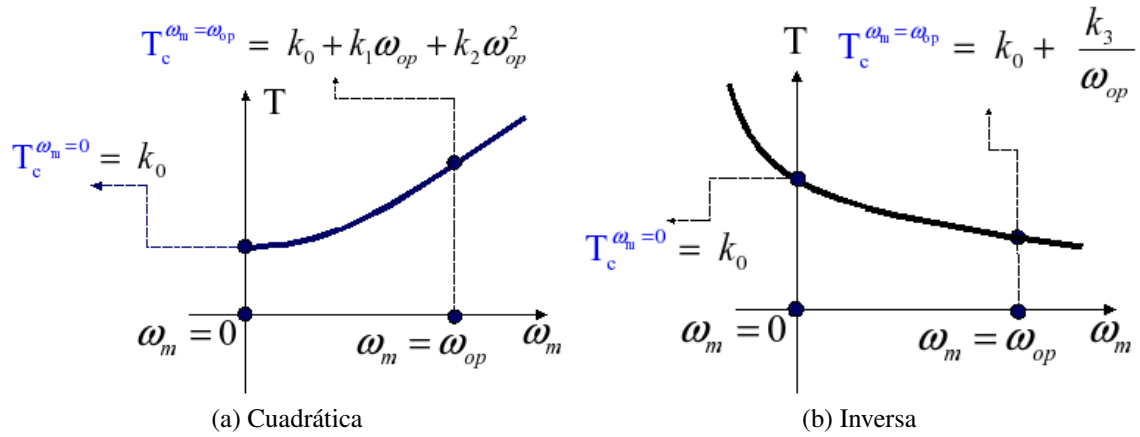


Figura 18.10: Características par resistente velocidad

Máquina de Corriente Continua

19.1. Principio de Funcionamiento

El principio de funcionamiento de las máquinas eléctricas rotativas es muy sencillo, y se basa en alineación de campos magnéticos entre un sistema fijo en el espacio denominado "estator" y uno con movilidad rotacional denominado "rotor". En la figura 19.1, se presenta un esquema de este principio de funcionamiento en la figura 19.1(a) tenemos un imán en forma de "U" que produce líneas de campo magnético entre su norte y sur en dirección horizontal. Se introduce un imán en forma de "I", pivotado en el centro para permitir su rotación con su norte y sur alineados con respecto a la vertical. La atracción magnética entre el norte y sur de ambos imanes ocasiona un giro de $\pi/2$ del imán pivotado para alinear los polos magnéticos como se muestra en la figura 19.1(b).

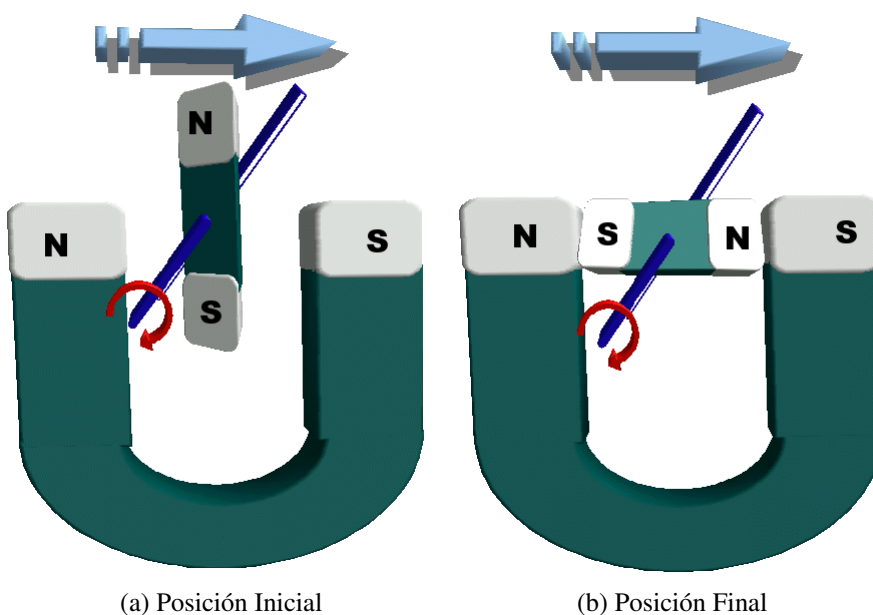


Figura 19.1: Principio de funcionamiento de las máquinas eléctricas rotativas

Bajo este principio funcionan las máquinas eléctricas rotativas, pero en vez de utilizar imanes se utilizan electroimanes para aumentar la intensidad del campo magnético resultante. En una máquina de corriente continua el imán en forma de "U" se remplaza con un circuito magnético como el mostrado en la figura 19.2, este circuito se alimenta desde una fuente de corriente continua produciendo líneas de campo magnético sobre la horizontal. Adicionalmente, se destaca el sistema de alimentación del rotor a través de contactos deslizantes denominados "escobillas".

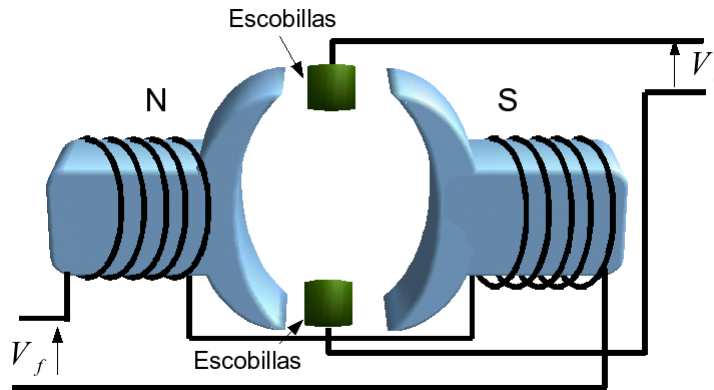


Figura 19.2: Esquema del circuito magnético del estator

El imán en forma de "I" se remplazara por el circuito magnético de la figura 19.3, este circuito esta conformado por dos bobinas de alimentación dispuestas una a $\pi/2$ de la otra.

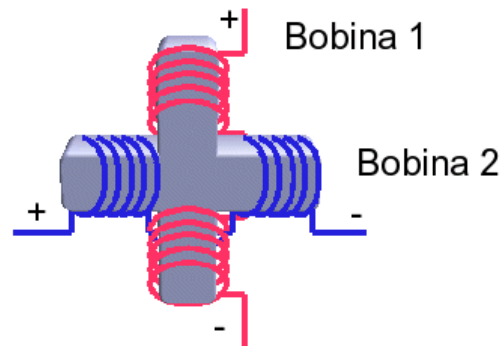


Figura 19.3: Esquema del circuito magnético del rotor

Al introducir esta pieza en el circuito magnético de la figura 19.2, la bobina un se energiza a través de los contactos deslizantes, produciendo un enlace de flujo en la pieza, ocasionando la aparición de un norte y sur magnético en la vertical, el cual trata de alinearse con el producido por el enlace de flujo del estator en la horizontal. Este fenómeno ocasiona que la pieza de la figura 19.3 gire $\pi/2$ con la finalidad de alinear los campos. Al girar el rotor la bobina 1 se desenergiza, mientras la bobina 2 queda alimentada por los contactos deslizantes repitiéndose el proceso. En la figura 19.4, se ilustra el proceso que ocasiona que la máquina comience a rotar. El contacto entre las bobinas

del rotor y las escobillas de alimentación se denomina "delga" y el conjunto de estas conforman el colector de la máquina.

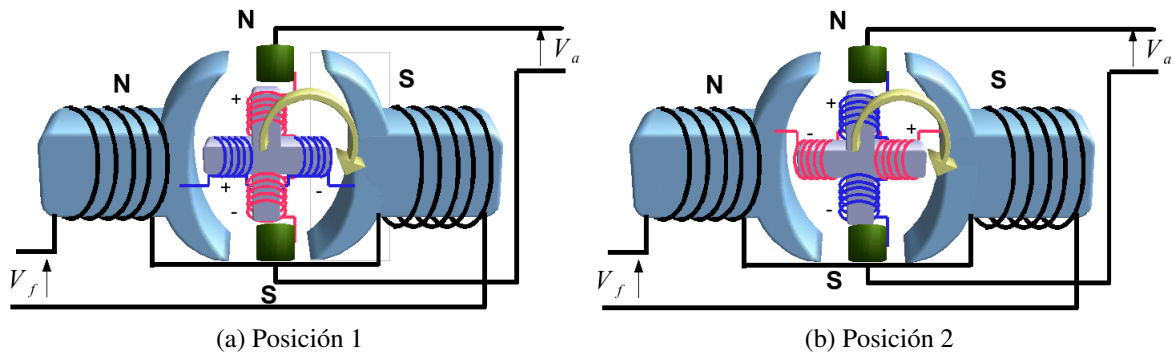


Figura 19.4: Esquema de rotación de la máquina eléctrica

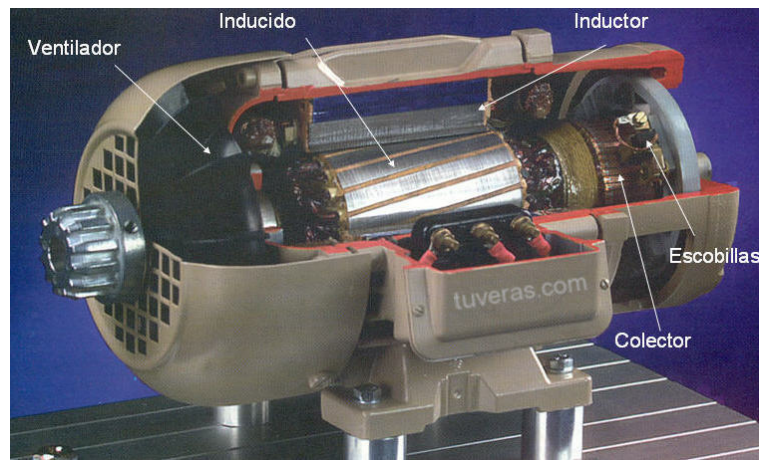
Si se analiza las corrientes en las bobinas del rotor, se puede observar que la corriente por cada bobina que lo conforma, depende de la posición angular del rotor variando desde valores positivos a negativos, es decir, la corriente en las bobinas del rotor es alterna a una frecuencia eléctrica igual a la velocidad de rotación de la máquina (ω_m). Esto se debe a que las escobillas en conjunto a las delgas, que conforman el colector de la máquina realizan un proceso de inversión mecánica de la alimentación del circuito de rotor.

Para que una máquina eléctrica produzca par promedio diferente de cero, se requiere por lo menos dos enlaces de flujo magnético (λ) desfasados en tiempo y espacio. En la máquina de corriente continua el enlace de flujo del estator (λ_e) es continua y se encuentra espacialmente sobre la horizontal, mientras que el enlace de flujo del rotor (λ_r) está sobre la vertical y es alterno, de esta forma se cumple la condición necesaria para obtener par promedio diferente de cero.

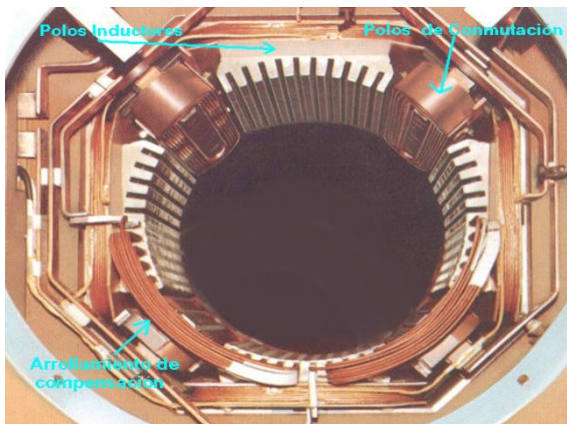
En las máquinas de corriente continua generalmente al circuito de campo se denomina "*Campo*" y se representa con la letra "*f*", mientras que el rotor se denomina "*Armadura*" y se representa con la letra "*a*". En la figura 19.5 se observan las partes que conforman una máquina de corriente continua, su campo y armadura.

19.2. Modelo de la Máquina de Corriente Continua

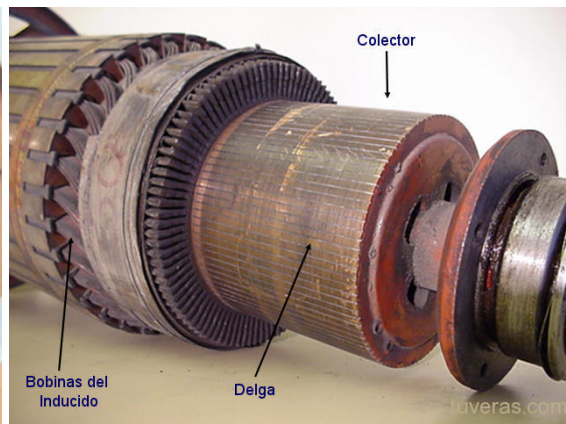
En la figura 19.6, se presenta un esquema de una máquina de corriente continua, esta máquina está compuesta por dos ejes eléctricos (armadura y campo) y un eje mecánico.



(a) Máquina DC



(b) Campo



(c) Armadura

Figura 19.5: Máquina de corriente continua

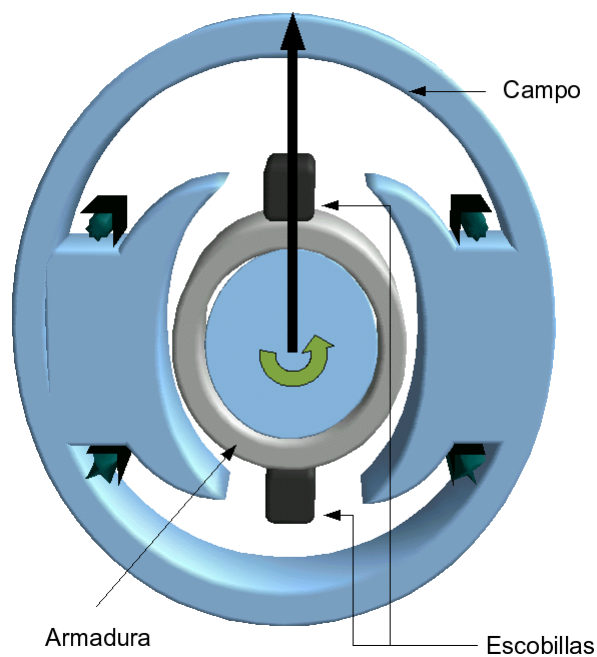


Figura 19.6: Esquema de la máquina de corriente continua

Las ecuaciones generales que describen el comportamiento de la máquina de eléctricas rotativas son las de la fuerza electromotriz en los terminales eléctricos y la ecuación de Newton en los terminales mecánicos:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}] &= [\mathbf{R}] [\mathbf{i}] + p ([\mathbf{L}] [\mathbf{i}]) \\ J \frac{d\omega_m}{dt} &= T_e - T_m \end{aligned} \quad (19.1)$$

Donde:

$$p = \frac{d}{dt}$$

La ecuación de los terminales eléctricos de la expresión (19.1), se puede descomponer en:

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{R}] [\mathbf{i}] + [\mathbf{L}] p [\mathbf{i}] + \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{L}] [\mathbf{i}] \quad (19.2)$$

$$[\mathbf{v}] = ([\mathbf{R}] + [\mathbf{L}] p + \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{L}]) [\mathbf{i}]$$

En el caso de la máquina de corriente continua se tienen tantas ecuaciones eléctricas como terminales eléctricos estén presentes en el circuito. Las ecuaciones del modelo de la máquina de corriente continua son:

$$\begin{bmatrix} v_f \\ v_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f + L_f p & 0 \\ \omega_m L_{fa} & R_a + L_a p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_a \end{bmatrix} \quad (19.3)$$

$$J p \omega_m = L_{fa} i_f i_a - T_m$$

Donde:

R_a es la resistencia del devanado de armadura.

R_f es la resistencia del devanado de campo.

L_a es la inductancia propia del devanado de armadura.

L_f es la inductancia propia del devanado de campo.

L_{fa} es la inductancia mutua entre el devanado de campo y armadura

La expresión matricial (19.3), se puede escribir para cada uno de los circuitos como:

$$\begin{aligned} v_f &= R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \\ v_a &= R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + \omega_m L_{fa} i_f \end{aligned} \quad (19.4)$$

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = L_{fa} i_f i_a - T_m$$

En la figura 19.7, se presenta el circuito equivalente de la máquina de corriente continua. Algunos autores denominan a la inductancia mutua ente el devanado de campo y armadura (L_{fa}) como "G". El término $\omega_m L_{fa} i_f$ corresponde a la fuerza electromotriz inducida en la armadura de la máquina (E).

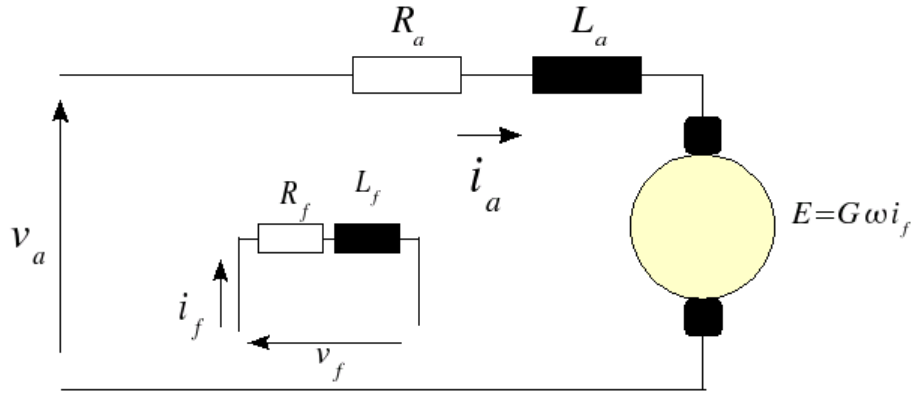


Figura 19.7: Modelo de la máquina de corriente continua

La expresión (19.4), es válida para cualquier tipo de alimentación y se le conoce como modelo dinámico de la máquina de corriente continua. En régimen permanente con alimentación en tensión continua en los devanados de armadura y campo, es decir $p = 0$, el sistema de ecuaciones 19.4, se reduce a:

$$V_f = R_f I_f$$

$$V_a = R_a I_a + \omega_m G I_f \quad (19.5)$$

$$G I_f I_a = T_m$$

Al sistema de ecuaciones (19.5), se le conoce como el modelo en régimen permanente de la máquina de corriente continua.

19.3. Determinación de los Parámetros del Modelo de la Máquina de Corriente Continua

Toda máquina eléctrica posee una placa de identificación en su chasis con la información de su punto nominal. Este punto es a aquel que el fabricante garantiza que la máquina alcanza su temperatura de operación, sin deterioro de su vida útil. Generalmente, los datos de corriente son los más importantes debido a que determinan directamente el calentamiento de la máquina. Recordando

que los equipos de baja tensión deben por normativa internacional estar aislados en un kilo voltio más dos veces su tensión de operación. Los datos que figuran en la placa son:

- Tensión nominal del circuito de campo (V_{fn}).
- Tensión nominal del circuito de armadura (V_{an}).
- Corriente nominal del circuito de campo (I_{fn}).
- Corriente nominal del circuito de armadura (I_{an}).
- Potencia de salida en el eje de la máquina (P_s).
- Velocidad mecánica nominal (ω_{mn}).

Generalmente, estos valores se encuentran dados en el sistema internacional de medida, "MKS", con la salvedad de la velocidad que viene dada es revoluciones por minuto. El factor de conversión de rpm a rad/s es:

$$\omega_m \left(\frac{rad}{s} \right) = \frac{\pi}{30} \omega_m (rpm) \quad (19.6)$$

Otro factor importante en conocer es el de HP a kW , el cual se presenta en la expresión :

$$P_s (kW) = 0,746 P_s (HP) \quad (19.7)$$

De los datos de placa se pueden calcular los parámetros del modelo de la máquina de corriente continua como:

$$R_f = \frac{V_{fn}}{I_{fn}} \quad (19.8)$$

$$E_n = \frac{P_s}{I_{an}} \quad (19.9)$$

$$G = \frac{E_n}{\omega_n I_{fn}} \quad (19.10)$$

$$R_a = \frac{V_{an} - E_n}{I_{an}} \quad (19.11)$$

Para determinar las inductancias propias del circuito de campo y armadura se realiza a partir de la medición de la constante de tiempo de cada uno de los circuitos.

$$L_f = R_f \tau_f \quad (19.12)$$

$$L_a = R_a \tau_a \quad (19.13)$$

19.4. Tipos de Conexión de la Máquina de Corriente Continua

19.4.1. Conexión Independiente

En esta conexión los circuitos de armadura y campo se alimentan de fuentes continuas independientes generalmente de tensiones distintas ($V_f \neq V_a$). El esquema eléctrico de esta conexión es el mostrado en la figura 19.7. En esta condición la corriente de armadura y campo se pueden calcular, utilizando las expresiones del sistema de ecuación (19.5), como:

$$I_f = \frac{V_f}{R_f} \quad (19.14)$$

$$I_a = \frac{V_a - G \omega_m I_f}{R_a} \quad (19.15)$$

Sustituyendo las expresiones (19.14) y (19.15) en la ecuación del par eléctrico se obtiene:

$$T_e = G I_f I_a$$

$$T_e = G \left[\frac{V_f}{R_f} \right] \left[\frac{V_a - G \omega_m \frac{V_f}{R_f}}{R_a} \right] \quad (19.16)$$

$$T_e = \frac{G V_f}{R_f R_a} \left[V_a - G \omega_m \frac{V_f}{R_f} \right]$$

Del resultado de la ecuación (19.16), se puede calcular el par de arranque de la máquina (T_{arr}) que corresponde a velocidad mecánica igual a cero y la velocidad sincrónica (ω_s) que corresponde a par eléctrico igual a cero.

$$T_{arr} = \frac{G V_f V_a}{R_f R_a} \quad (19.17)$$

$$\omega_s = \frac{V_a R_f}{G V_f} \quad (19.18)$$

En la figura 19.8, se presenta la curva par velocidad de la máquina de corriente continua en conexión independiente. La velocidad de operación para un requerimiento específico de par mecánico se obtiene de la intersección de la característica de par mecánico y par eléctrico para una tensión de alimentación de armadura y campo específica.

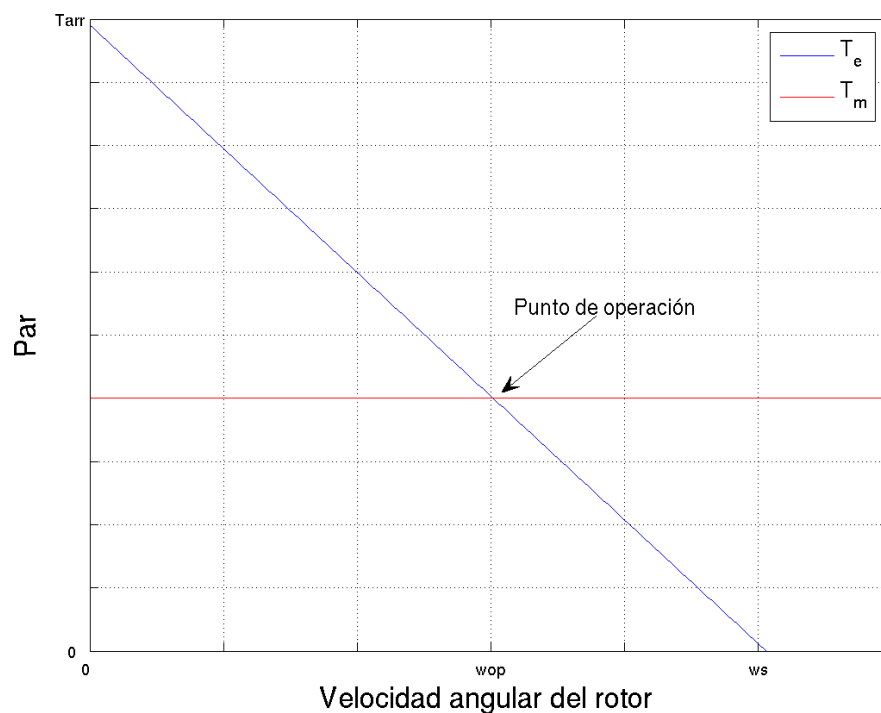


Figura 19.8: Curva par velocidad de la MCC en conexión independiente

Para controlar la velocidad de un accionamiento mecánico ante variaciones de carga, se puede variar la tensión de armadura o campo de forma de desplazar la curva de par velocidad a punto específico de velocidad. En la figura 19.9, se presenta como ante variaciones de la tensión de armadura la característica de la figura 19.8, se desplaza en rectas paralelas, mientras que ante variaciones de la tensión de campo cambia su inclinación. A través, de las variaciones de la tensión de armadura y campo se puede controlar la velocidad de la máquina para un requerimiento de par mecánico específico.

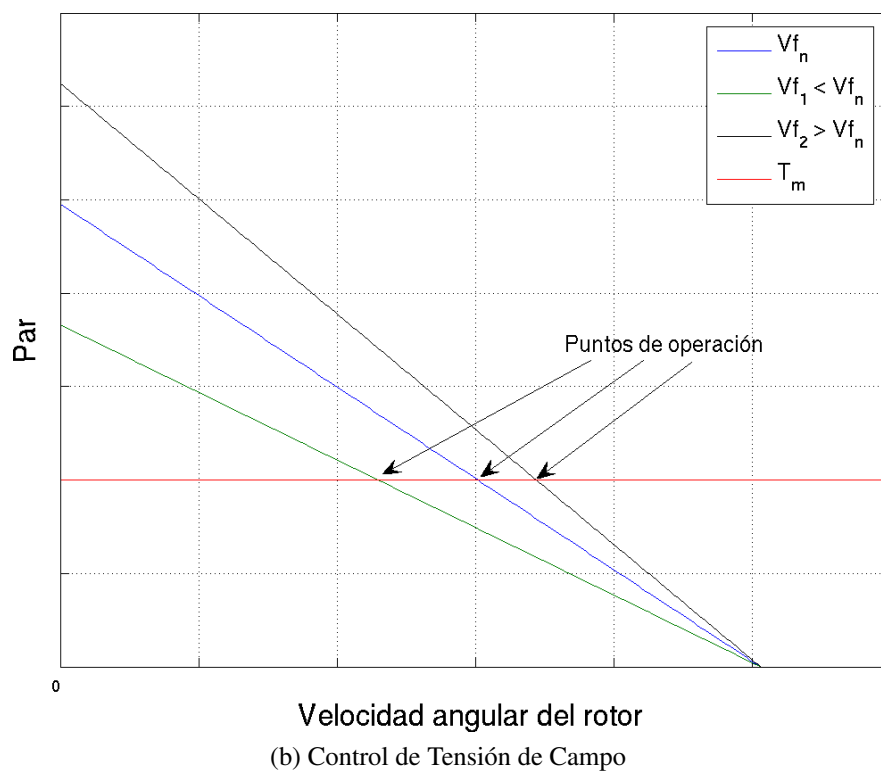
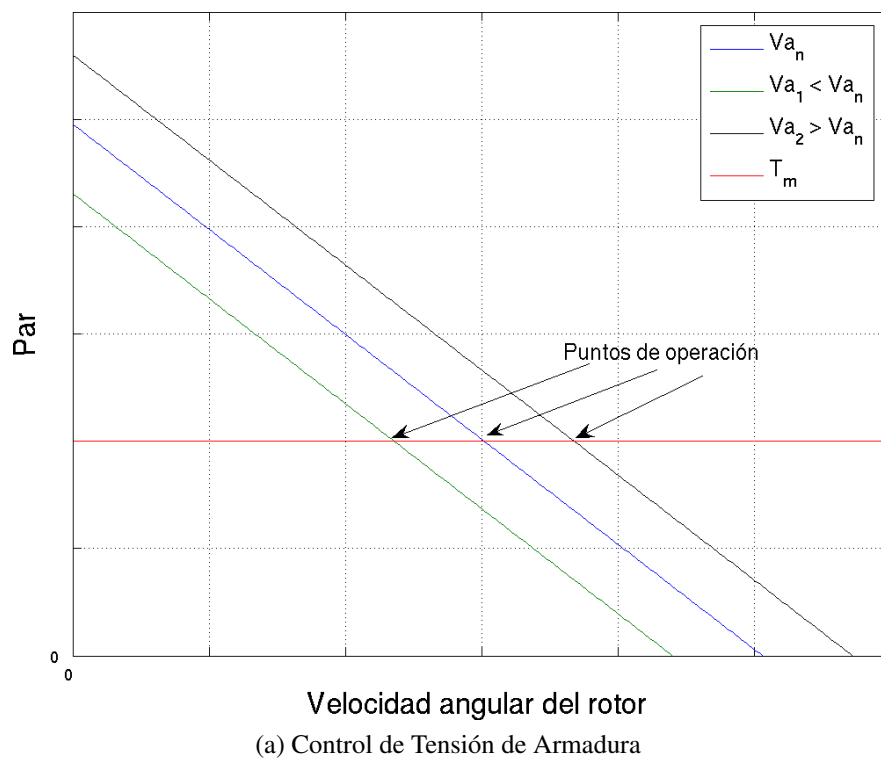


Figura 19.9: Control de velocidad de la MCC en conexión independiente

19.4.2. Conexión Paralelo

En esta conexión los circuitos de armadura y campo se alimentan de la misma fuentes continua ($V = V_f = V_a$), la corriente que suministra esta fuente corresponde a la sumatoria de la corriente de armadura y campo de la máquina. El esquema eléctrico de esta conexión es el mostrado en la figura 19.10.

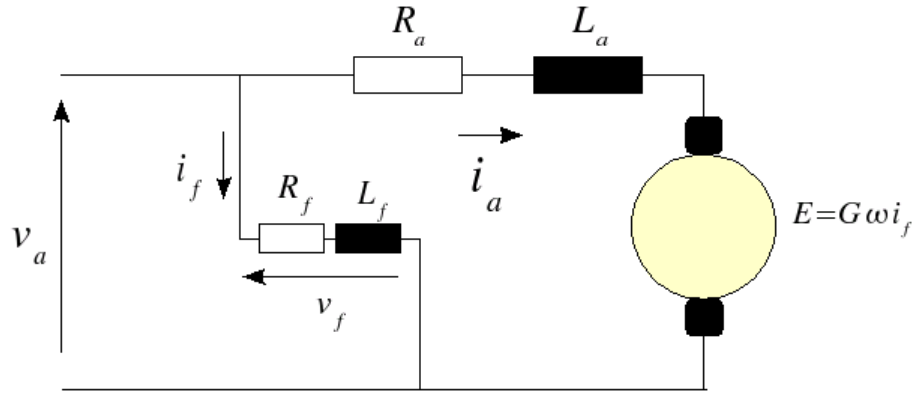


Figura 19.10: Modelo eléctrico de la MCC conexión paralelo

En esta condición la corriente de armadura y campo se pueden calcular, utilizando las expresiones del sistema de ecuación (19.5), como:

$$I_f = \frac{V}{R_f} \quad (19.19)$$

$$I_a = \frac{V - G \omega_m I_f}{R_a} \quad (19.20)$$

Sustituyendo las expresiones (19.19) y (19.20) en la ecuación del par eléctrico se obtiene:

$$T_e = G I_f I_a$$

$$T_e = G \left[\frac{V}{R_f} \right] \left[\frac{V - G \omega_m \frac{V}{R_f}}{R_a} \right] \quad (19.21)$$

$$T_e = \frac{GV^2}{R_f R_a} \left[1 - G \frac{\omega_m}{R_f} \right]$$

Del resultado de la ecuación (19.21), se puede calcular el par de arranque de la máquina (T_{arr}) que corresponde a velocidad mecánica igual a cero y la velocidad sincrónica (ω_s) que corresponde a par eléctrico igual a cero.

$$T_{arr} = \frac{GV^2}{R_f R_a} \quad (19.22)$$

$$\omega_s = \frac{R_f}{G} \quad (19.23)$$

En la figura 19.11, se presenta la curva par velocidad de la máquina de corriente continua en conexión paralelo. La velocidad de operación para un requerimiento específico de par mecánico se obtiene de la intersección de la característica de par mecánico y par eléctrico para una tensión de alimentación específica.

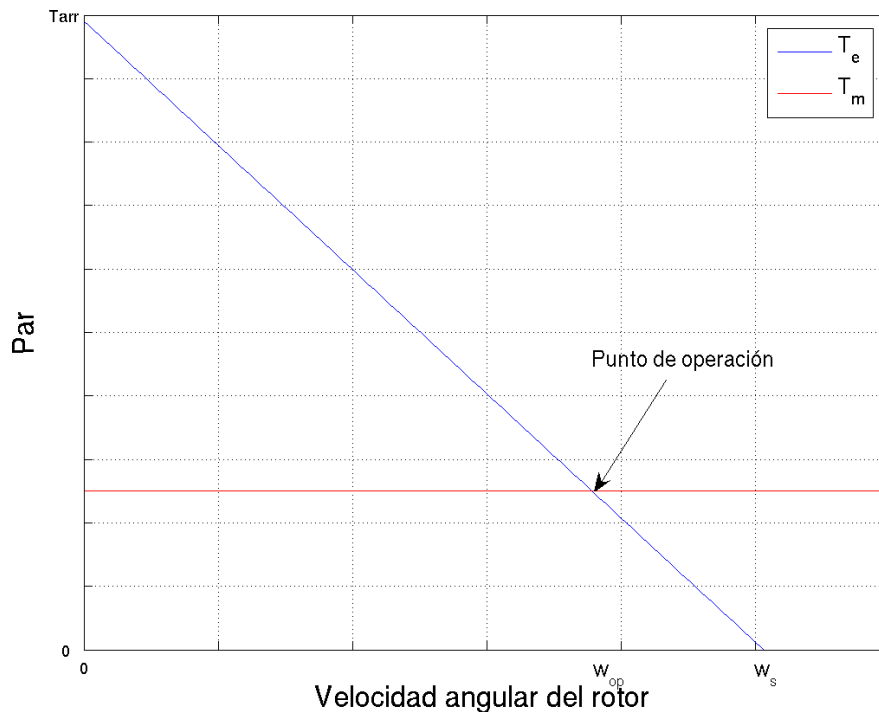


Figura 19.11: Curva par velocidad de la MCC en conexión paralelo

Para controlar la velocidad de un accionamiento mecánico ante variaciones de carga, se puede variar la tensión de alimentación, de forma de desplazar la curva de par velocidad a punto específico de velocidad. En la figura 19.12, se presenta como ante variaciones de la tensión de alimentación la característica de la figura 19.11, cambia su inclinación. En este caso al utilizar una sola fuente de alimentación se pierde un grado de libertad con respecto al control de la máquina en conexión independiente.

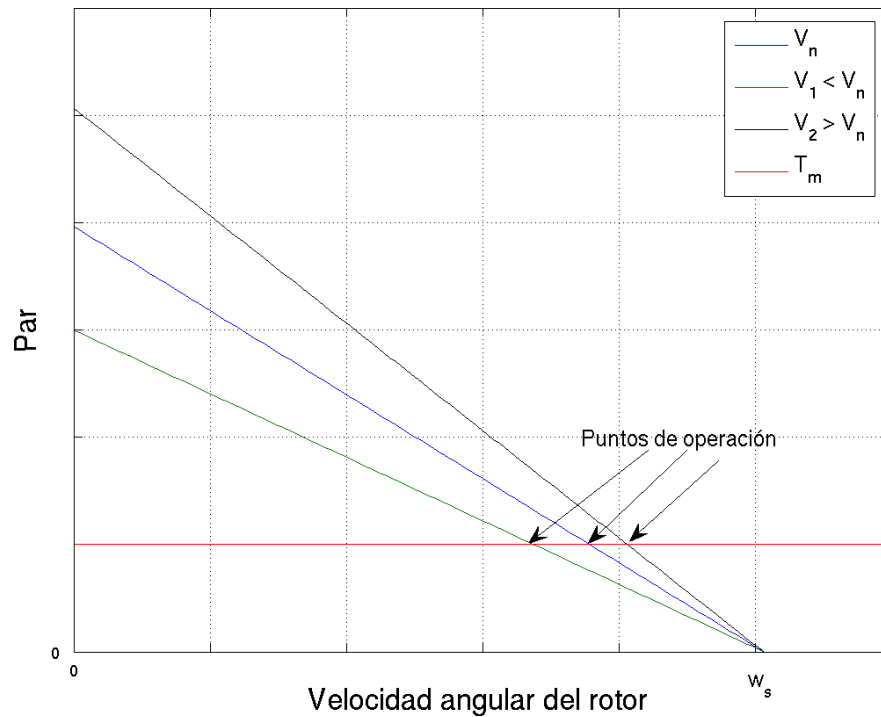


Figura 19.12: Control de velocidad de la MCC en conexión paralelo

19.4.3. Conexión Serie

En esta conexión los circuitos de armadura y campo se alimentan de la misma fuente continua ($V = V_f + V_a$), la corriente al estar conectados en serie es la misma para ambos circuitos ($I = I_a = I_f$). El esquema eléctrico de esta conexión es el mostrado en la figura 19.13.

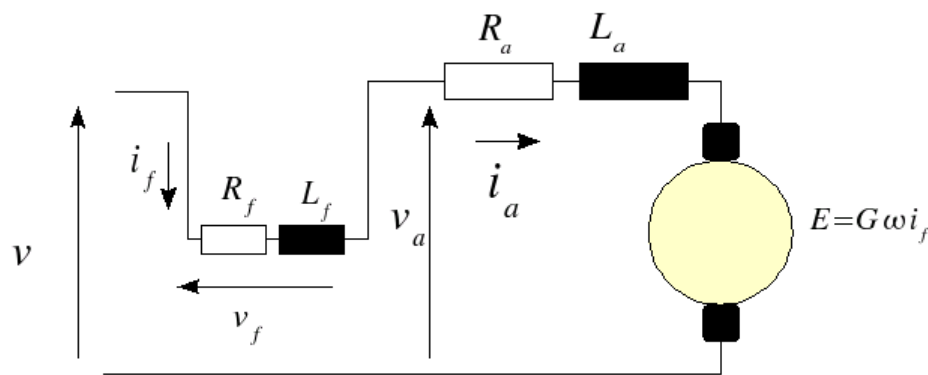


Figura 19.13: Modelo eléctrico de la MCC conexión serie

En esta condición la corriente del circuito se pueden calcular como:

$$I = I_f = I_a = \frac{V}{R_f + R_a + G \omega_m} \quad (19.24)$$

Sustituyendo la expresión 19.24 en la ecuación del par eléctrico se obtiene:

$$T_e = GI_f I_a = GI^2 \quad (19.25)$$

$$T_e = \frac{GV^2}{(R_f + R_a + G\omega_m)^2}$$

Del resultado de la ecuación (19.25), se puede calcular el par de arranque de la máquina (T_{arr}) que corresponde a velocidad mecánica igual a cero como:

$$T_{arr} = \frac{GV^2}{(R_f + R_a)^2} \quad (19.26)$$

La velocidad sincrónica de esta máquina en la cual se alcanza par eléctrico igual a cero no está definida y tiende a infinito ($\omega_s = \infty$) ya que para esta velocidad se anula el resultado de la expresión (19.25). En la figura 19.14, se presenta la curva par velocidad de la máquina de corriente continua en conexión serie. La velocidad de operación para un requerimiento específico de par mecánico se obtiene de la intersección de la característica de par mecánico y par eléctrico para una tensión de alimentación específica.

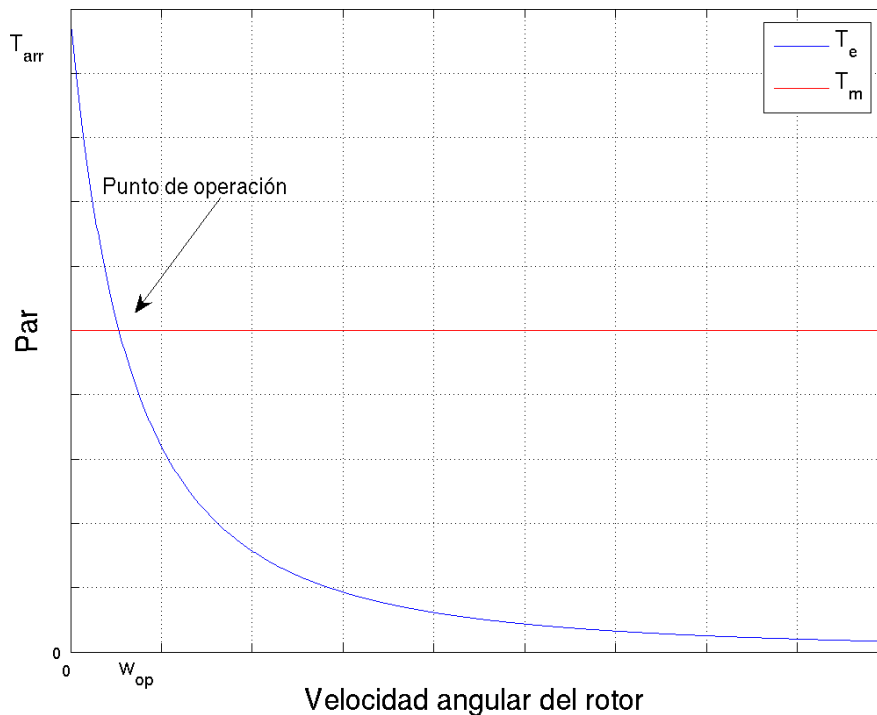


Figura 19.14: Curva par velocidad de la MCC en conexión serie

Para controlar la velocidad de un accionamiento mecánico ante variaciones de carga, se puede variar la tensión de alimentación, de forma de desplazar la curva de par velocidad a punto específico de velocidad como se muestra en la figura 19.15. En este caso al utilizar una sola fuente

de alimentación se pierde un grado de libertad con respecto al control de la máquina en conexión independiente.

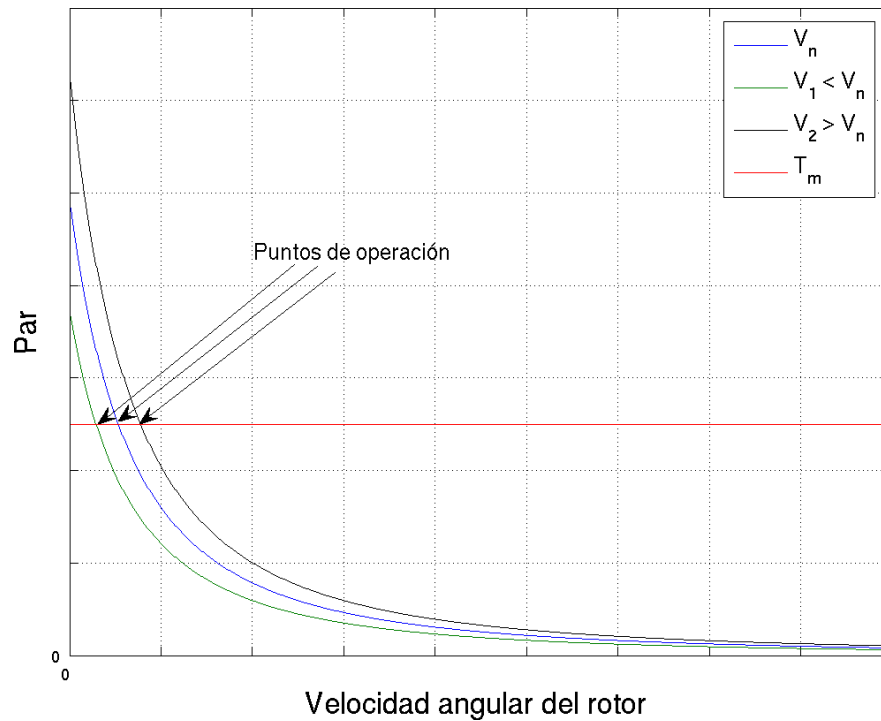


Figura 19.15: Control de velocidad de la MCC en conexión serie

19.5. Accionamiento de las Máquinas de Corriente Continua

Los accionamientos de la máquina de corriente continua deben presentar la característica de par, flujo y fuerza electromotriz en función de la velocidad, mostrada en la figura 19.16 para cada uno de los cuadrantes de operación del convertidor electromecánico. En esta característica de accionamiento el par se mantiene constante mientras la tensión de armadura alcanza su valor régimen, este proceso se realiza limitando el valor de la corriente de armadura al nominal, mediante el control de la tensión.

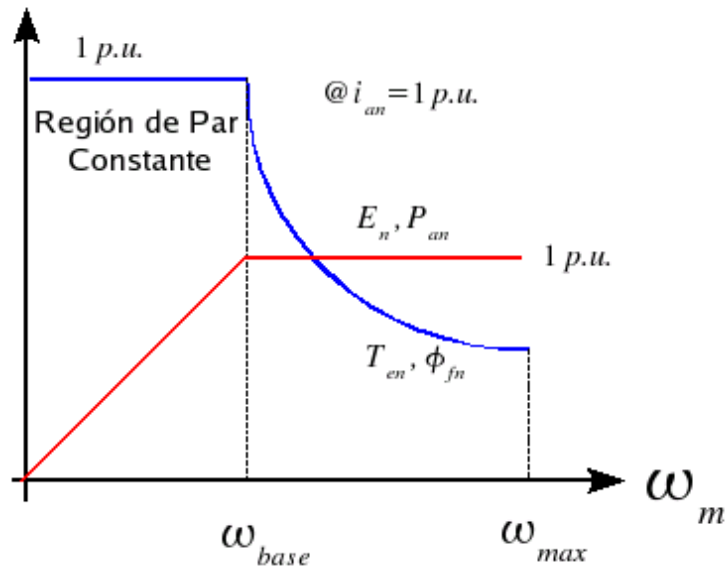


Figura 19.16: Característica de accionamiento de la máquina de corriente continua

En la figura 19.17, se presenta el esquema de accionamiento de una máquina de corriente continua en lazo cerrado con realimentación en corriente.

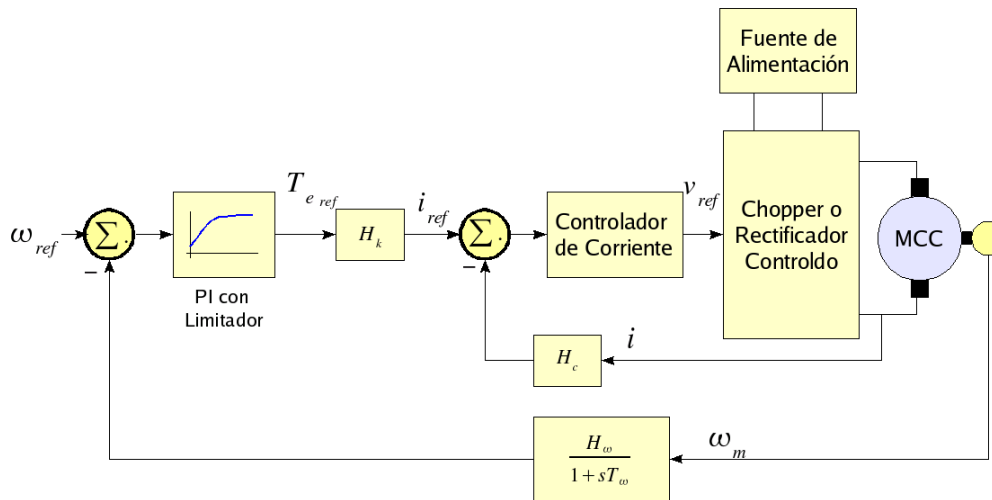


Figura 19.17: Accionamiento de la máquina de corriente continua.

La fuente de alimentación puede ser en corriente alterna o continua, el controlador de velocidad combina las funciones de un controlador PI con limitación. Este accionamiento limita la corriente en el circuito de armadura de la máquina a 1,5 veces la corriente nominal del devanado.

En las figuras 19.18 y 19.19 se presenta la respuesta de la máquina de corriente continua controlada con el esquema de la figura 19.17 ante una consigna de velocidad constante y toma de carga para una máquina de corriente continua de 5 HP, con un rectificador monofásico controlado como convertidor, desde un sistema de 220V a frecuencia industrial de 60Hz.

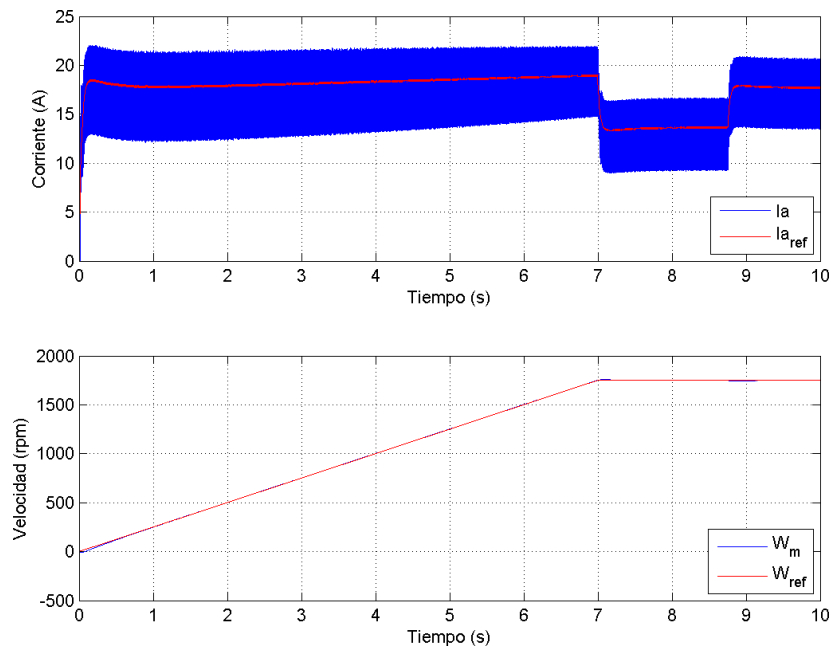


Figura 19.18: Corriente de armadura y velocidad mecánica

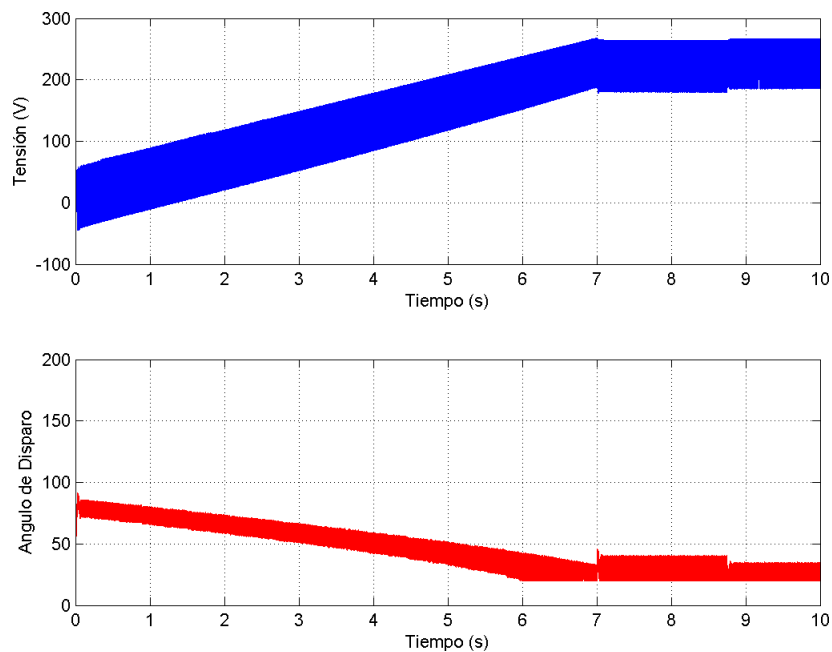


Figura 19.19: Tensión de armadura y ángulo de disparo del rectificador

En las figuras 19.20 y 19.21 se presenta la respuesta de la maquina de corriente continua controlada con el esquema de la figura 19.17 ante una variación de velocidad para una máquina de corriente continua de 5 HP , con un chopper tipo “ A” como convertidor desde un sistema de corriente continua de 280V.

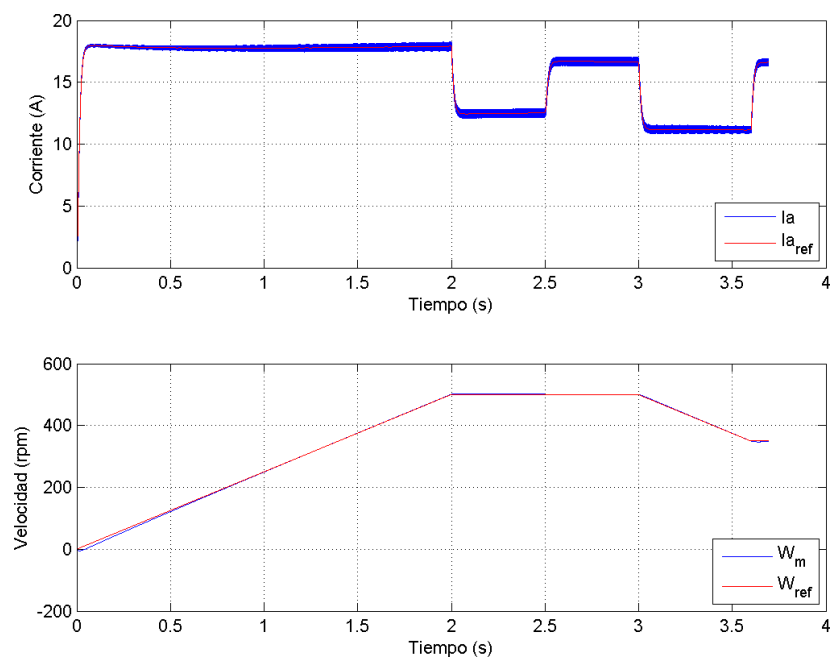


Figura 19.20: Corriente de armadura y velocidad mecánica

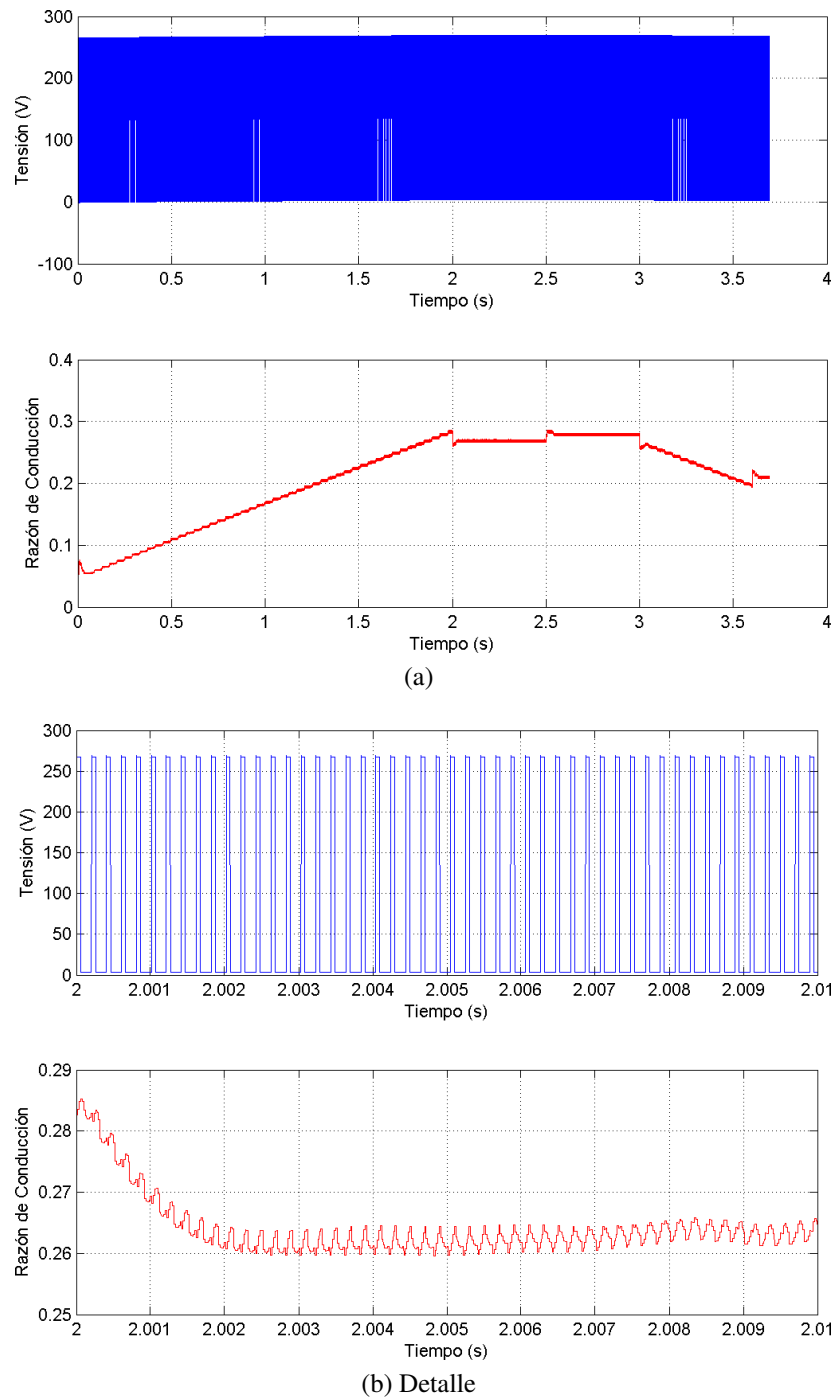


Figura 19.21: Tensión de armadura y razón de conducción del chopper

19.6. Ejercicios

1. Una máquina de corriente continua, posee los siguientes datos nominales: $V_a = 230V$; $P_s = 5,6kW$; $I_a = 27A$; $L_a = 15mH$; Perdidas del Campo $150W$; $n = 2500rpm$; $V_f = 230V$. La máquina acciona un montacargas a una velocidad de $72km/h$ y desarrolla una potencia de

5,0 kW durante su operación al levantar la carga. El montacargas está acoplado al motor por una polea circular de área $8,5085\text{m}^2$ y una caja de cambio de relación 21 : 1. El sistema de alimentación disponible es trifásico de $416\text{V} @ 60\text{Hz}$.

- a) Determine la velocidad, par mecánico en el eje y motor. Masa total levantada por el montacargas y % de carga en campo y armadura.
 - b) Si la máquina se alimenta por el campo y la armadura con un rectificador trifásico. Determine α del puente si el sistema alterno posee una inductancia de dispersión de 15mH por fase. Determine el tiempo de conmutación. Es posible mantener esta condición de operación. Si no puede mantener la condición de operación que acción tomaría.
 - c) Si se alimenta el campo con un rectificador monofásico conectado línea a línea con un ángulo de disparo de $\pi/3$. Determine la constante de tiempo mínima que debe poseer el campo para garantizar condición continuada.
 - d) Si la máquina se alimenta por el campo y la armadura con dos rectificadores monofásico conectado línea a línea. Determine el ángulo de disparo del puente si el sistema alterno posee una inductancia de dispersión de 17mH . Asuma que la constante de tiempo del Campo es de 15mseg . Demuestre la condición de operación de ambos puentes.
2. Un tranvía eléctrico posee cuatro (4) motores de corriente continua, uno en cada rueda con los siguientes datos nominales: $V_a = 230\text{V}$, $I_a = 30\text{A}$, $V_f = 230\text{V}$, $I_f = 4,8\text{A}$, $P_s = 5,4\text{kW}$ y $n = 1750\text{rpm}$. El banco de motores es alimentado por un chopper a transistores Tipo A desde un riel de 400V . DC. El banco de motores se conectan dos en paralelo y dos independientes, alimentados en el campo por un chopper auxiliar de razón de conducción de 0,6. El vehículo tiene una masa total de $0,9\text{Ton}$ y puede transportar cuatro pasajeros y un chófer de peso aproximado de 75kg c/u. El diámetro de la rueda es de $0,80\text{m}$ y estas están acopladas al eje de la máquina a través de un caja de cambio de relación 4 : 1.
- a) Calcule la razón de conducción del chopper si el vehículo sube un pendiente del 10% con una velocidad de 60km/h . Si se posee los siguientes dispositivos de electrónica de potencia:
 Transistor: $P_{total} = 1100\text{W}$, $hfe = 50$, $V_{ce_{sat}} = 2,8\text{V}$, $V_{ce_{max}} = 1000\text{V}$, $I_{c_{max}} = 140\text{A}$, $I_{c_{cort}} = 2\text{mA}$, $t_{enc} = 3\mu\text{s}$, $t_{off} = 15\mu\text{s}$
 Diodo: $R_d = 5\text{m}\Omega$, $V_{to} = 0,85\text{V}$, $R_{tjc} = 0,9^\circ\text{C/W}$, $T_a = 30^\circ\text{C}$ y $T_j = 180^\circ\text{C}$
 - b) Determine las pérdidas de conducción y bloqueo del transistor.
 - c) Determine la máxima frecuencia de conmutación del transistor en esta condición de operación.
 - d) Pérdidas en el diodo de descarga libre.

- e) Calcule la resistencia térmica del disipador asociado al diodo descarga libre.
3. Un motor de corriente continua se alimenta desde una fuente de 300V DC a través de un chopper reductor que opera a 1kHz. El motor acciona un montacargas el cual consume una potencia de 4,8kW a un velocidad de 1710rpm. Determine:
- Parámetros del Motor.
 - Razón de conducción del Chopper.
 - Corriente máxima, mínima y rizado en los circuitos de armadura y campo.
 - Corriente máxima, mínima y rizado entregado por el chopper.

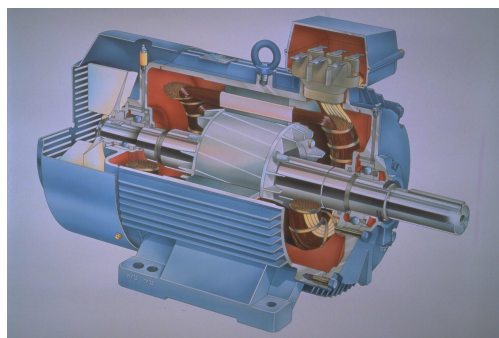
Datos del Motor: $V_a = 230V$, $I_a = 30A$, $n = 1750rpm$, $P_s = 5kW$, $V_f = 230V$, $I_f = 3A$,
 $\tau_a = 2,04s$, $\tau_f = 27,39ms$

4. Un Montacargas es accionado por un motor de corriente continua con los siguientes datos nominales: $V_a = 230V$, $I_a = 27A$, $P_s = 4,9kW$, $n = 1750rpm$, $V_f = 115V$, $I_f = 2,3A$, $\tau_a = 15ms$. El montacargas es accionado en la armadura por un chopper tipo "C" desde una barra de 300V. El campo de la máquina de corriente continua es alimentado por un chopper auxiliar tipo "E" de razón de conducción un tercio desde la misma barra de continua. Determine:
- El Chopper es capaz de realizar la operación de tracción y frenado. Explique bien su respuesta y demuestre la operación de ambos chopper en las condiciones de operación que usted considera que puede trabajar.
 - Razón de conducción para levantar una carga de 35kg a una velocidad de 72km/h, si la polea del montacargas posee 1,25m de diámetro y posee una caja de cambio de 4,5 : 1.
 - Si el chopper realiza frenado regenerativo. Calcule la potencia de frenado para una razón de conducción de 0,767 en armadura y 0,5 en el campo.

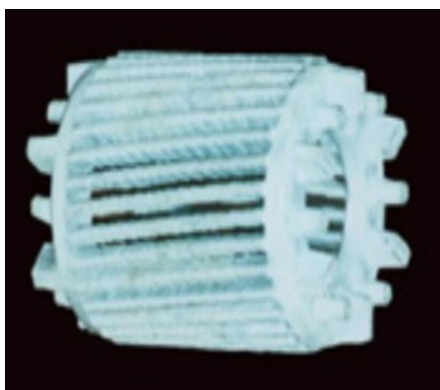
Máquina de Inducción

20.1. Modelo en Vectores Espaciales

La máquina de inducción se clasifica de acuerdo a su tipo de rotor en: Bobinado o Jaula de Ardilla. Estos rotores se puede modelar con un embobinado trifásico. En la figura 20.1 se presenta un diagrama de esta maquina y de sus tipos de rotor. En la figura 20.2, se presenta un diagrama esquemático un una máquina de inducción trifásica en el estator y rotor.



(a) Máquina de Inducción



(b) Rotor tipo jaula de ardilla



(c) Rotor bobinado

Figura 20.1: Esquema de la máquina de inducción y de sus tipos de rotor

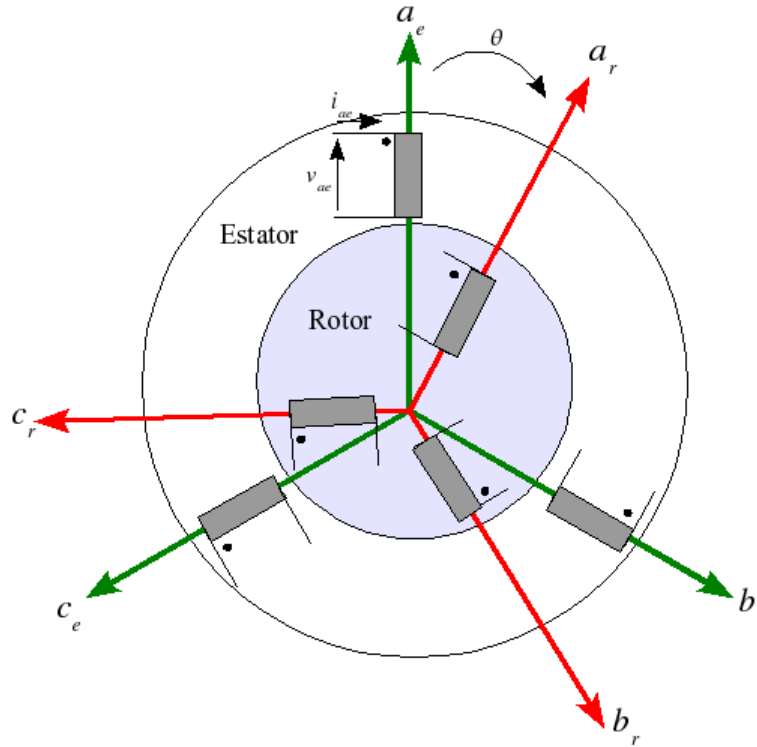


Figura 20.2: Esquema de la máquina de inducción trifásica

Despreciando los efectos del ranurado, excentricidades estáticas y dinámicas del rotor, corrientes de Eddy, el efecto de la saturación magnética y una distribución no sinusoidal de la fuerza magneto motriz, el modelo de la máquina de inducción trifásica se puede escribir matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} + p \left(\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ee} & \mathbf{L}_{er} \\ \mathbf{L}_{re} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}}_e \\ \dot{\mathbf{i}}_r \end{bmatrix} \right) \quad (20.1)$$

$$T_e - T_m = J \ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} \quad (20.2)$$

donde:

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} v_{ae} & v_{be} & v_{ce} \end{bmatrix}^t$$

$$\mathbf{v}_r = \begin{bmatrix} v_{ar} & v_{br} & v_{cr} \end{bmatrix}^t$$

$$\mathbf{i}_e = \begin{bmatrix} i_{ae} & i_{be} & i_{ce} \end{bmatrix}^t$$

$$\mathbf{i}_r = \begin{bmatrix} i_{ar} & i_{br} & i_{cr} \end{bmatrix}^t$$

Para evaluar cada uno de los términos que conforman la matriz de inductancia definida en la expresión (20.1), es necesario utilizar la siguiente definición.

$$L_{kj} = N_k N_j \mathcal{P}_{kj} \quad (20.3)$$

donde:

L_{kj}	es la inductancia entre la bobina k y j.
N_k	es el número de vueltas de la bobina k.
N_j	es el número de vueltas de la bobina j.
\mathcal{P}_{kj}	es la permeanza del circuito magnético entre ambos devanados.

Las matrices de inductancia son dependientes de la posición angular del rotor. Cada parámetro de inductancia de la ecuación (20.1), se obtiene en forma aproximada, superponiendo el efecto de la fluctuación de la permeanza del camino magnético, debido a las ranuras del rotor y estator sobre la distribución armónica espacial de las *FMM* de la máquina. La distribución espacial de la fuerza magneto motriz puede ser considerada en la expresión de la inductancia. Por otra parte los coeficientes inductivos pueden también ser obtenidos excitando con corrientes unitarias un devanado de la máquina y calculando el enlace de flujo de todos lo devanados del convertidor electromecánico utilizando las ecuaciones de Maxwell.

Considerando la expansión más simple en serie de Fourier para las inductancias mutuas estator - rotor, las matrices de inductancia y resistencia que definen el modelo de la máquina de inducción, puede escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_r \mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (20.4)$$

$$\lambda = \mathbf{L}(\theta) \cdot \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ee} & \mathbf{L}_{er} \\ \mathbf{L}_{re} & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} \quad (20.5)$$

donde:

$$\mathbf{L}_{ee} = \mathbf{L}_e + \mathbf{L}_{\sigma e} = L'_e \mathbf{S} + L'_{\sigma e} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L}_{rr} = \mathbf{L}_r + \mathbf{L}_{\sigma r} = L'_r \mathbf{S} + L'_{\sigma r} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L}_{er} = \mathbf{L}_{re}^t = L_{er}' \mathbf{C}$$

Las matrices \mathbf{U} , \mathbf{S} , \mathbf{C} de las expresiones (20.4) y (20.5), corresponden a las matrices unitaria, simétrica y cíclica respectivamente. A continuación, se definen cada una de estas matrices.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20.6)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (20.7)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (20.8)$$

Para transformar el modelo dinámico de la máquina de inducción a vectores espaciales se utilizara la transformación presentada en la expresión (13.27), para cada una de las matrices que describen el comportamiento de la máquina de inducción.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \quad (20.9)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \quad (20.10)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \mathbf{C} = \\ & = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \left\{ e^{j\theta} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} & 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} & 1 \end{bmatrix} + e^{-j\theta} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} & 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ & = \frac{3}{2} e^{j\theta} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20.11)$$

Aplicando la transformación de vectores espaciales (20.9) a la (20.11), se obtiene el modelo vectorial de la máquina de inducción:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ \vec{v}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} + p \left(\begin{bmatrix} L_e & L_{er}e^{j\theta} \\ L_{er}e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} \right) \\
\begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ \vec{v}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} + j\omega_m \begin{bmatrix} 0 & L_{er}e^{j\theta} \\ -L_{er}e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} L_e & L_{er}e^{j\theta} \\ L_{er}e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{20.12}$$

$$T_e = L_{er} \Im \left\{ \vec{i}_e \left(\vec{i}_r e^{j\theta} \right)^* \right\} \tag{20.13}$$

donde:

$$L_e = L'_{\sigma e} + \frac{3}{2}L'_e$$

$$L_r = L'_{\sigma r} + \frac{3}{2}L'_r$$

$$L_{er} = \frac{3}{2}L'_{er}$$

Para reducir el sistema de ecuaciones (20.12), se multiplica la ecuación del rotor por $e^{j\theta}$, con la finalidad de proyectar esta corriente a un eje de referencia solidario con el estator:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ \vec{v}_r e^{j\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r e^{j\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} + j\omega_m \begin{bmatrix} 0 & L_{er}e^{j\theta} \\ -L_{er}e^{-j\theta}e^{j\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} L_e & L_{er}e^{j\theta} \\ L_{er}e^{-j\theta}e^{j\theta} & L_r e^{j\theta} \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{20.14}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ \vec{v}_r e^{j\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ e^{j\theta} \vec{i}_r \end{bmatrix} + j\omega_m \begin{bmatrix} 0 & L_{er} \\ -L_{er} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ e^{j\theta} \vec{i}_r \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} L_e & L_{er} \\ L_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\vec{i}_e \\ e^{j\theta} p\vec{i}_r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Definiendo:

$$\vec{v}_r^e = \vec{v}_r e^{j\theta} \tag{20.15}$$

$$\vec{i}_r^e = \vec{i}_r e^{j\theta} \tag{20.16}$$

Se puede redefinir el sistema de ecuaciones (20.13) como:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ \vec{v}_r^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r^e \end{bmatrix} + j\omega_m \begin{bmatrix} 0 & L_{er} \\ -L_{er} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & L_{er} \\ L_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\vec{i}_e \\ e^{j\theta} p\vec{i}_r \end{bmatrix} \quad (20.17)$$

Derivando la expresión (20.16), se obtiene:

$$p\vec{i}_r^e = p(\vec{i}_r e^{j\theta}) = p\vec{i}_r e^{j\theta} + j\omega_m \vec{i}_r e^{j\theta} \Rightarrow p\vec{i}_r e^{j\theta} = p\vec{i}_r^e - j\omega_m \vec{i}_r^e \quad (20.18)$$

Sustituyendo la expresión (20.18), en el sistema (20.17), se obtiene el modelo de la máquina de inducción en vectores espaciales referido al estator:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ \vec{v}_r^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r^e \end{bmatrix} + j\omega_m \begin{bmatrix} 0 & L_{er} \\ -L_{er} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r^e \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} L_e & L_{er} \\ L_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\vec{i}_e \\ p\vec{i}_r^e - j\omega_m \vec{i}_r^e \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ \vec{v}_r^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r^e \end{bmatrix} + j\omega_m \begin{bmatrix} 0 & L_{er} \\ -L_{er} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r^e \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} L_e & L_{er} \\ L_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\vec{i}_e \\ p\vec{i}_r^e \end{bmatrix} - j\omega_m \begin{bmatrix} L_e & L_{er} \\ L_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{i}_r^e \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ \vec{v}_r^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & L_{er} \\ L_{er} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r^e \end{bmatrix} \\ &\quad - j\omega_m \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r^e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20.19)$$

$$T_e = L_{er} \Im m \left\{ \vec{i}_e \left(\vec{i}_r^e \right)^* \right\} \quad (20.20)$$

En la figura 20.3, se presenta el circuito equivalente del modelo vectorial de la máquina de inducción en referencia al eje del estator. Este modelo es válido en condiciones de operación dinámicas, estado estacionario y armónicas. El par electromecánico se obtiene directamente de la expresión de coenergía en el campo.

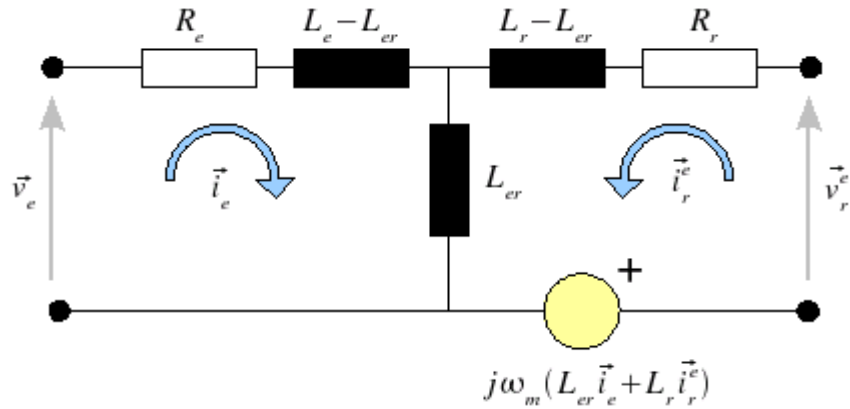


Figura 20.3: Modelo en vectores espaciales de la máquina de inducción referido al estator

20.2. Modelo en Régimen Sinusoidal Permanente

Al aplicar un sistema de tensiones trifásicas, balanceadas de secuencia positiva a los devanados del estator, con las bobinas de rotor en cortocircuito se obtienen los siguientes vectores espaciales.

$$\vec{v}_e = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \sqrt{2}V \begin{bmatrix} \cos(\omega_e t) \\ \cos(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\omega_e t - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_e = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \sqrt{2}V \left\{ e^{j\omega_e t} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} + e^{-j\omega_e t} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \right\} \quad (20.21)$$

$$\vec{v}_e = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2}V e^{j\omega_e t} = \sqrt{3}V e^{j\omega_e t} = \tilde{V}_e e^{j\omega_e t}$$

$$\vec{i}_e = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \sqrt{2}I_e \begin{bmatrix} \cos(\omega_e t - \beta) \\ \cos(\omega_e t - \beta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\omega_e t - \beta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

$$\vec{i}_e = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \sqrt{2}I_e \left\{ e^{j(\omega_e t - \beta)} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} + e^{-j(\omega_e t - \beta)} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \right\} \quad (20.22)$$

$$\vec{i}_e = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2}I_e e^{j\omega_e t} e^{-j\beta} = \sqrt{3}I_e e^{-j\beta} e^{j\omega_e t} = \tilde{I}_e e^{j\omega_e t}$$

$$\vec{v}_r = 0 \quad (20.23)$$

$$\begin{aligned} \vec{i}_r &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \sqrt{2} I_r \begin{bmatrix} \cos((\omega_e - \omega_r)t - \nu) \\ \cos((\omega_e - \omega_r)t - \nu - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos((\omega_e - \omega_r)t - \nu - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \\ \vec{i}_r &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \sqrt{2} I_r \left\{ e^{j((\omega_e - \omega_r)t - \nu)} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} + e^{-j((\omega_e - \omega_r)t - \nu)} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \right\} \\ \vec{i}_r &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2} I_r e^{j(\omega_e - \omega_r)t} e^{-j\nu} = \sqrt{3} I_r e^{-j\nu} e^{j(\omega_e - \omega_r)t} = \tilde{I}_r e^{j(\omega_e - \omega_r)t} \end{aligned} \quad (20.24)$$

Sustituyendo los resultados de las expresiones (20.21) a la (20.24), en el sistema de ecuaciones diferenciales (20.12), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{V}_e e^{j\omega_e t} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e e^{j\omega_e t} \\ \tilde{I}_r e^{j(\omega_e - \omega_r)t} \end{bmatrix} + p \left(\begin{bmatrix} L_e & L_{er} e^{j\theta} \\ L_{er} e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e e^{j\omega_e t} \\ \tilde{I}_r e^{j(\omega_e - \omega_r)t} \end{bmatrix} \right) \\
\begin{bmatrix} \tilde{V}_e e^{j\omega_e t} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e e^{j\omega_e t} \\ \tilde{I}_r e^{j(\omega_e - \omega_r)t} \end{bmatrix} + j\omega_r \left(\begin{bmatrix} 0 & L_{er} e^{j\theta} \\ L_{er} e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e e^{j\omega_e t} \\ \tilde{I}_r e^{j(\omega_e - \omega_r)t} \end{bmatrix} \right) \\
&\quad + \begin{bmatrix} L_e & L_{er} e^{j\theta} \\ L_{er} e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \tilde{I}_e e^{j\omega_e t} \\ \tilde{I}_r e^{j(\omega_e - \omega_r)t} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tilde{V}_e e^{j\omega_e t} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e e^{j\omega_e t} \\ \tilde{I}_r e^{j(\omega_e - \omega_r)t} \end{bmatrix} + j\omega_r \left(\begin{bmatrix} 0 & L_{er} e^{j\theta} \\ L_{er} e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e e^{j\omega_e t} \\ \tilde{I}_r e^{j(\omega_e - \omega_r)t} \end{bmatrix} \right) \\
&\quad + \begin{bmatrix} L_e & L_{er} e^{j\theta} \\ L_{er} e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} j\omega_e (\tilde{I}_e e^{j\omega_e t}) \\ j(\omega_e - \omega_r) (\tilde{I}_r e^{j(\omega_e - \omega_r)t}) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tilde{V}_e \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e \\ \tilde{I}_r e^{-j\omega_r t} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & j\omega_r L_{er} e^{j\theta} \\ -j\omega_r L_{er} e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e \\ \tilde{I}_r e^{-j\omega_r t} \end{bmatrix} \right) \\
&\quad + \begin{bmatrix} j\omega_e L_e & j(\omega_e - \omega_r) L_{er} e^{j\theta} \\ j\omega_e L_{er} e^{-j\theta} & j(\omega_e - \omega_r) L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \tilde{I}_e \\ \tilde{I}_r e^{-j\omega_r t} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tilde{V}_e \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e \\ \tilde{I}_r e^{-j\omega_r t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j\omega_e L_e & j\omega_e L_{er} e^{j\theta} \\ j(\omega_e - \omega_r) L_{er} e^{-j\theta} & j(\omega_e - \omega_r) L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e \\ \tilde{I}_r e^{-j\omega_r t} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{20.25}$$

Definiendo el deslizamiento de la máquina de inducción como la diferencia de velocidad angular eléctrica y mecánica en por unida de la velocidad angular eléctrica.

$$s = \frac{\omega_e - \omega_r}{\omega_e} \tag{20.26}$$

Dividiendo la ecuación del rotor de la expresión (20.25) entre el deslizamiento de la máquina de inducción y multiplicándola por $e^{j\theta}$, se obtiene el modelo de la máquina de inducción en régimen sinusoidal permanente:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & \frac{R_r}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e \\ \tilde{I}_r e^{-j\omega_r t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j\omega_e L_e & j\omega_e L_{er} e^{j\theta} \\ j\omega_e L_{er} e^{-j\theta} & j\omega_e L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e \\ \tilde{I}_r e^{-j\omega_r t} \end{bmatrix} \tag{20.27}$$

Como $\omega_r t = \theta$, la expresión (20.27) se puede reducir al multiplicar la ecuación del rotor por $e^{j\theta}$.

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & \frac{R_r}{s} e^{j\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e \\ \tilde{I}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j\omega_e L_e & j\omega_e L_{er} e^{j\theta} \\ j\omega_e L_{er} & j\omega_e L_r e^{j\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e \\ \tilde{I}_r \end{bmatrix} \quad (20.28)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & \frac{R_r}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e \\ \tilde{I}_r e^{j\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} jX_e & jX_{er} \\ jX_{er} & jX_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_e \\ \tilde{I}_r e^{j\theta} \end{bmatrix}$$

Para encontrar la ecuación de Par eléctrico en régimen sinusoidal permanente, se sustituirá los resultados de las expresiones (20.22) y (20.24) en la ecuación de par eléctrico (20.13):

$$T_e = L_{er} \Im m \left\{ \sqrt{3} I_e e^{-j\beta} e^{j\omega_e t} \left(\sqrt{3} I_r e^{-j\nu} e^{j(\omega_e - \omega_r)t} e^{j\theta} \right)^* \right\}$$

$$T_e = L_{er} \Im m \left\{ \sqrt{3} I_e e^{-j\beta} e^{j\omega_e t} \left(\sqrt{3} I_r e^{j\nu} e^{-j(\omega_e - \omega_r)t} e^{-j\theta} \right) \right\}$$

$$T_e = L_{er} \Im m \left\{ 3 I_e e^{-j\beta} (I_r e^{j\nu}) \right\} \quad (20.29)$$

$$T_e = 3 L_{er} I_e I_r \Im m \left\{ e^{-j\beta} (e^{j\nu}) \right\}$$

$$T_e = 3 L_{er} I_e I_r \sin(\nu - \beta)$$

En la figura 20.4, se presenta el circuito equivalente del modelo en régimen sinusoidal permanente de la máquina de inducción.

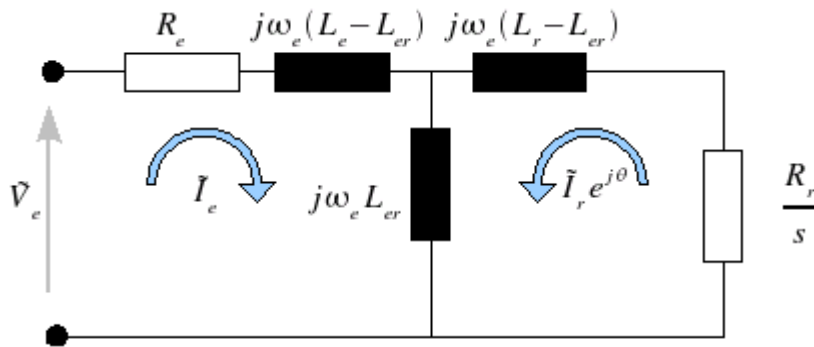


Figura 20.4: Modelo en régimen sinusoidal permanente de la máquina de inducción

20.2.1. Equivalente Thévening

A partir del circuito equivalente de la figura 20.4, se puede calcular el par eléctrico de la máquina de inducción como:

$$T_e = \frac{3}{\omega_e} \left| \tilde{I}_r e^{j\theta} \right|^2 \frac{R_r}{s} \quad (20.30)$$

Una forma rápida para calcular la corriente del rotor es realizar un equivalente Thévening de la máquina vista desde el rotor a fin de reducir el circuito a una sola malla. En la figura 20.5, muestra el equivalente planteado para el circuito de la figura 20.4. En la figura 20.6, se presenta el circuito equivalente luego de realizado el Thévening.

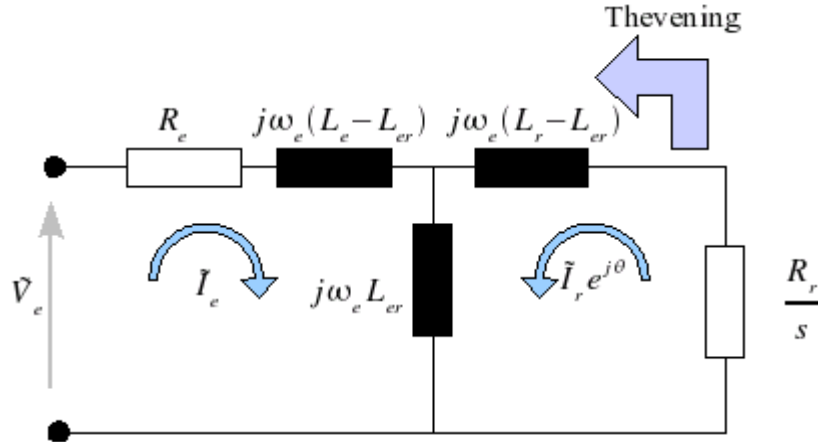


Figura 20.5: Equivalente Thévening propuesto de la máquina de inducción

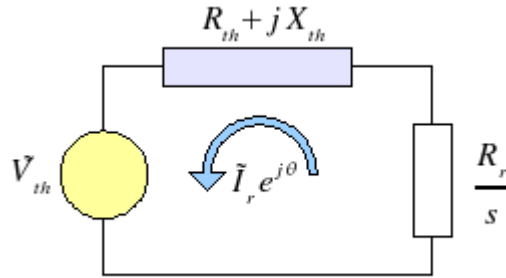


Figura 20.6: Equivalente Thévening de la máquina de inducción

En la figura 20.6, \tilde{V}_{th} y Z_{th} , corresponden a:

$$\tilde{V}_{th} = \tilde{V}_e \frac{jX_{er}}{R_e + jX_e} = \tilde{V}_e \frac{j\omega_e L_{er}}{R_e + j\omega_e L_e} \quad (20.31)$$

$$\begin{aligned} Z_{th} &= R_{th} + jX_{th} = j(X_r - X_{er}) + \frac{(X_{er}^2 - X_e X_{er}) + j(R_e X_{er})}{R_e + jX_e} \\ Z_{th} &= j\omega_e (L_r - L_{er}) + \frac{\omega_e^2 (L_{er}^2 - L_e L_{er}) + j\omega_e (R_e L_{er})}{R_e + j\omega_e L_e} \end{aligned} \quad (20.32)$$

Del circuito de la figura 20.6, se puede calcular la corriente en el rotor como:

$$\tilde{I}_r e^{j\theta} = \frac{\tilde{V}_{th}}{(R_{th} + \frac{R_r}{s}) + jX_{th}} \quad (20.33)$$

Reemplazando la expresión de la corriente del rotor (20.33), en la ecuación de par eléctrico (20.30), se obtiene:

$$T_e = \frac{3}{\omega_e} \frac{|\tilde{V}_{th}|^2}{(R_{th} + \frac{R_r}{s})^2 + X_{th}^2} \frac{R_r}{s} \quad (20.34)$$

La potencia de salida de la máquina se puede calcular como:

$$P_s = 3 \left| \tilde{I}_r e^{j\theta} \right|^2 \frac{R_r(1-s)}{s} = 3 \frac{|\tilde{V}_{th}|^2 (1-s)}{(R_{th} + \frac{R_r}{s})^2 + X_{th}^2} \frac{R_r}{s} \quad (20.35)$$

20.2.2. Característica Par Deslizamiento

En la figura 20.7, se presenta la característica de par deslizamiento para una máquina de inducción, generada a partir de la expresión (20.34). En la característica el deslizamiento $s = 1$, corresponde a velocidad mecánica igual a cero, es decir con la máquina detenida. Los deslizamientos de operación de la máquina de inducción están entre el tres y cinco por ciento.

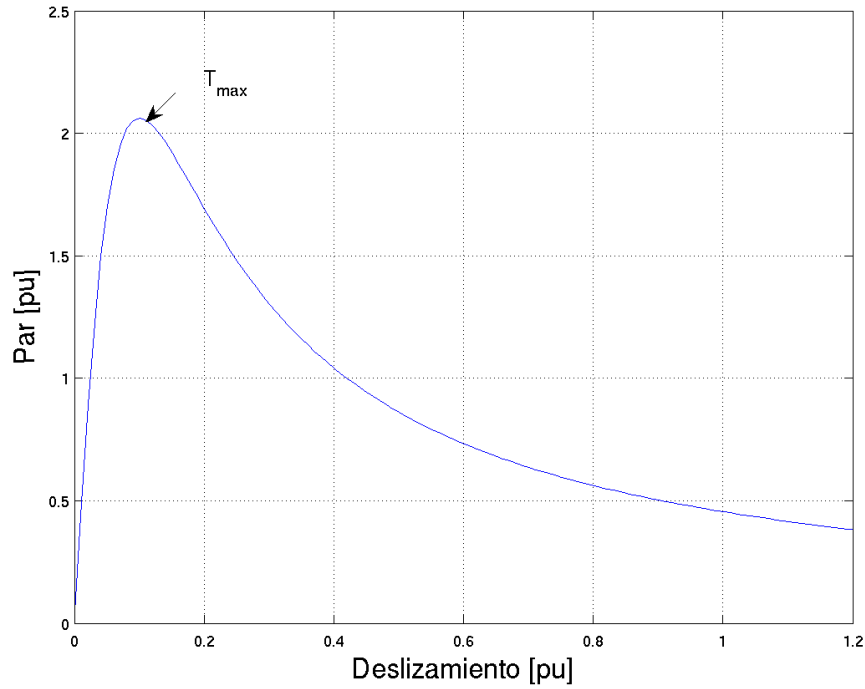


Figura 20.7: Curva par deslizamiento de la máquina de inducción

20.2.3. Par Eléctrico Aproximado

Deslizamientos cercanos a uno ($s \rightarrow 1$)

Para deslizamientos cercanos a la unidad se puede aproximar la ecuación de par eléctrico (20.34), a la siguiente expresión:

$$T_e \approx \frac{3}{\omega_e} \frac{|\tilde{V}_{th}|^2}{R_{th}^2 + X_{th}^2} \frac{R_r}{s} \quad (20.36)$$

En la figura 20.8, se presenta una comparación entre los resultados de la expresión (20.34) y (20.36) para deslizamientos cercanos a uno. Esta aproximación del par eléctrico en torno a esta región de operación se denomina Par de la Zona No Lineal.

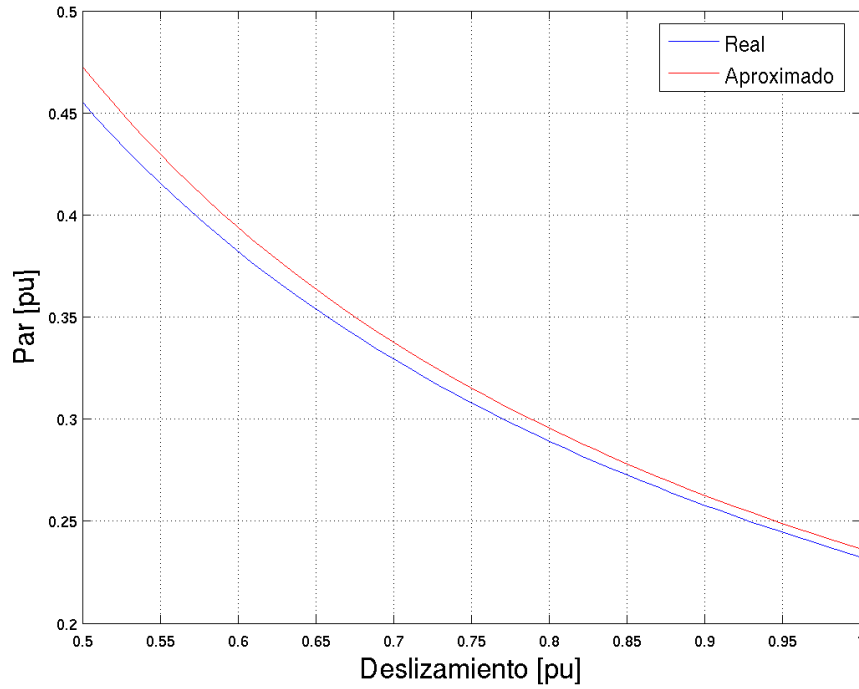


Figura 20.8: Curva par deslizamiento zona no lineal

Deslizamientos cercanos a cero ($s \rightarrow 0$)

Para deslizamientos cercanos a cero, es decir de operación, se puede aproximar la ecuación de par eléctrico (20.34), a la siguiente expresión:

$$T_e \approx \frac{3}{\omega_e} |\tilde{V}_{th}|^2 \frac{s}{R_r} \quad (20.37)$$

En la figura 20.9, se presenta una comparación entre los resultados de la expresión (20.34) y (20.37) para deslizamientos cercanos a cero. Esta aproximación del par eléctrico en torno a esta región de operación se denomina Par de la Zona Lineal.

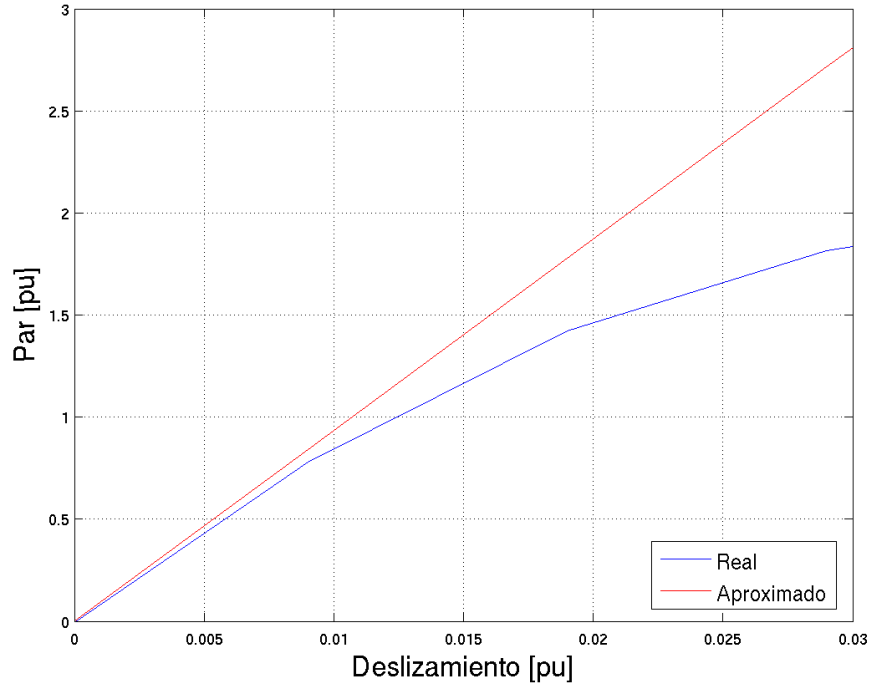


Figura 20.9: Curva par deslizamiento zona lineal

Par Máximo

De la expresión (20.34), se puede calcular el par máximo de la máquina de inducción en régimen permanente y el deslizamiento al cual se alcanza este par, como:

$$T_{e_{max}} \approx \frac{3}{2\omega_e} \frac{|\tilde{V}_{th}|^2}{X_{th}} \quad (20.38)$$

$$s_{T_{e_{max}}} = \frac{R_r}{\sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}} \quad (20.39)$$

20.3. Parámetros del Modelo

Al igual que la maquina de corriente continua, la máquina de inducción presenta una placa de identificación de su punto nominal de operación en su chasis con los siguientes datos:

- Tensión nominal línea a línea de los devanados del estator.
- Corriente nominal de los devanados del estator.

- Tipo de conexión (Delta o estrella).
- Factor de potencia nominal.
- Potencia de salida en el eje.
- Aislación.

A diferencia de la máquina de corriente continua los datos de placa son insuficientes para determinar los valores de los parámetros que describen el modelo, por eso es necesario realizar pruebas para determinar por lo menos tres puntos de operación de la máquina y a través de métodos de minimización obtener los parámetros. Para un diseño rápido pueden utilizar los valores típicos en por unidad ($p.u.$) de la máquina que son:

Tabla 20.1: Valores en por unidad de la máquina de inducción

Parámetro	Valor [$p.u.$]
X_e	3,1
X_r	3,1
X_{er}	3,0
R_e	0,03
R_r	0,01

Para encontrar los valores en el sistema físico de las resistencias y reactancias de la máquina, basta utilizar la expresión:

$$Z_{[\Omega]} = \frac{V_{L-L}^2}{S_T} Z_{[p.u.]} \quad (20.40)$$

20.4. Estudio en régimen permanente de la máquina de inducción

En esta sección se presentara el comportamiento de la máquina de inducción ante variaciones de la tensión y frecuencia de alimentación, con la finalidad de evaluar el impacto de estas variaciones en su comportamiento en régimen estacionario de operación. Para este estudio se utilizara una máquina de inducción de barra profunda con los siguientes datos nominales.

$$V_n = 4,0 kV \quad I_n = 145 A \quad fp = 85 \% \quad P_s = 825 kW \quad n = 1195 rpm$$

El fabricante de la máquina suministro los parámetros del circuito equivalente en régimen sinusoidal permanente en por unidad de las bases del estator del convertidor.

$$\begin{aligned} R_e = 0,0081 \, pu \quad R_r = 0,0045 \, pu \quad L_e = 2,8966 \, pu \quad L_r = 3,2233 \, pu \quad L_{er} = 2,9614 \, pu \\ T_{e_n} = 0,92117 \, pu \quad T_{e_{max}} = 2,6720 \, pu \quad \eta_n = 0,85332 \end{aligned}$$

Se evaluará el desempeño del convertidor electromecánico en régimen permanente de operación para variaciones de la tensión y frecuencia de la fuente de alimentación estatórica desde el punta de vista de par entregado por el eje mecánico, potencia mecánica de salida, corrientes de alimentación estatórica y factor de potencia en el estator. Durante la evaluación se trabajara en por unidad para mayor comodidad y se despreciaran las pérdidas mecánicas en el eje por fricción y ventilación. Se escogerá como frecuencia eléctrica base durante el estudio $\omega_e = 377 \frac{rad}{s}$ con la finalidad de que las reactancias e inductancias en por unidad sean iguales ($X_{0/1} = L_{0/1}$).

20.4.1. Comportamiento de la máquina de inducción ante variaciones de la tensión de alimentación.

Se evaluara el comportamiento de la máquina de inducción para variaciones de la tensión de alimentación de: 0,25, 0,5, 0,75, 1,0 y 1,2 en por unidad de la nominal a frecuencia constante para un rango de velocidad mecánica de 0 a 2 en por unidad de la velocidad mecánica nominal. En la figura 20.10, se presenta el par eléctrico en régimen permanente entregado por la máquina para cada una de las tensiones de alimentación. En la gráfica se observa como el par disminuye con el cuadrado de la tensión aplicada.

En la figura 20.11, se muestra la potencia de salida en el eje de la máquina de inducción para las diferentes consignas de tensión de alimentación, despreciando las pérdidas mecánicas. Al igual que el par la potencia en el eje disminuye con el cuadrado de la tensión en bornes del convertidor.

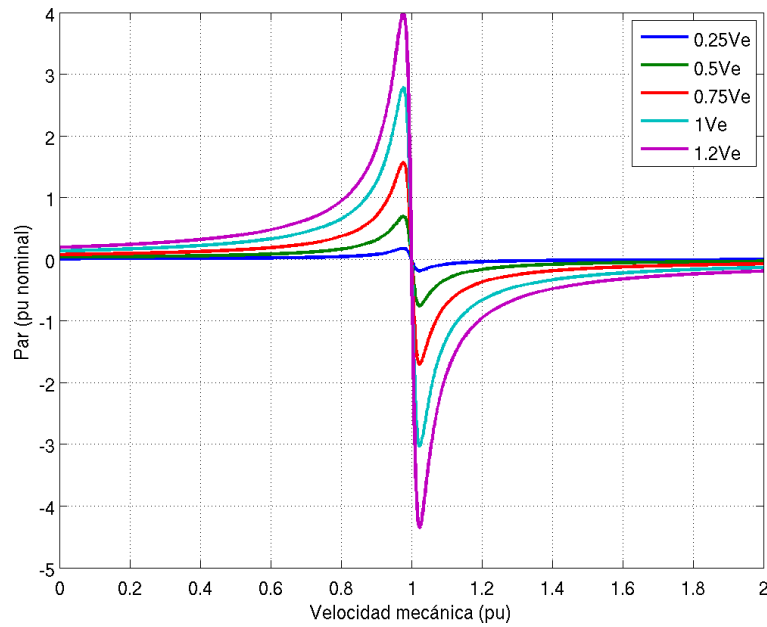


Figura 20.10: Par eléctrico de operación ante variaciones de la tensión de alimentación de la máquina de inducción.

En la figura 20.12, se muestra la corriente de alimentación del estator de la máquina de inducción para las diferentes consignas de tensión de alimentación. Se puede observar como la corriente de arranque de la máquina es proporcional a la tensión aplicada a sus bornes, esta estrategia de arranque permite reducir las corrientes durante la energización del convertidor electromecánico. Un aspecto al considerar a realizar arranques a tensión reducida es la disminución del par eléctrico suministrado y su repercusión en el par acelerante.

En la figura 20.13, se muestra el factor de potencia de la máquina de inducción para las diferentes consignas de tensión de alimentación. Se puede apreciar que el factor de potencia no es afectado por la disminución de la tensión en bornes en el estator y es función del deslizamiento del convertidor.

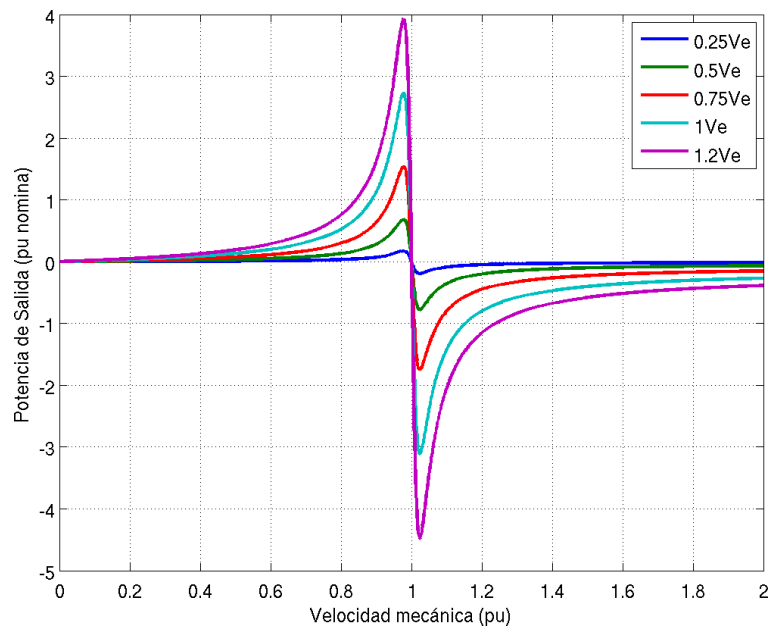


Figura 20.11: Potencia de salida de operación ante variaciones de la tensión de alimentación de la máquina de inducción.

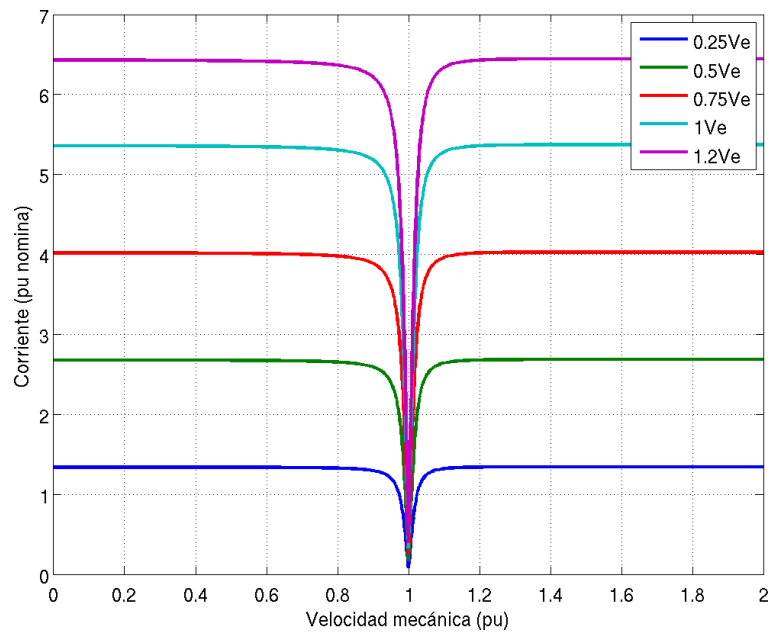


Figura 20.12: Corriente en el estator de operación ante variaciones de la tensión de alimentación de la máquina de inducción.

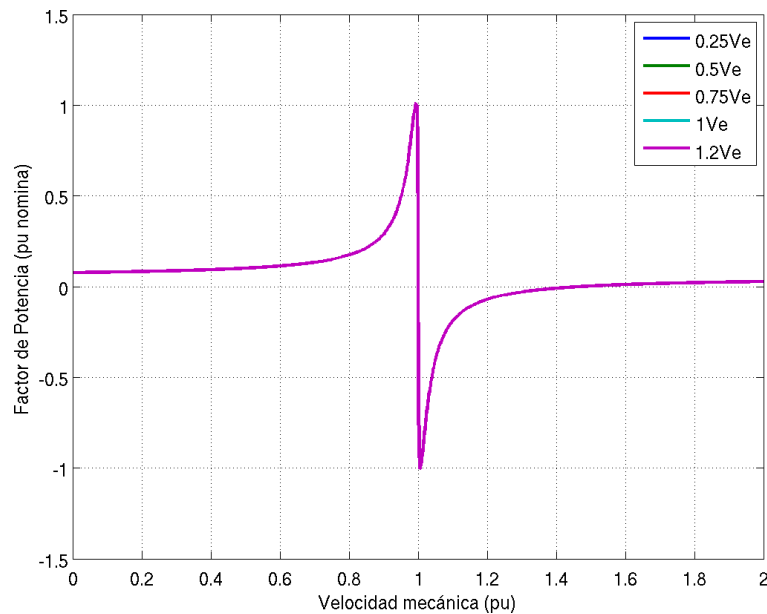


Figura 20.13: Factor de potencia ante variaciones de la tensión de alimentación de la máquina de inducción.

20.4.2. Comportamiento de la máquina de inducción ante variaciones de la frecuencia de alimentación.

Se evaluará el comportamiento de la máquina de inducción para variaciones de la frecuencia de alimentación de: 0,25, 0,5, 0,75, 1,0 y 1,2 en por unidad de la nominal a tensión constante para un rango de velocidad mecánica de 0 a 2 en por unidad de la velocidad mecánica nominal. En la figura 20.14, se presenta el par eléctrico en régimen permanente entregado por la máquina para cada una de las frecuencias de alimentación. En la figura se puede apreciar como el par es inversamente proporcional a la frecuencia de la fuente de alimentación del convertidor y no mantiene una relación lineal.

En la figura 20.15, se muestra la potencia de salida en el eje de la máquina de inducción para las diferentes consignas de frecuencias de alimentación, despreciando las pérdidas mecánicas. La potencia mecánica en el eje posee un comportamiento similar, un cuidado que debe poseer al operar la máquina a tensión nominal con frecuencia reducida es los pares de torsión aplicados al eje del convertidor en esta condición.

En la figura 20.16, se muestra la corriente de alimentación del estator de la máquina de inducción para las diferentes consignas de frecuencias de alimentación. Se puede apreciar como a baja frecuencia se elevan de manera considerable las corrientes de arranque del convertidor a más de 12 veces la nominal, pero su decaimiento es a más baja velocidad debido al cambio de la velocidad sincrónica con la frecuencia. Al utilizar estas estrategias para el arranque es necesario considerar los ajustes de las protecciones de corriente del convertidor para permitir estas corrientes de arranque.

En la figura 20.17, se muestra el factor de potencia de la máquina de inducción para las diferentes consignas de frecuencias de alimentación. Se puede observar que la dependencia del factor de potencia con el deslizamiento no se altera ante variaciones de la frecuencia de alimentación de la máquina al mantener la tensión constante.

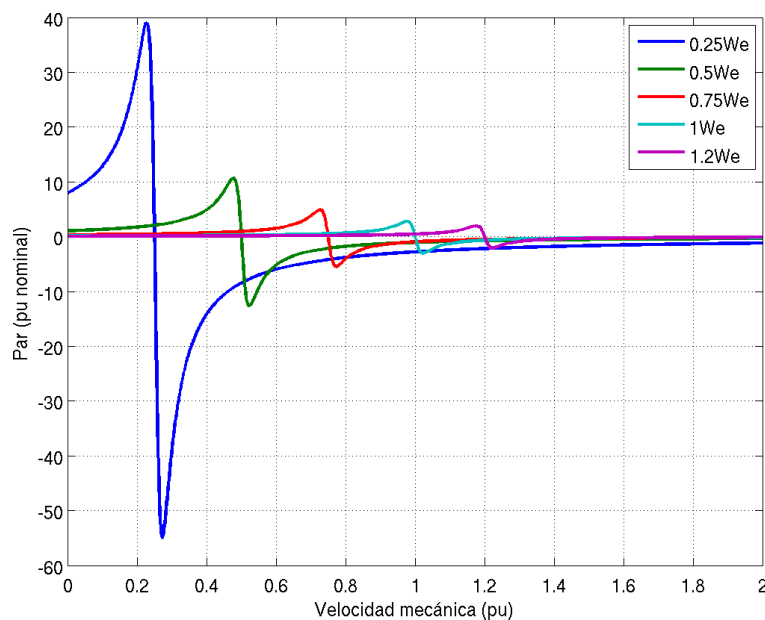


Figura 20.14: Par eléctrico de operación ante variaciones de la frecuencias de alimentación de la máquina de inducción.

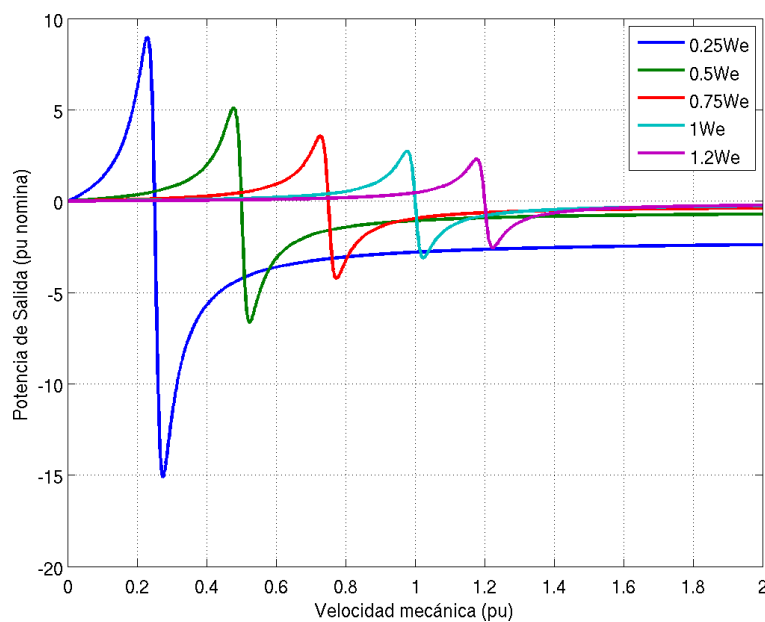


Figura 20.15: Potencia de salida de operación ante variaciones de la frecuencias de alimentación de la máquina de inducción.

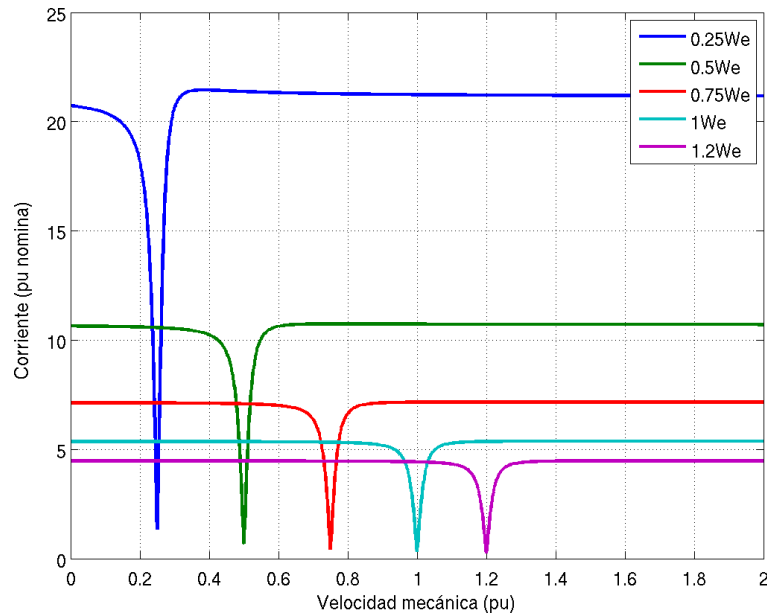


Figura 20.16: Corriente en el estator de operación ante variaciones de la frecuencias de alimentación de la máquina de inducción.

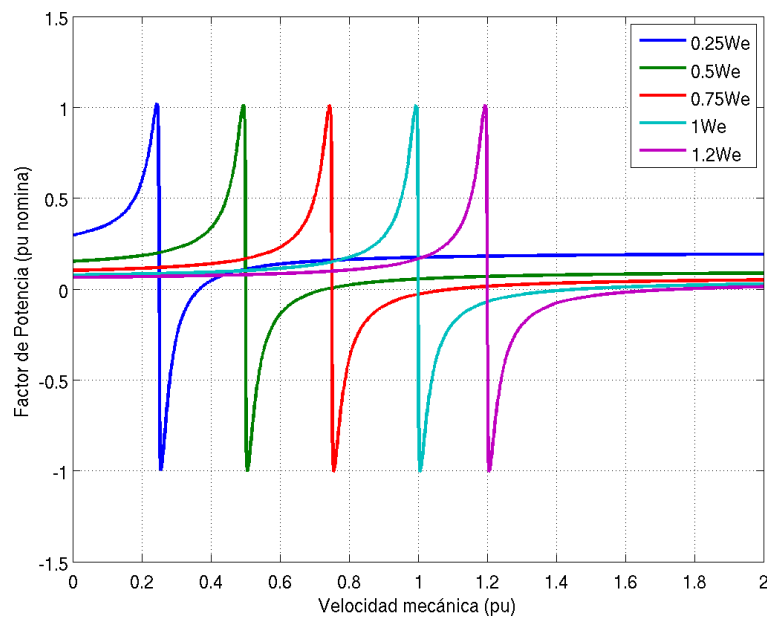


Figura 20.17: Factor de potencia ante variaciones de la frecuencias de alimentación de la máquina de inducción.

20.4.3. Comportamiento de la máquina de inducción ante variaciones de la tensión y frecuencia de alimentación constantes.

Se evaluara el comportamiento de la máquina de inducción para variaciones de tensión y frecuencia de alimentación de: 0,25, 0,5, 0,75, 1,0 y 1,2 en por unidad de la nominal en un rango de velocidad

mecánica de 0 a 2 en por unidad de la velocidad mecánica nominal. En la figura 20.18, se presenta el par eléctrico en régimen permanente entregado por la máquina para cada una de los rangos de tensión y frecuencias de alimentación. Se puede observar como la curva de par se traslada en paralelas al cambiar la frecuencia, manteniendo la relación tensión frecuencia constante. Para frecuencias bajas la curva se ve atenuada pero mantiene su forma, este comportamiento permite mantener un par eléctrico constante durante la aceleración de la máquina a su velocidad de régimen controlado la variación de frecuencia conforme el convertidor toma velocidad.

En la figura 20.19, se muestra la potencia de salida en el eje de la máquina de inducción para las diferentes consignas de tensión y frecuencias de alimentación, despreciando las pérdidas mecánicas. La potencia en el eje entregada por la máquina varía proporcional con la frecuencia, esto permite entregar altos pares a baja velocidades.

En la figura 20.20, se muestra la corriente de alimentación del estator de la máquina de inducción para las diferentes consignas de tensión y frecuencias de alimentación. Se puede observar como la corriente de arranque de la máquina no se afecta por las variaciones de la frecuencia al mantener la relación tensión frecuencia constante. Esto se debe a que la impedancia equivalente del convertidor vista desde el estator a bajas velocidades, es decir altos deslizamiento, es muy inductiva al mantener la relación $v/f = cte$ el modulo de corriente permanece constante ante las variaciones de la frecuencia.

En la figura 20.21, se muestra el factor de potencia de la máquina de inducción para las diferentes consignas de tensión y frecuencias de alimentación. Se puede observar que la dependencia del factor de potencia con el deslizamiento no se altera ante variaciones de la frecuencia de alimentación de la máquina al mantener la relación tensión frecuencia constante.

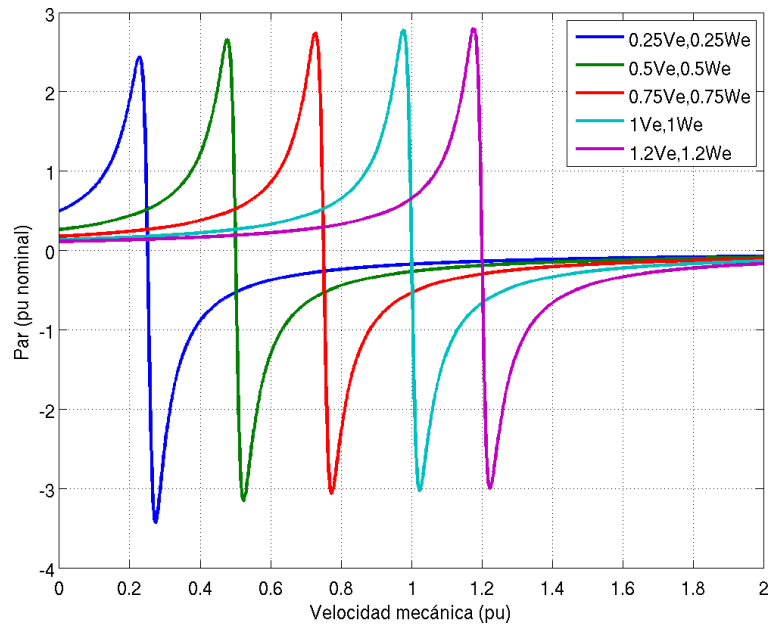


Figura 20.18: Par eléctrico de operación ante variaciones de la tensión y frecuencias de alimentación de la máquina de inducción.

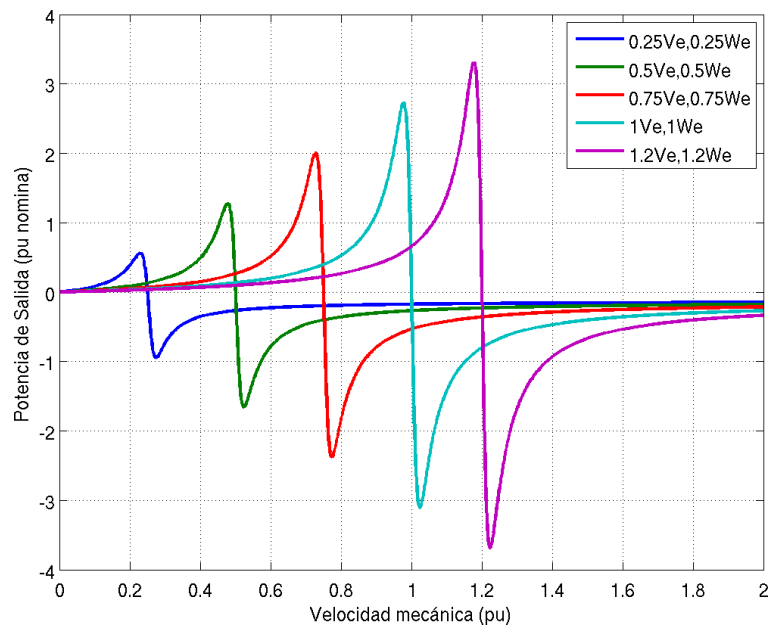


Figura 20.19: Potencia de salida de operación ante variaciones de la tensión y frecuencias de alimentación de la máquina de inducción.

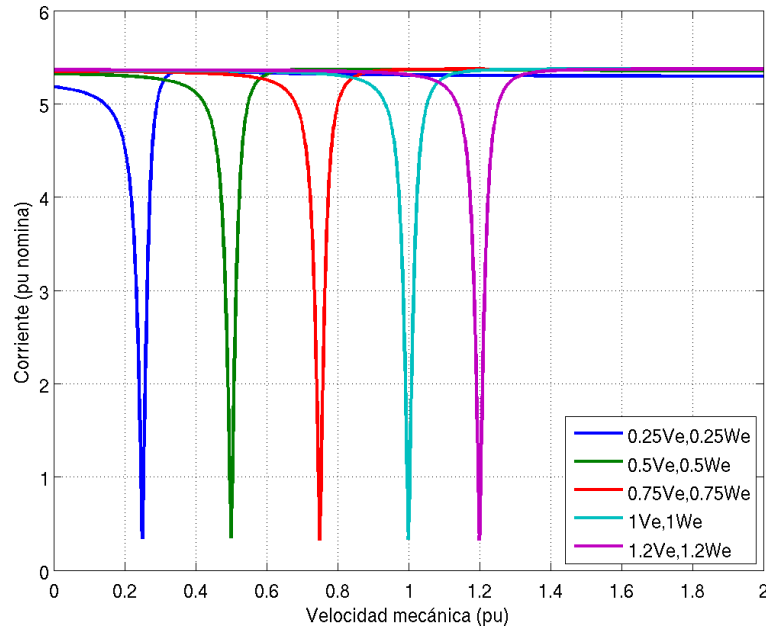


Figura 20.20: Corriente en el estator de operación ante variaciones de la tensión y frecuencias de alimentación de la máquina de inducción.

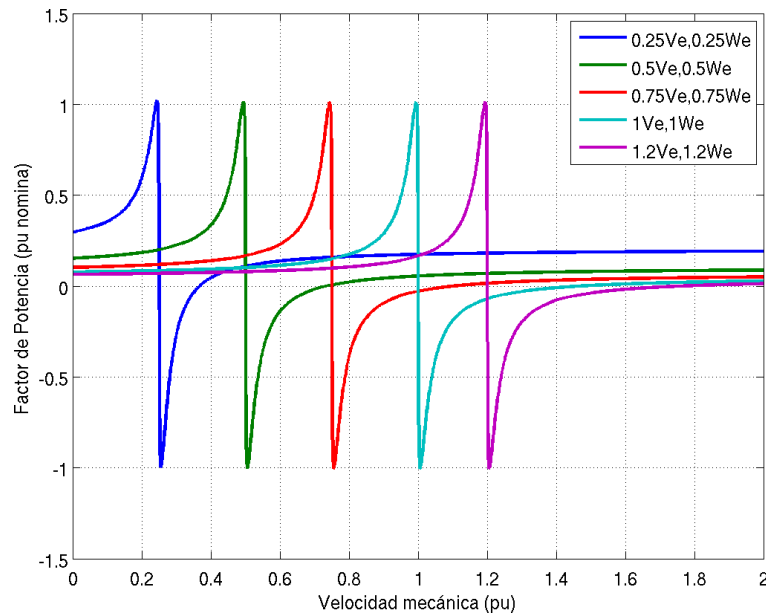


Figura 20.21: Factor de potencia ante variaciones de la tensión y frecuencias de alimentación de la máquina de inducción.

20.4.4. Comportamiento de la máquina de inducción ante variaciones de la resistencia de rotor

Se puede observar que para los entornos de los puntos de operación de la máquina de inducción ($s \rightarrow 0$) el par eléctrico de la máquina es inversamente proporcional a la resistencia de rotor. En

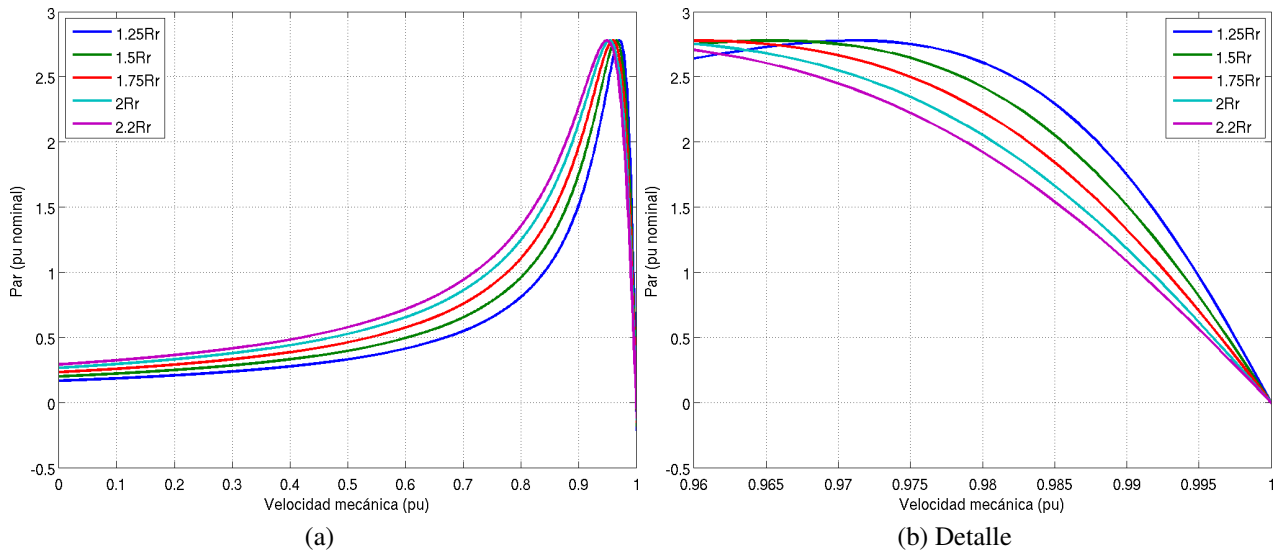


Figura 20.22: Par eléctrico ante variaciones de la resistencia del rotor

la figura 20.22, se presenta el par eléctrico de la máquina de inducción ante variaciones de la resistencia del rotor, para tensión y frecuencia nominal. Se puede destacar que un máquina con baja resistencia del rotor posee un mejor regulación de velocidad en el entorno del punto nominal a expensas de un menor par de arranque.

20.5. Clasificación NEMA

La National Electrical Manufacture Association (NEMA) de los Estados Unidos, ha clasificado las máquinas de a cuerdo a su característica par velocidad en función de la resistencia de rotor de la máquina de inducción. En la figura 20.23, se presenta la característica par velocidad de la máquina de inducción de acuerdo a la clasificación NEMA.

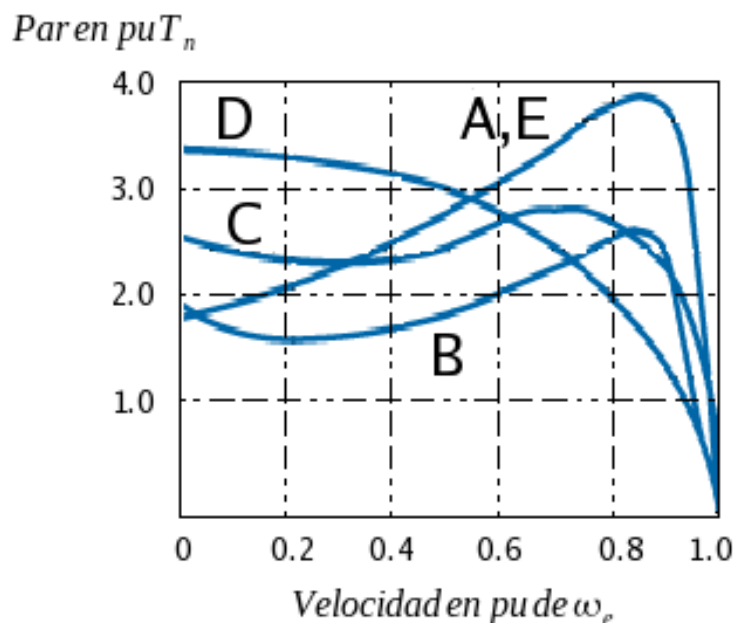


Figura 20.23: Clasificación NEMA de la máquina de inducción

Las máquinas con clasificación A se caracterizan por tener bajo par de arranque y baja resistencia de rotor lo cual aumenta su eficiencia a bajo deslizamiento. La máquina tipo B se utiliza en conjunto con los variadores de velocidad, sus valores de par de arranque y corriente son iguales que la tipo A pero esta máquina es más eficiente al trabajar con altos deslizamientos de operación, generalmente esta característica se obtiene al utilizar rotores tipo jaula de ardilla con barras profundas. La máquina Tipo C y D se caracterizan por altos pares de arranque y alta resistencia de rotor lo cual la hace menos eficiente para deslizamientos pequeños comparadas con las otras clasificaciones. Más recientemente se ha introducido en el mercado la máquina tipo E que posee las ventajas de la tipo A y B pero es de mayor eficiencia.

20.6. Arranque de la Máquina de Inducción

Para reducir la corriente durante el proceso de aceleración de la carga mecánica se han utilizado varios sistemas. Estos arrancadores difieren unos de otros en el método de reducción de tensión. Algunos utilizan el cambio de conexiones de las bobinas de la máquina, otros utilizan transformadores o autotransformadores y los más modernos se diseñan mediante convertidores electrónicos de potencia. Los arrancadores son costosos para ser aplicados a máquinas pequeñas, y el impacto de la corriente de arranque en estas máquinas no es importante ni para la máquina, ni para la red. Es necesario recordar que una máquina pequeña tiene una relación superficie-volumen muy grande y esto le permite disipar bien sus pérdidas. A continuación se detallan algunos ejemplos de los arrancadores más utilizados en la industria:

20.6.1. El arrancador estrella-delta:

El método más simple para reducir la tensión de una máquina consiste en conectarla inicialmente en estrella y cuando el deslizamiento es pequeño se cambia la conexión del motor a delta. La tensión final sobre cada bobina de la máquina debe ser su propia tensión nominal. Este método de arranque reduce la tensión en $\sqrt{3}$ veces la tensión nominal de la máquina y la corriente se reduce en esta misma proporción. Los pares eléctricos se reducen a un tercio del par a tensión nominal. Este procedimiento es uno de los más económicos, pero es necesario disponer de un sistema adecuado de tensiones que permita la conexión delta de la máquina durante el régimen permanente. El cambio de conexión se realiza cuando la máquina alcanza un deslizamiento cercano al de operación en la conexión estrella. La orden de cambio puede ser dada por un temporizador si se conoce la inercia de la carga o el tiempo de aceleración con tensión reducida. Si el cambio de conexión se realiza antes de que las corrientes disminuyan, el arrancador pierde efectividad. El tiempo total de arranque con este dispositivo es aproximadamente tres veces mayor que el arranque en directo de la máquina, esto es importante en el momento de especificar las protecciones del motor.

En la figura 20.24a se presenta el gráfico del par y la corriente en la máquina durante el proceso de arranque estrella-delta. Con estos arrancadores es posible lograr que la corriente máxima no exceda el valor $3,0 pu$, mientras que en un arranque directo, esta corriente podría alcanzar $5,0 pu$. En la figura 20.24b se muestra el diagrama de un arrancador industrial estrella-delta. Se utilizan tres contactores y un temporizador que los activa. Además deben incluirse protecciones térmicas para desconectar la máquina en caso de sobrecarga.

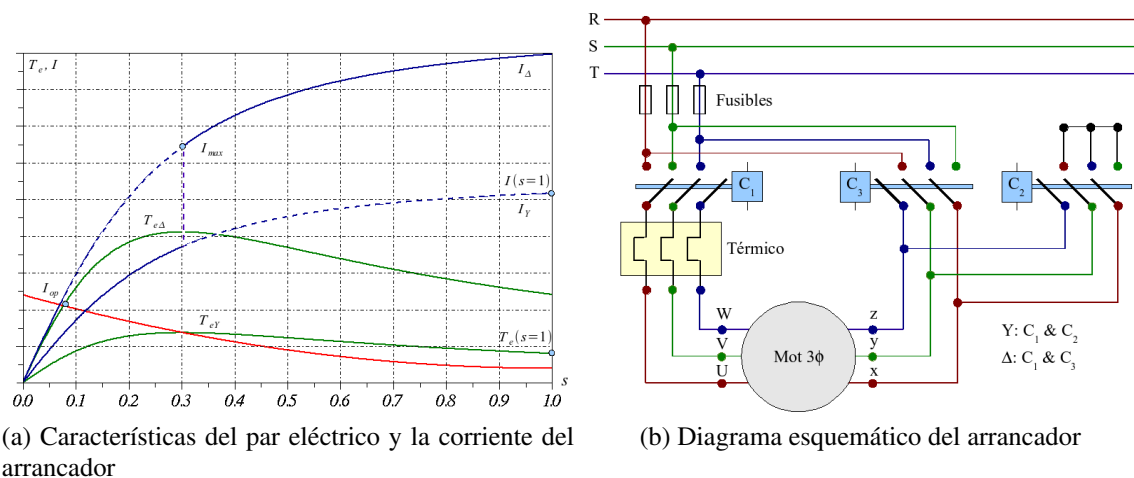


Figura 20.24: Arrancador estrella-delta

20.6.2. El arrancador por autotransformador:

El arrancador estrella-delta es muy económico, pero permite una sola posibilidad en la reducción de la tensión. Utilizando transformadores o autotransformadores, es posible utilizar una reducción arbitraria de la tensión. También es posible arrancar la máquina en varios pasos utilizando diferentes derivaciones del transformador. Este esquema de arranque es más costoso.

20.6.2.1. Arranque por conexión de bobinas serie-paralelo:

En algunas máquinas, cada una de las bobinas del estator se dividen en dos partes, con la intención de utilizar diferentes tensiones de alimentación, por ejemplo 208 V ó 416 V. Si las bobinas de cada fase se conectan en serie, la máquina se puede conectar a un sistema de 416 V. Si por el contrario las dos bobinas de cada fase se conectan en paralelo, el sistema de alimentación debe ser de 208 V. Existen esquemas similares al de la figura 20.24 para arrancar el motor de inducción en un sistema de 208 V con las bobinas de cada fase conectadas en serie, y posteriormente reconectar estas bobinas en paralelo para alcanzar el punto de operación de régimen permanente. Este esquema tiene un comportamiento similar al del arrancador estrella-delta, con la salvedad de que las corrientes se reducen a la mitad y el par eléctrico a la cuarta parte durante la aceleración.

20.7. Accionamientos de la Máquina de Inducción

Algunos accionamientos mecánicos regulados con máquina de inducción requieren poseer una respuesta dinámica ante variaciones de la señal de consigna. Al mismo tiempo es necesario reducir el efecto de las perturbaciones, como variaciones del par mecánico, sobre el funcionamiento del accionamiento. En general sistemas de baja inercia presentan este tipo de requerimiento. Un ejemplo claro de la necesidad de una buena respuesta dinámica, así como de un control que refleje fielmente el comportamiento dinámico del sistema, es el de un servomecanismo. Con el modelo en régimen permanente de la máquina de inducción, estos objetivos no se pueden alcanzar debido a que las estrategias de control que consideran este modelo, no se tiene en cuenta la respuesta dinámica de la máquina. Para mejorar estos esquemas de control es necesario considerar modelos dinámicos de la máquina de inducción para realizar las acciones de control sobre las variables eléctricas instantáneas que definen el par eléctrico, con el fin de mejorar las respuestas dinámicas del accionamiento. En la figura 20.25, se presenta la característica de tracción y frenado que debe suministrar el accionamiento de un motor de inducción. En esta curva se mantiene el par constante hasta que la máquina alcanza una determinada velocidad (ω_{base}) y posteriormente se controla a potencia constante, durante estas dos etapas se limita la corriente en los devanados del estator a un valor constante. Finalmente la máquina se lleva a su punto de operación a deslizamiento constante.

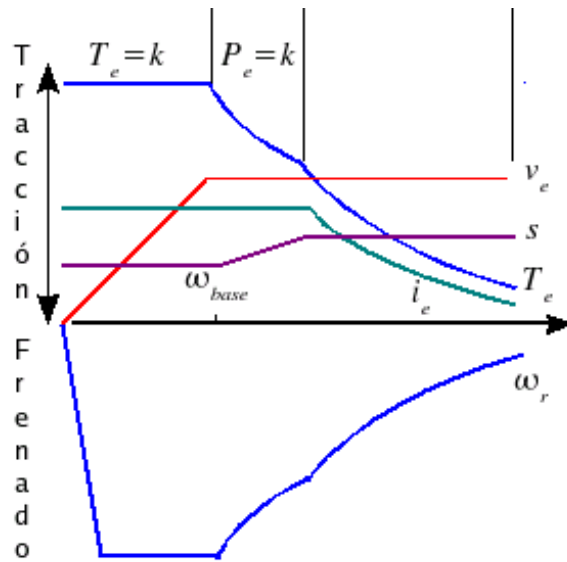


Figura 20.25: Característica de tracción y frenado de un motor de inducción

20.7.1. Control Escalar

20.7.1.1. Arranca Suaves

El arranca suave es el más simple y económico método de control de velocidad de la máquina de inducción, en la figura 20.26, se presenta el esquema del puente convertidor.

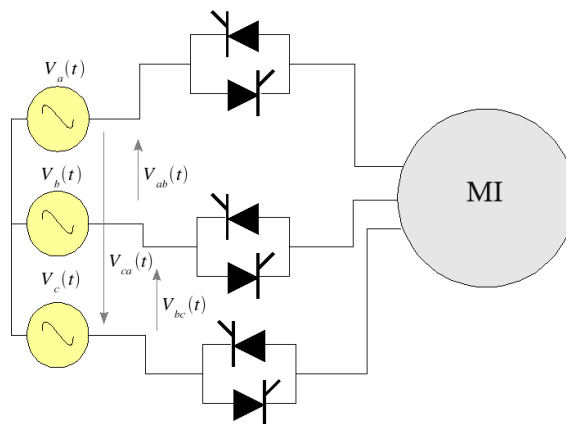


Figura 20.26: Esquema del arranca suave

En la figura 20.27, se presenta el diagrama de control de un arranca suave para motores de inducción. Este accionamiento consiste en regular la tensión efectiva a frecuencia fundamental del estator mediante el uso de un controlador AC - AC. Durante el arranque se limita la corriente en el estator controlando la tensión efectiva sobre los devanados de la máquina. Este accionamiento estima la tensión efectiva de referencia del puente convertidor utilizando una curva de par vs. corriente

a frecuencia industrial. Las máquinas que más se utilizan con este tipo de arrancador son la NEMA tipo D.

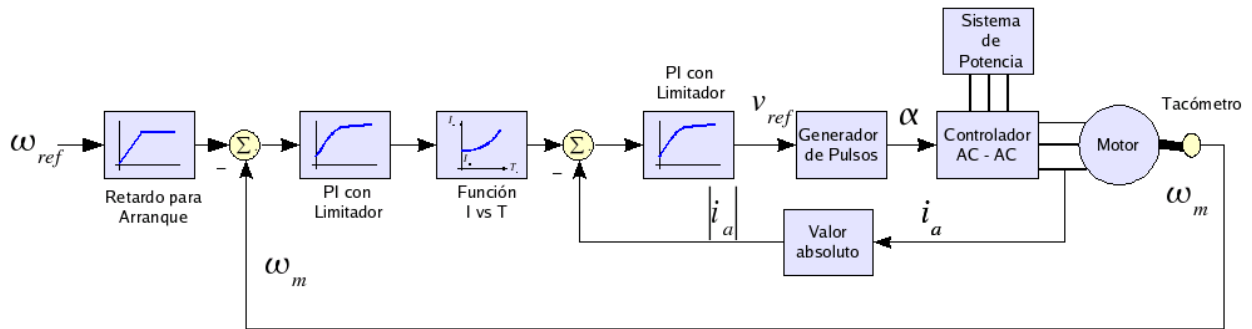


Figura 20.27: Esquema de control de un arranca suave

En la figura 20.28, se presenta en esquema de regulación de par y corriente al variar la tensión de alimentación de la máquina de inducción con el arranca suave, la intersección de estas características de par con el par resistencia de la carga determina el punto de operación del convertidor electromecánico.

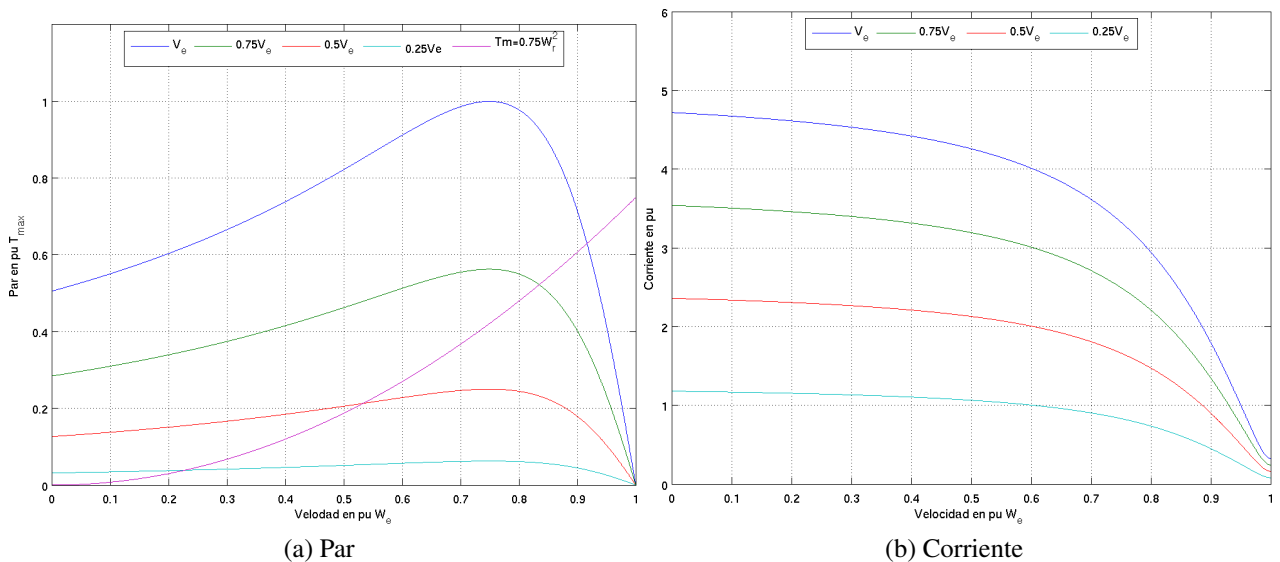


Figura 20.28: Característica de par y corriente para una máquina de inducción accionada con una arranca suave

20.7.1.2. Tensión - Frecuencia Constante

El primer controlador de velocidad de las máquinas de inducción y tal vez el más utilizado en la práctica hasta el presente, consiste básicamente en regular la fuente de alimentación, variando la frecuencia de las tensiones aplicadas a las bobinas del estator. En la figura 20.29, se presenta

el esquema constructivo de un controlador $v/f = cte$. La variación de la frecuencia afecta proporcionalmente las reactancias de magnetización y dispersión en el circuito equivalente, pero las resistencias se mantienen aproximadamente constantes si el efecto pelicular no es muy pronunciado. Para que la densidad de flujo magnético sea prácticamente constante, dentro de los límites de diseño de la máquina, es necesario variar la amplitud de la tensión de alimentación en la misma proporción que se varía la frecuencia. Con esta estrategia la magnitud del par eléctrico obtenido en cada velocidad puede ser cercano, o incluso superior al par nominal.

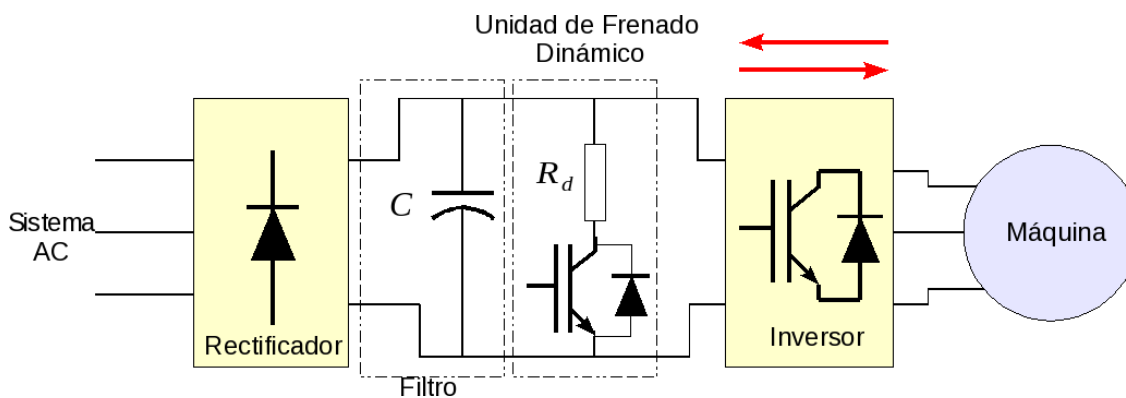


Figura 20.29: Esquema de un cicloconvertidor

En la figura 20.30, se presentan las características par eléctrico-velocidad angular del rotor para una máquina de inducción alimentada mediante cuatro frecuencias diferentes, manteniendo constante la relación entre la amplitud de la tensión de alimentación y la frecuencia. Incrementando paulatinamente la frecuencia, es posible acelerar una carga mecánica a través de los puntos 1, 2, 3, hasta alcanzar el punto 4. Si la variación de la frecuencia es lenta en comparación con la inercia del conjunto máquina carga mecánica, la corriente de la máquina en esta condición se reduce en comparación con un arranque directo a plena tensión.

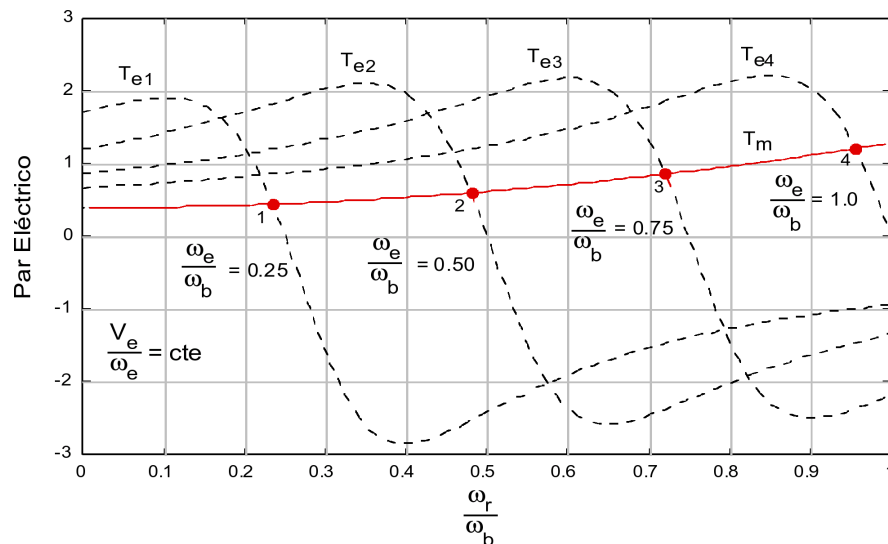


Figura 20.30: Característica par eléctrico velocidad para una máquina de inducción con control de tensión - frecuencia constante

El control tensión-frecuencia constante, permite mantener cualquier punto de operación intermedio, aumentar o reducir la velocidad mecánica de la máquina. Operando a bajas frecuencias, se incrementa el par eléctrico de arranque, pero el par eléctrico máximo de la máquina es prácticamente constante, siempre y cuando las reactancias del circuito equivalente de la máquina en régimen permanente sean mucho mayores que las respectivas resistencias.

Este controlador de velocidad requiere una fuente de alimentación alterna regulable en tensión y frecuencia. Para esta función, en el pasado se empleaban máquinas sincrónicas reguladas en velocidad y corriente de campo. Esta solución trasladaba el problema de regulación al eje mecánico del generador sincrónico. Mediante los interruptores electrónicos de alta velocidad es posible diseñar y construir fuentes de alimentación alternas reguladas en tensión y frecuencia. Los convertidores electrónicos de inversión fueron desarrollados durante la década de los treinta utilizando diversos dispositivos tales como: las válvulas de alto vacío con cátodos incandescentes, tiratrones o ignitrones. Esta tecnología evoluciona considerablemente durante las décadas de los setenta y ochenta con el auge de la electrónica de potencia y la aparición de los tiristores y transistores de alta potencia.

En la figura 20.31 se muestra el diagrama de un controlador de velocidad para un motor de inducción que utiliza el método de tensión - frecuencia constante. El sistema realimenta la velocidad o la posición del eje mecánico. Esta velocidad se compara con una referencia determinada por el usuario o por la aplicación. El error obtenido de la comparación entre las medidas y las referencias se utiliza para definir la frecuencia de operación del inversor y con la técnica de modulación definida para el convertidor se determinan las señales de encendido y apagado de las componentes semiconductores del puente. Algunos puentes convertidores regulan la tensión de la barra de continua a fin de no modular la tensión sobre la máquina con el inversor, esto simplifica el control del inversor a expensas de utilizar un rectificador controlado o un chopper en la barra de corriente continua.

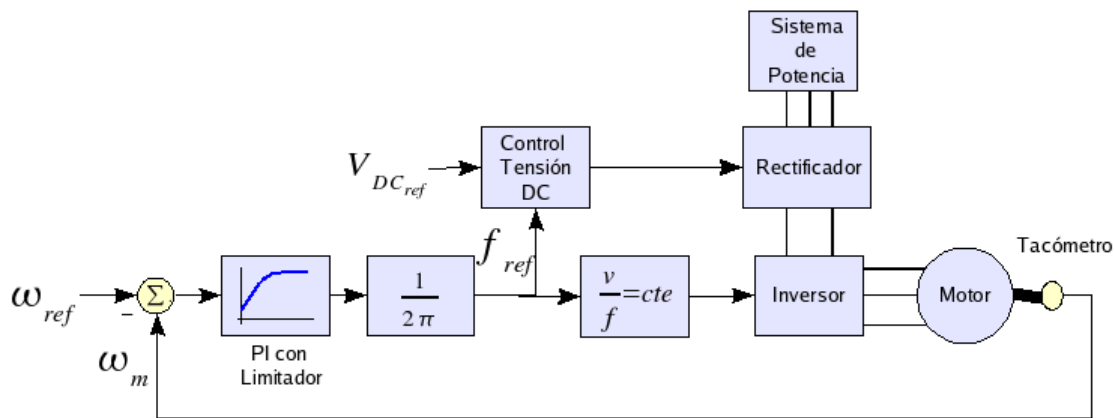


Figura 20.31: Variador de velocidad por control de tensión - frecuencia constante.

En la figura 20.32, 20.33 y 20.34 se presenta la respuesta del esquema de la figura 20.31 al seguir una consigna de velocidad, para una máquina de inducción de 3HP alimentada con un puente inversor de un pulso por semiciclo, desde un sistema trifásico de 220V a frecuencia industrial de 60Hz. La conversión AC - DC se realiza con un rectificador no controlado trifásico.

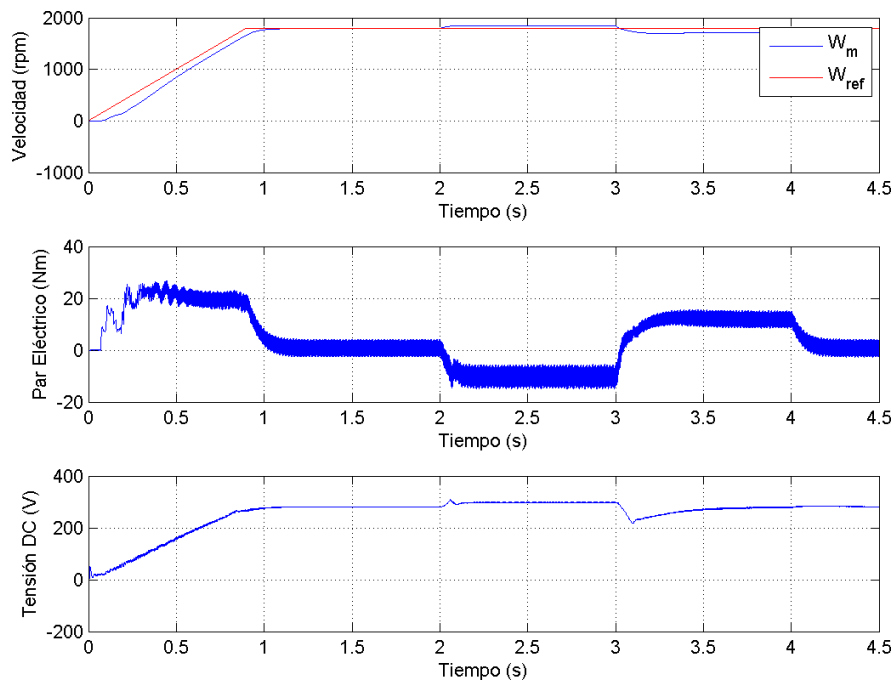


Figura 20.32: Velocidad mecánica, par y tensión de la barra de continua para el accionamiento de tensión frecuencia constante

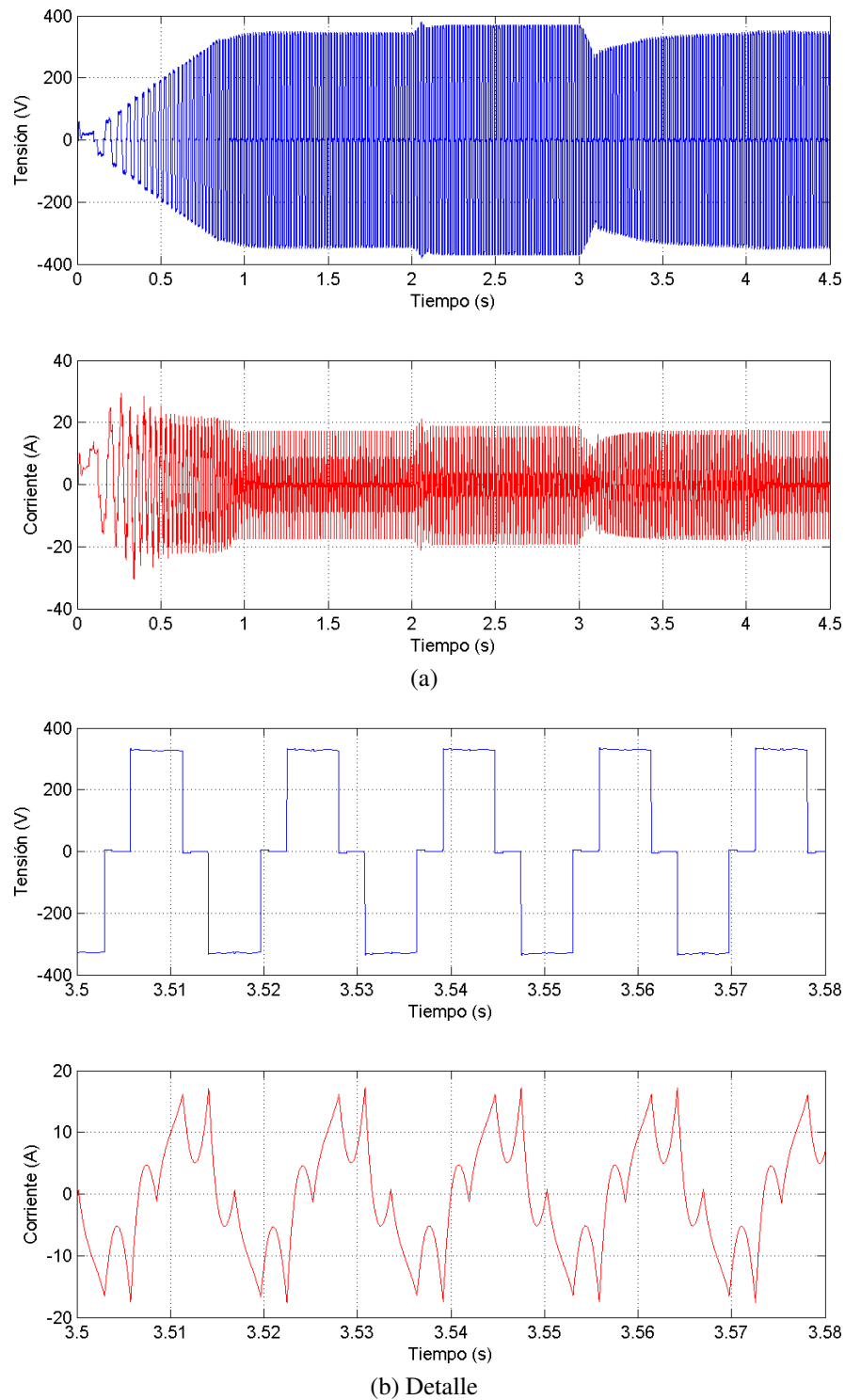


Figura 20.33: Tensión y corriente en la fase “a” del motor de inducción para el accionamiento de tensión frecuencia constante

En la figura 20.35, 20.36 y 20.37 se presenta la respuesta del esquema de la figura 20.31 al seguir una consigna de velocidad, para una máquina de inducción de 3HP alimentada con un puente

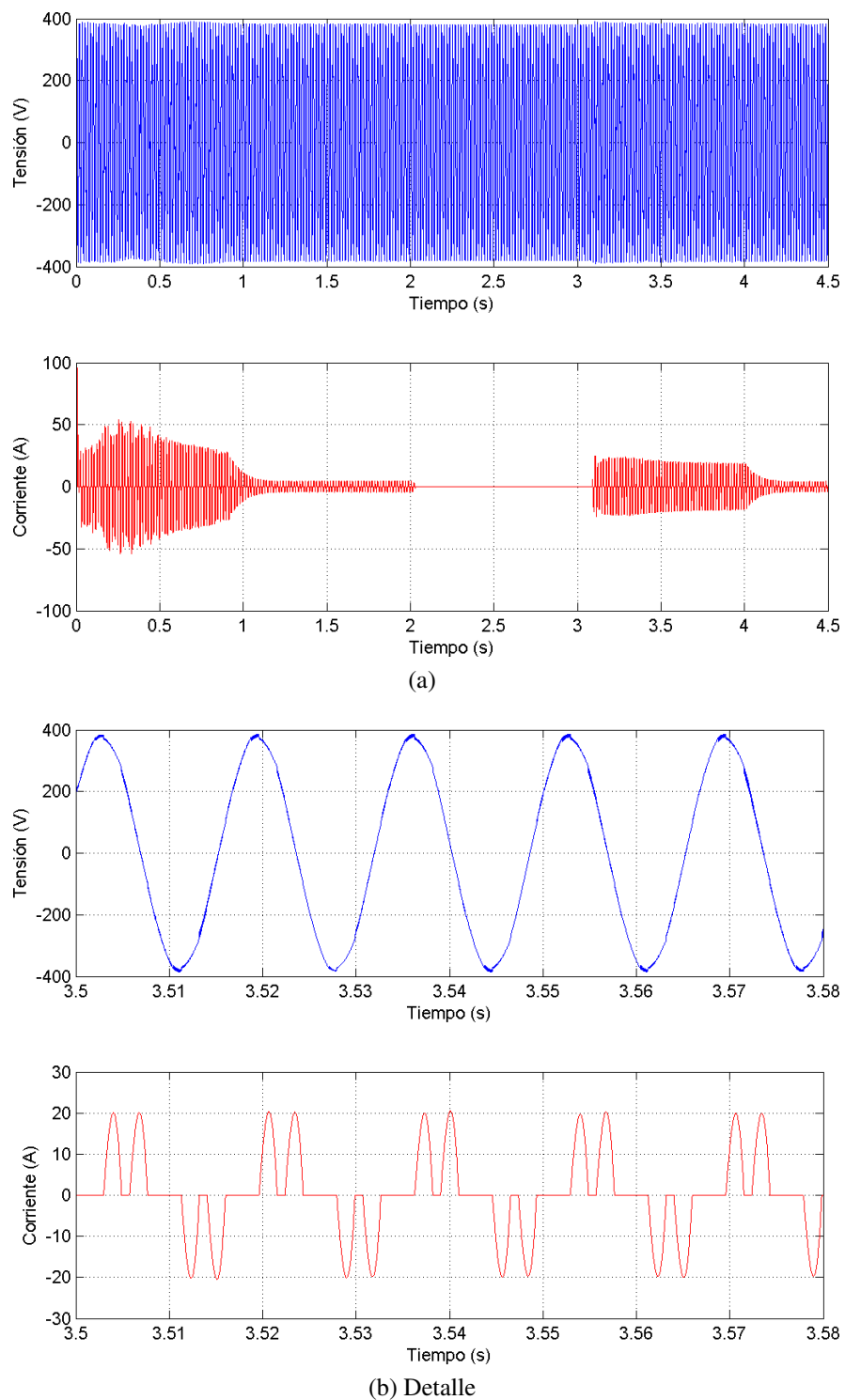


Figura 20.34: Tensión y corriente en la fase “a” de la fuente alterna para el accionamiento de tensión frecuencia constante

inversor con control por *SPWM*, desde un sistema trifásico de $220V$ a frecuencia industrial de $60Hz$. La conversión AC - DC se realiza con un rectificador no controlado trifásico.

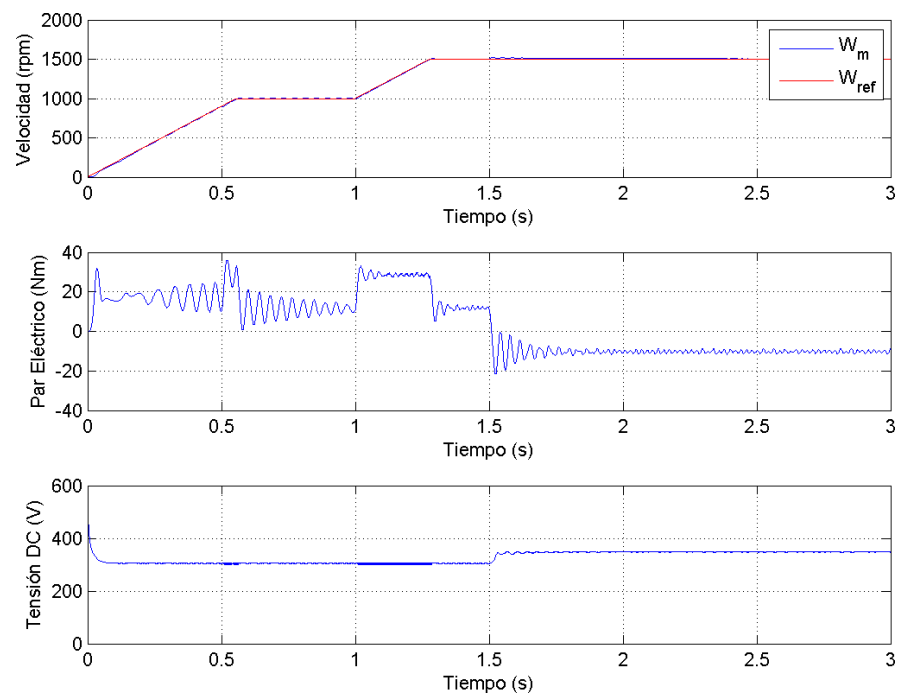


Figura 20.35: Velocidad mecánica, par y tensión de la barra de continua para el accionamiento de tensión frecuencia constante con *SPWM*

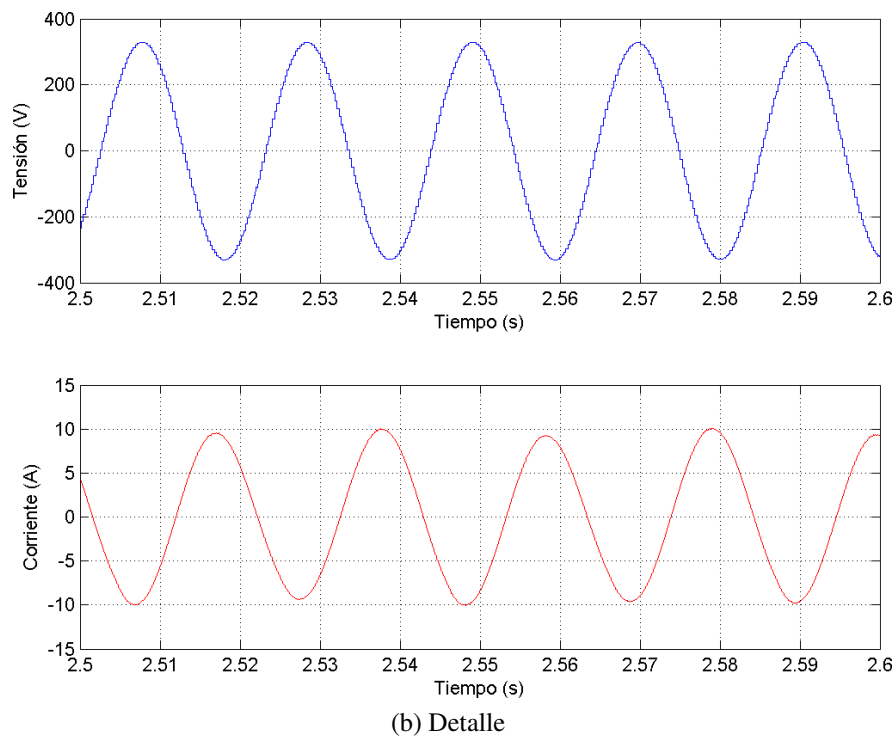
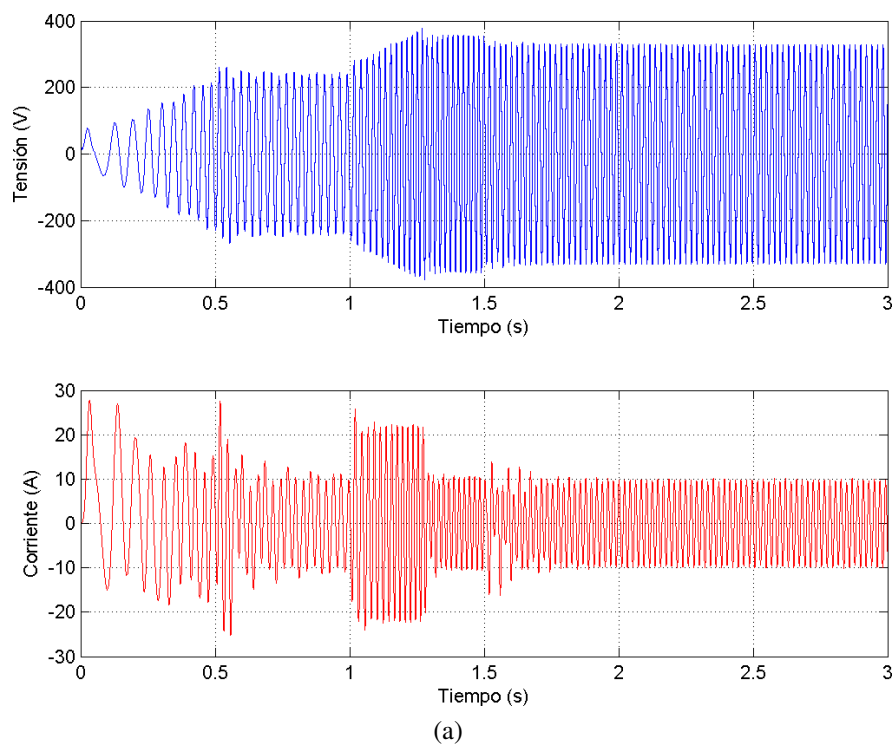


Figura 20.36: Tensión y corriente en la fase “a” del motor de inducción para el accionamiento de tensión frecuencia constante con *SPWM*

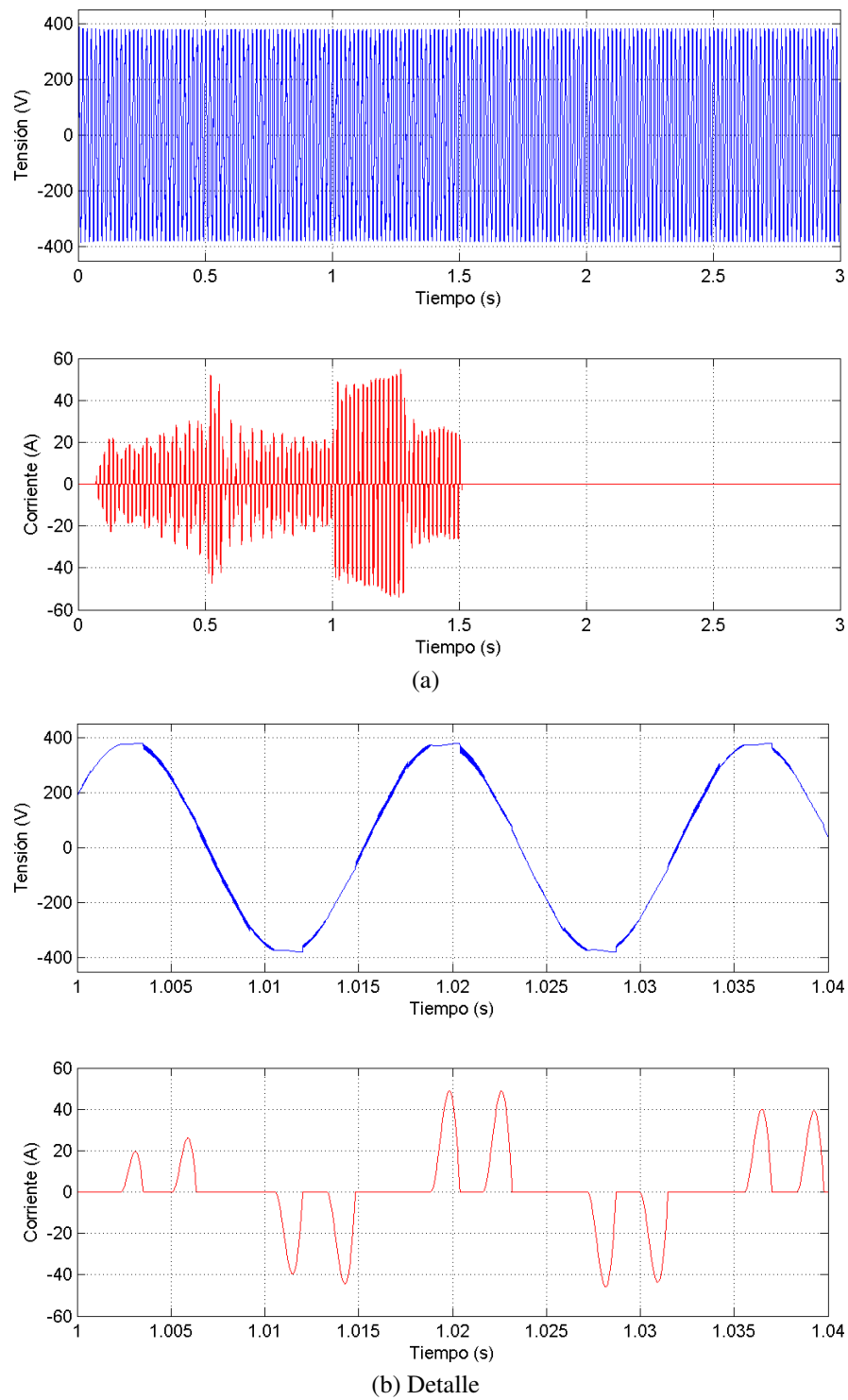


Figura 20.37: Tensión y corriente en la fase “a” de la fuente alterna para el accionamiento de tensión frecuencia constante con *SPWM*

20.7.1.3. Accionamiento a Deslizamiento Constante

El proceso de aceleración y frenado de la máquina de inducción se puede realizar controlando el par eléctrico mediante la frecuencia de deslizamiento. Esto permite acelerar el convertidor con par constante o variable, controlando la frecuencia de deslizamiento.

Para controlar el par de aceleración de la máquina es necesario mantener la relación tensión - frecuencia constante, esto con la finalidad de obtener una densidad de flujo magnético aproximadamente constante.

La frecuencia de deslizamiento debe estar limitada a un valor máximo que asegure el funcionamiento de la máquina de inducción en un punto estable de la característica par eléctrico velocidad mecánica y además permita limitar las corrientes durante el proceso de aceleración a un consumo igual a la capacidad de sobrecarga del equipo de potencia. En la figura 20.38, se presenta el esquema de un accionamiento que mantiene el deslizamiento constante. En este esquema la frecuencia de operación del inversor se determina a partir de la velocidad mecánica del rotor y del deslizamiento de referencia, mientras la tensión de referencia se calcula del error de velocidad. El control de la tensión se puede realizar con el inversor a través de técnicas de modulación o con un rectificador controlado o un chopper conectado en la barra de corriente continua.

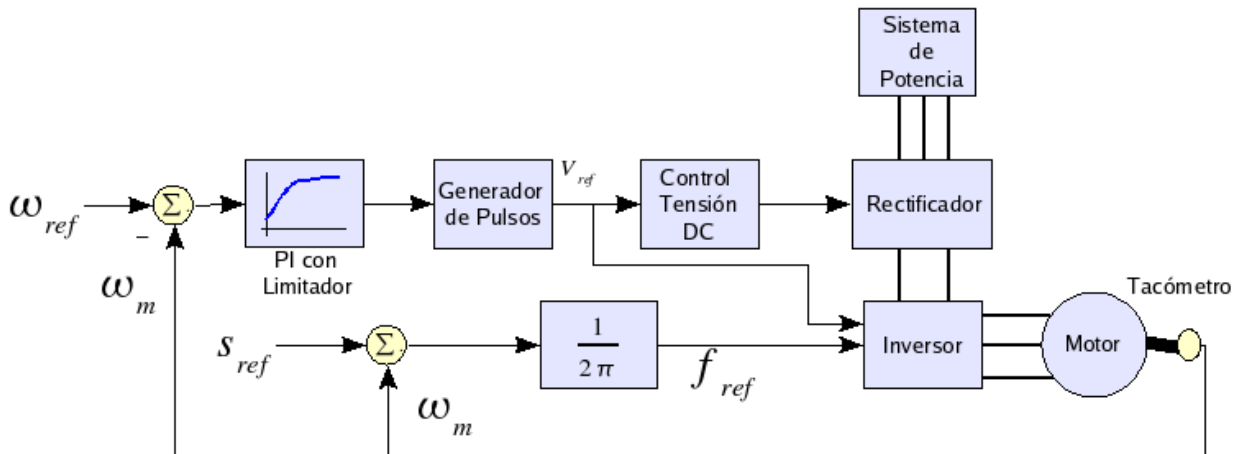


Figura 20.38: Variador de velocidad a deslizamiento constante

20.7.2. Control Vectorial por Campo Orientado

Aplicando la teoría de auto valores y auto vectores a la matriz de inductancia obtenida del modelo de la máquina de inducción en vectores espaciales (20.12), se pueden encontrar dos transformaciones de variables genéricas. Una transformación que refiere las variables del rotor al estator y la otra refiere las variables del estator al rotor.

Utilizando la transformación que refiere las variables del rotor al estator y escogiendo los coeficientes adecuados para anular la influencia de la derivada de las corrientes del estator en la ecuación del rotor, se obtiene la transformación a Vectores de Campo Orientado.

$$\vec{i}_m = \vec{i}_e + \frac{L_r}{L_{er}} \vec{i}_r e^{j\theta} \quad (20.41)$$

Proyectando las ecuaciones de la máquina de inducción del sistema (20.12) en un sistema de dos ejes coordenados ortogonales, uno solidario con la dirección de la variable transformada \vec{i}_m y el otro en cuadratura a esta dirección, se obtiene el modelo en campo orientado de la máquina de inducción.

$$v_{de} = R_e i_{de} + \hat{L}_e (p i_{de} + \delta i_{qs}) + \frac{L_{er}^2}{L_r} p i_m \quad (20.42)$$

$$v_{qe} = R_e i_{qe} + \hat{L}_e (p i_{qe} + \delta i_{ds}) + \frac{L_{er}^2}{L_r} p \delta i_m \quad (20.43)$$

$$p i_m = \frac{1}{T_m} (i_{de} - i_m) \quad (20.44)$$

$$p(\delta - \theta) = \frac{1}{T_m} \frac{i_{qe}}{i_m} \quad (20.45)$$

Donde:

$$\hat{L}_e = L_e - \frac{L_{er}}{L_r}$$

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}$$

En el modelo por campo orientado, el par eléctrico depende del producto de la corriente de magnetización y de la componente en cuadratura de la corriente del estator. Los sistemas de control por campo orientado se fundamentan en la posibilidad de ajustar el valor de estas dos variables.

$$T_e = \frac{L_{er}^2}{L_r} i_{qe} i_m \quad (20.46)$$

Tal como sucede en las máquinas de corriente continua, en las máquinas de inducción el circuito de campo tiene una constante de tiempo relativamente lenta. Por esta razón resulta ventajoso mantener la corriente de magnetización en el valor máximo posible, para incrementar la velocidad

de respuesta del sistema. La corriente de magnetización se controla mediante el ajuste de la componente directa de la corriente del estator. En régimen permanente estas dos corrientes tienen el mismo valor.

El principal problema de los controladores por campo orientado consiste en adecuar el valor de las corrientes o tensiones de alimentación a sus valores en variables transformadas. La transformación directa e inversa entre las coordenadas primitivas y las coordenadas de campo orientado dependen de la posición instantánea del vector espacial de la corriente de magnetización \vec{i}_m . Esto presenta un problema importante al diseñar este tipo de controlador, debido a que no resulta simple medir o estimar este ángulo. La medición requiere incluir sensores especiales en la máquina. Estimar esta posición requiere la integración en tiempo real del sistema de ecuaciones diferenciales que modelan la máquina de inducción. La primera solución es costosa y difícil de implementar en la práctica. La segunda alternativa depende de la velocidad del estimador, de la exactitud del modelo y de la variabilidad de los parámetros durante la operación. Por esta razón es conveniente la utilización de estimadores rápidos y precisos de las variables no medibles, entre los cuales encontramos las redes neurales y estimadores de estado. También es indispensable la estimación de los parámetros de la máquina de inducción en tiempo real. Estas dos técnicas permiten una solución rápida y eficiente para la estimación de la posición de la corriente de magnetización.

En la figura 20.39 se muestra el esquema de un controlador de velocidad de una máquina de inducción en coordenadas de campo orientado donde se utiliza un inversor controlado por corriente por modulación delta.

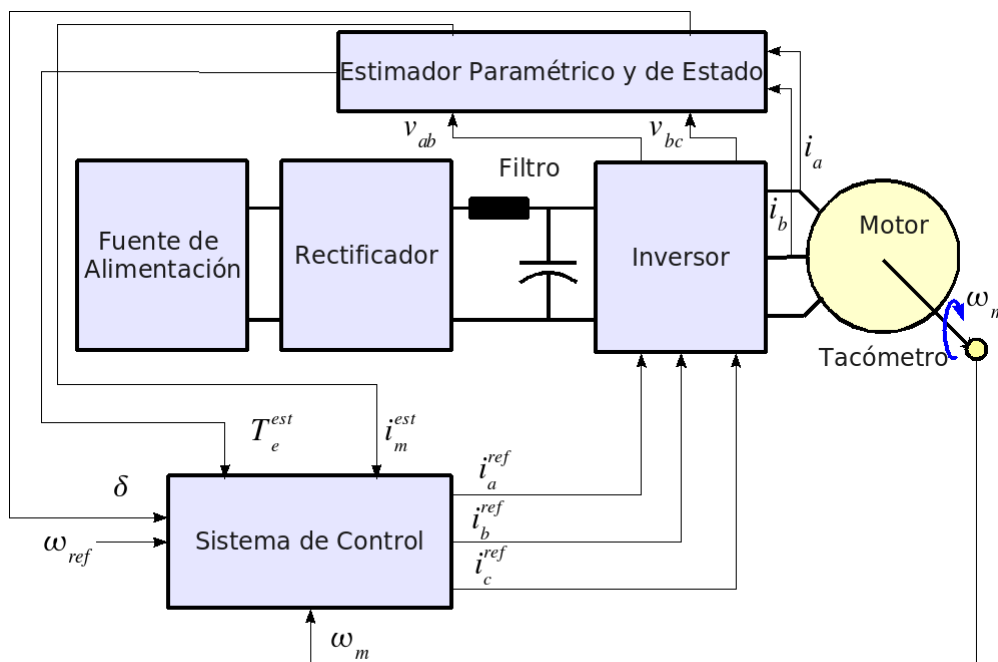


Figura 20.39: Controlador de velocidad en coordenadas de campo orientado.

El estimador de estado es el subsistema del controlador que permite determinar el valor de las variables no medibles de la máquina de inducción - par eléctrico y la posición y magnitud del vector espacial de la corriente de magnetización - en cada instante de tiempo a partir de la medición directa de las tensiones y corrientes de las bobinas del estator y la velocidad mecánica del rotor.

El sistema de control utilizado parte de la comparación entre la velocidad del rotor de la máquina de inducción con una referencia determinada para generar un error de velocidad. Este error, es utilizado por un bloque proporcional integral *PI*, para producir una consigna de par eléctrico. El par eléctrico obtenido por el estimador de la máquina de inducción, se compara con la consigna de par obtenida del *PI*. Este nuevo error se introduce en otro bloque *PI* para producir la consigna de la componente cuadratura de la corriente de referencia i_{qe}^{ref} . Simultáneamente se determina la corriente de magnetización de referencia i_m^{ref} , de acuerdo a la velocidad mecánica del rotor de la máquina de inducción para evitar la saturación del material magnético y no exceder los límites térmicos nominales. Al comparar la corriente de magnetización de referencia i_m^{ref} , con la corriente de magnetización que se obtiene del estimador i_m^{est} , se determina un error que se introduce a otro controlador *PI*, para producir la componente directa de la corriente de referencia i_{de}^{ref} . Las corrientes i_{de}^{ref} e i_{qe}^{ref} se transforman a variables primitivas y como resultado se obtienen las corrientes de referencia que el inversor debe seguir. En la figura 20.40, se presenta el diagrama de bloques del sistema de control propuesto.

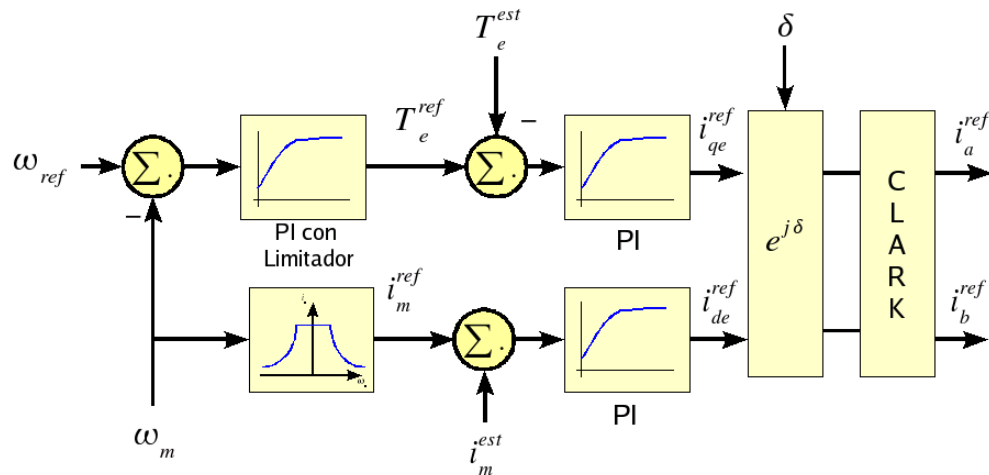


Figura 20.40: Diagrama de bloques del controlador.

El bloque limitador de par es una protección para evitar que en condiciones transitorias, la máquina pueda exceder los límites térmicos y mecánicos de diseño. Además durante la operación de la máquina, es conveniente que la corriente de magnetización se mantenga en el mayor valor posible, para incrementar la velocidad de respuesta del sistema. Cuando la máquina excede la velocidad sincrónica, es recomendable debilitar la corriente de magnetización para no exceder el límite de potencia nominal. Este valor límite viene dado por la corriente de magnetización de la máquina

de inducción en vacío cuando se le aplica en bornes, la tensión nominal. La corriente nominal de magnetización está definida por el valor de la inductancia mutua estator - rotor.

Por esta razón, se incluye en el sistema de control un bloque limitador de la corriente de magnetización en función de la velocidad mecánica de la máquina de inducción. Para deducir la función que describe el bloque limitador de la corriente de magnetización, se debe tener en cuenta las condiciones de régimen permanente de la máquina de inducción.

$$i_e^2 = i_{de}^2 + i_{qe}^2 = i_m^2 + i_{qe}^2 \Rightarrow i_{qe} = \sqrt{i_e^2 - i_m^2} \quad (20.47)$$

Sustituyendo la expresión de par eléctrico (20.46) en la ecuación (20.47) y multiplicando ambos miembros por la velocidad mecánica del rotor ω_m se obtiene:

$$\omega_m T_e = \frac{L_{er}^2}{L_r} \sqrt{i_e^2 - i_m^2} i_m \omega_m = P_{eje} \quad (20.48)$$

Evalutando la expresión (20.48) en los valores nominales de la máquina de inducción, se puede encontrar el valor de la velocidad a partir de la cual es conveniente debilitar la corriente de magnetización.

$$\omega_{critico} = \frac{P_{eje} L_r}{L_{er}^2 i_{m_n} \sqrt{i_e^2 - i_m^2}} = \frac{P_{eje_n}}{T_{e_n}} = \omega_{m_n} \quad (20.49)$$

A partir de ésta velocidad, se desea debilitar la corriente de magnetización para mantener la potencia constante. Reescribiendo la expresión (20.48) se obtiene:

$$\omega_m i_m \sqrt{i_e^2 - i_m^2} = \frac{P_{eje_n} L_r}{L_{er}^2} = cte. \quad (20.50)$$

Desarrollando la expresión (20.50) se obtiene la corriente de magnetización en función de la velocidad.

$$i_m^{ref} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{i_{e_n}^2 - \sqrt{i_{e_n}^4 - \frac{4P_{eje_n}^2 L_r^2}{L_{er}^4 \omega_m^2}}}} \quad (20.51)$$

La función que determina la referencia de la corriente de magnetización en función de la velocidad se ilustra en la figura 20.41.

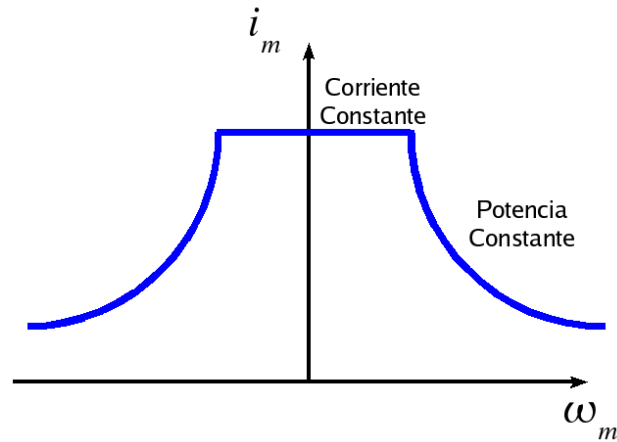


Figura 20.41: Corriente de magnetización de referencia en función de la velocidad mecánica del rotor.

El principal problema del estimador de estado de las variables internas de la máquina es la variabilidad de los parámetros con la temperatura, la frecuencia y la saturación magnética. En particular el estimador por campo orientado, es muy sensible a variaciones de la constante de tiempo del rotor T_r , debido a que influye directamente en la estimación de la magnitud y dirección instantánea del vector espacial de la corriente de magnetización. Los errores en la estimación de la verdadera posición angular de la corriente de magnetización, producen errores en la transformación que permite desacoplar el par eléctrico en dos componentes independientes.

Para solventar este problema es necesario la utilización de algoritmos de estimación paramétrica en tiempo real que permitan ajustar los parámetros del estimador de estado de la máquina de inducción ante su variación durante la operación de la misma.

En la figura 20.42, 20.43 y 20.44 se presenta la respuesta del esquema de la figura 20.39 al seguir una consigna de velocidad, para una máquina de inducción de 200 HP alimentada con un puente inversor, desde un sistema trifásico de 460 V a frecuencia industrial de 60 Hz. La conversión AC - DC se realiza con un rectificador no controlado trifásico.

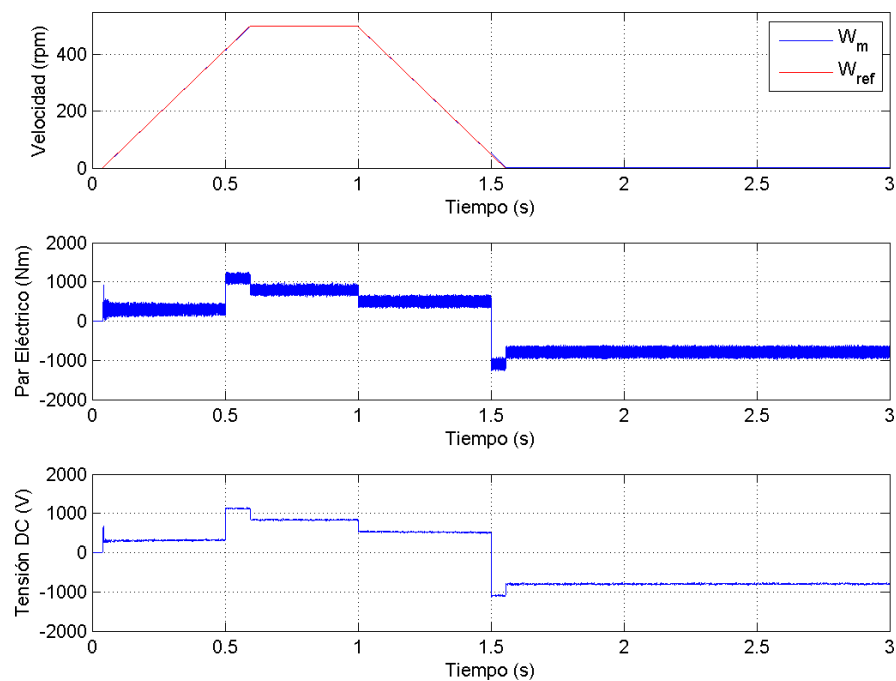


Figura 20.42: Velocidad mecánica, par y tensión de la barra de continua para el accionamiento de campo orientado

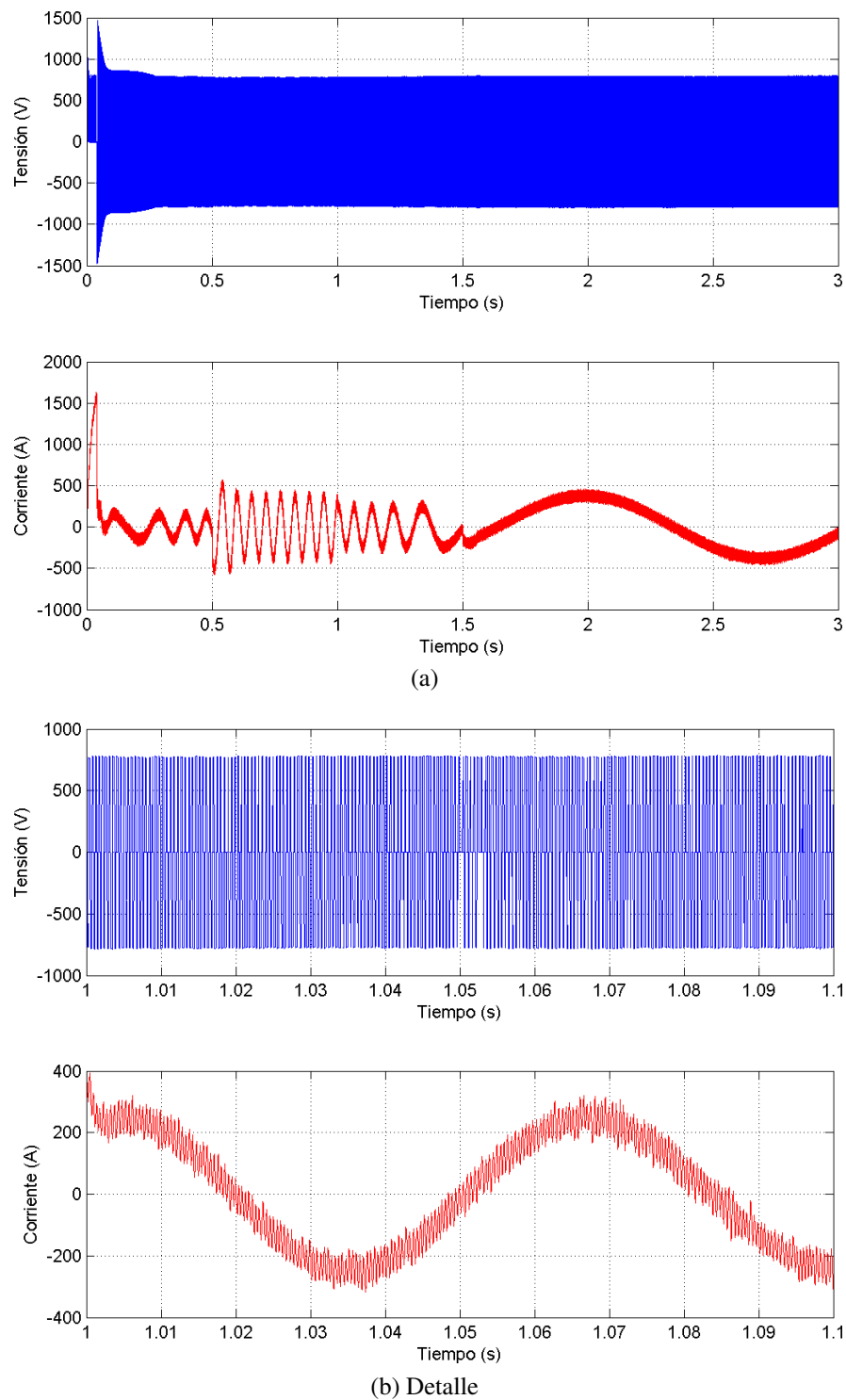


Figura 20.43: Tensión y corriente en la fase “a” del motor de inducción para el accionamiento de campo orientado

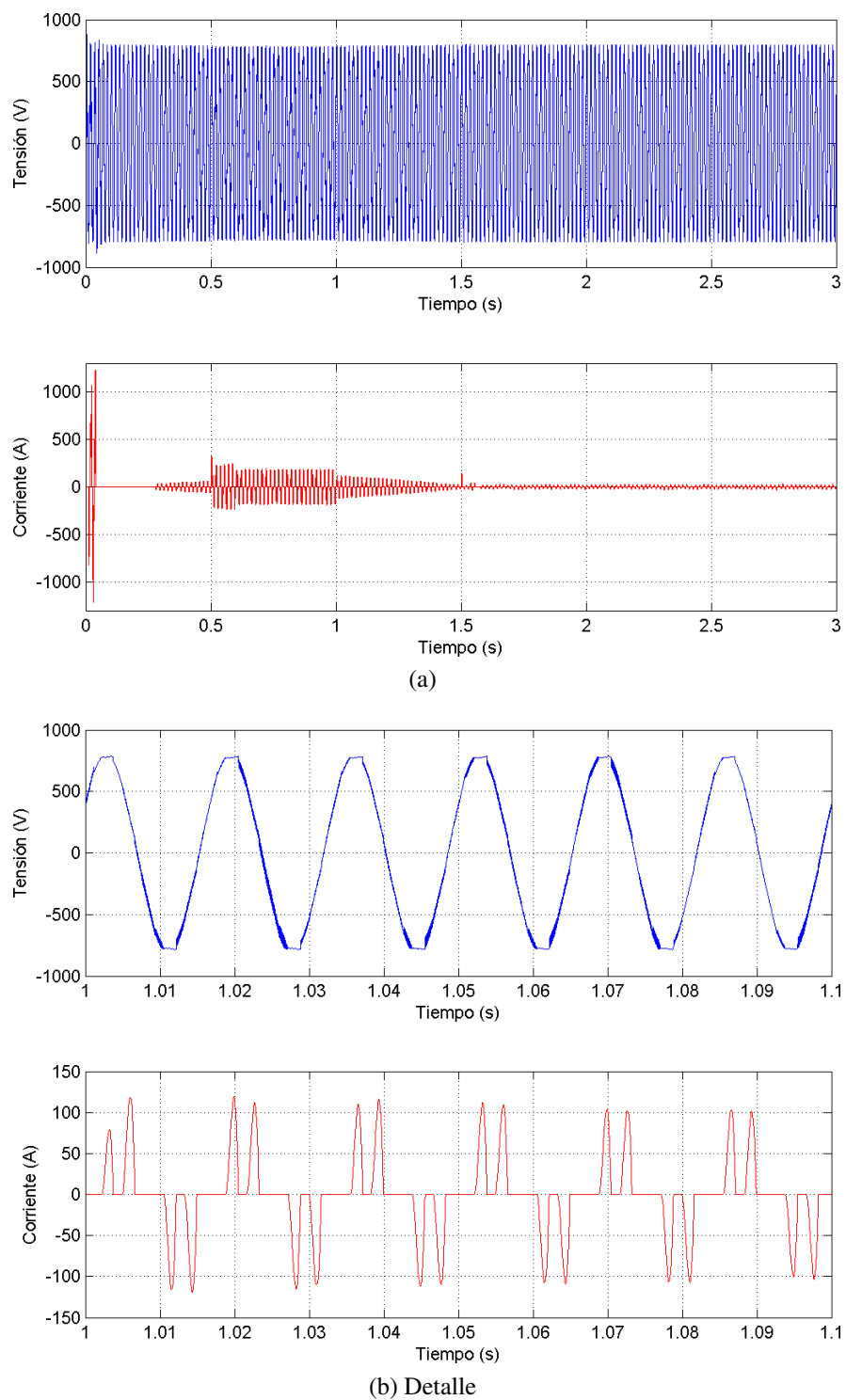


Figura 20.44: Tensión y corriente en la fase “a” de la fuente alterna para el accionamiento de campo orientado

20.7.3. Control Vectorial Directo de Par y Flujo

Durante la década de los ochenta, Takahashi introduce una técnica avanzada de control escalar denominada control directo de par y flujo (*DTC*) o direct self-control (*DSC*), la cual suministra la consigna de disparo para las componentes de un inversor en tensión. Esta técnica permite obtener una característica dinámica del accionamiento comparable con la de otros accionamientos por control vectorial. Recientemente, este esquema de control ha sido introducido comercialmente en diferentes convertidores de distintas industrias despertando un alto interés a nivel industrial. Este esquema, como su nombre lo indica, se basa en el control del par eléctrico de la máquina y del flujo en el estator, a través de la selección del vector espacial de tensión más apropiado de una tabla, para seguir la referencia de estas señales. La información de disparo de las componentes del inversor para cada vector espacial de tensión está contenida en la tabla de control.

20.7.3.1. Expresión vectorial de par eléctrico y del enlace de flujo en el estator

La expresión (20.20) puede ser representada de forma más sencilla, a través del producto vectorial de la corriente del rotor y del estator como:

$$T_e = L_{er} (i_{qe} i_{dr} - i_{de} i_{qr}) = L_{er} (\vec{i}_r^e \times \vec{i}_e^e) \quad (20.52)$$

El enlace de flujo del estator se puede obtener, a partir de la integración directa de la fuerza electromotriz en los devanados del estator.

$$\vec{\lambda}_e = \int (\vec{v}_e - R_e \vec{i}_e) dt = L_e \vec{i}_e + L_{er} \vec{i}_r^e \quad (20.53)$$

donde:

$$\vec{x}_e = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ae}(t) & x_{be}(t) & x_{ce}(t) \end{bmatrix}^t \quad (20.54)$$

$\forall x \in \{v, i, \lambda\}$

$$\vec{x}_e = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-j\frac{\pi}{6}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{abe}(t) & x_{bce}(t) & x_{cae}(t) \end{bmatrix}^t \quad (20.55)$$

$\forall x \in \{v\}$

Para calcular el enlace de flujo del estator a partir de la integral de la expresión (20.53) es necesario realizar la medición directa de la tensión y corriente en los terminales del estator.

Despejando el vector especial de la corriente del rotor de la expresión (20.53) y sustituyendo el resultado en la expresión (20.52), se obtiene el par eléctrico de la máquina de inducción en función del vector espacial del flujo y la corriente del estator.

$$T_e = \vec{\lambda}_e \times \vec{i}_e \quad (20.56)$$

El único parámetro del modelo de la máquina de inducción involucrado en la estimación del par eléctrico instantáneo y del enlace de flujo del estator, es la resistencia del estator (R_e). El error introducido en la estimación por la variación de este parámetro con la temperatura es despreciable y puede ser reducido utilizando métodos de estimación paramétrica en tiempo real.

El puente inversor trifásico genera ocho diferentes salidas de tensión, dependiendo la tensión en la barra de corriente continua y la conectividad de los seis interruptores estáticos que conforman. Utilizando la expresión (20.55) para cada una de estas posibles salidas, se puede encontrar el vector espacial de tensión aplicado sobre los terminales del convertidor electromecánico.

$$\vec{v}_e = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \mathbf{Sw} V_{DC} \quad (20.57)$$

Donde, \mathbf{Sw} es un vector que representa el estado de los interruptores del puente de dimensión 3×1 . En este vector, el elemento "1" corresponde al encendido del interruptor superior, mientras que "0" indica el encendido del interruptor inferior de la misma rama. Seis de los vectores espaciales de tensión poseen magnitud uniforme y se encuentran desfasados entre ellos. Los otros dos estados están asociados al vector espacial nulo.

20.7.3.2. Estrategia de control directo de par

En la figura 20.45, se presenta el diagrama en bloques del controlador directo de par. La magnitud del enlace de flujo y el par eléctrico de referencia son comparados con los estimados de la máquina de inducción, que se calculan a partir, de la corriente del estator, el vector de interrupciones del inversor y la tensión de la barra de continua. Los errores de par y flujo son procesados en dos comparadores de histéresis de tres y dos niveles respectivamente, a partir de estos resultados y de la posición angular del enlace de flujo del estator se determina el vector de interrupciones del inversor. El algoritmo del controlador directo de par se fundamenta en escoger el vector espacial de tensión que maximice el cambio necesario en el enlace de flujo del estator, para ajustar el par eléctrico a partir de la expresión 20.56.

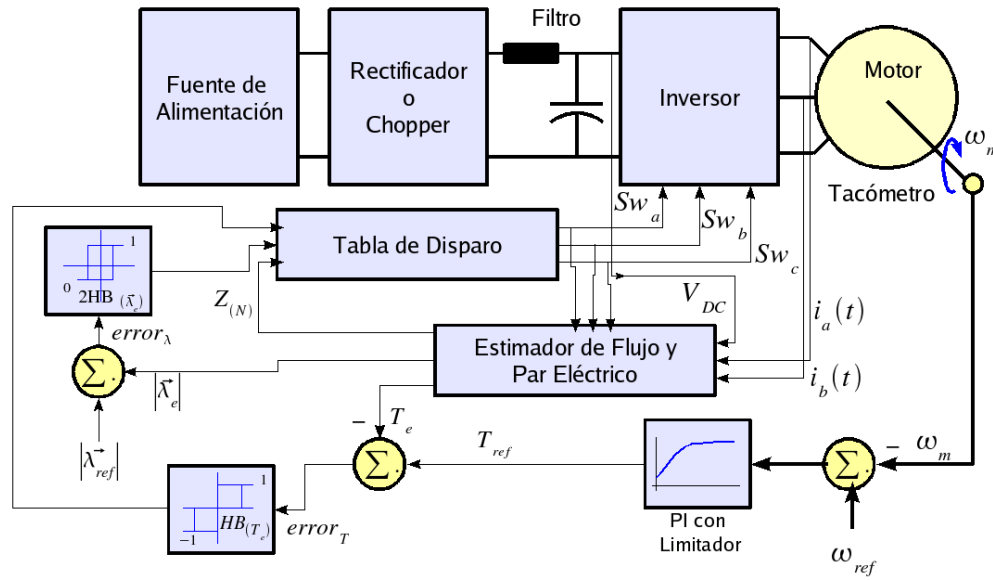


Figura 20.45: Diagrama en bloques del controlador directo de par.

El controlador por histéresis del enlace de flujo posee dos salidas digitales de acuerdo al valor del error en la magnitud del enlace de referencia y el estimado y de la banda de histéresis ($HB(\vec{\lambda}_e)$) utilizada, de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} S(\vec{\lambda}_e) &= 1 \quad \forall \quad error|\vec{\lambda}_e| > HB(\vec{\lambda}_e) \\ S(\vec{\lambda}_e) &= 0 \quad \forall \quad error|\vec{\lambda}_e| < -HB(\vec{\lambda}_e) \end{aligned} \quad (20.58)$$

donde: $2HB(\vec{\lambda}_e)$ corresponde al ancho de banda de histéresis del controlador. Este controlador al mantener la magnitud del enlace de flujo del estator limitada a una banda de histéresis origina una trayectoria circular del vector espacial del enlace de flujo del estator. Sustituyendo la expresión (20.57) en la (20.53), se obtiene el vector espacial del enlace de flujo del estator en función de la salida del puente inversor.

$$\vec{\lambda}_e = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \mathbf{S} \mathbf{w} V_{DC} \cdot t - R_e \cdot \int \vec{i}_e dt + \vec{\lambda}_e \Big|_{t=0} \quad (20.59)$$

Considerando que las caídas de tensión en los devanados del estator son pequeñas, las variaciones en la dirección del enlace de flujo del estator $\vec{\lambda}_e$, son ocasionadas por la dirección del vector espacial de tensión aplicado al convertidor. Es decir, una escogencia adecuada del vector espacial de tensión aplicado a la máquina de inducción, determina un control sobre la magnitud y trayectoria del enlace de flujo del estator. En la figura 20.46 se puede observar la trayectoria del vector espacial del enlace de flujo del estator y la variación en el enlace de flujo del estator correspondiente a cada uno de los vectores espaciales de tensión del inversor para un instante de tiempo Δt .

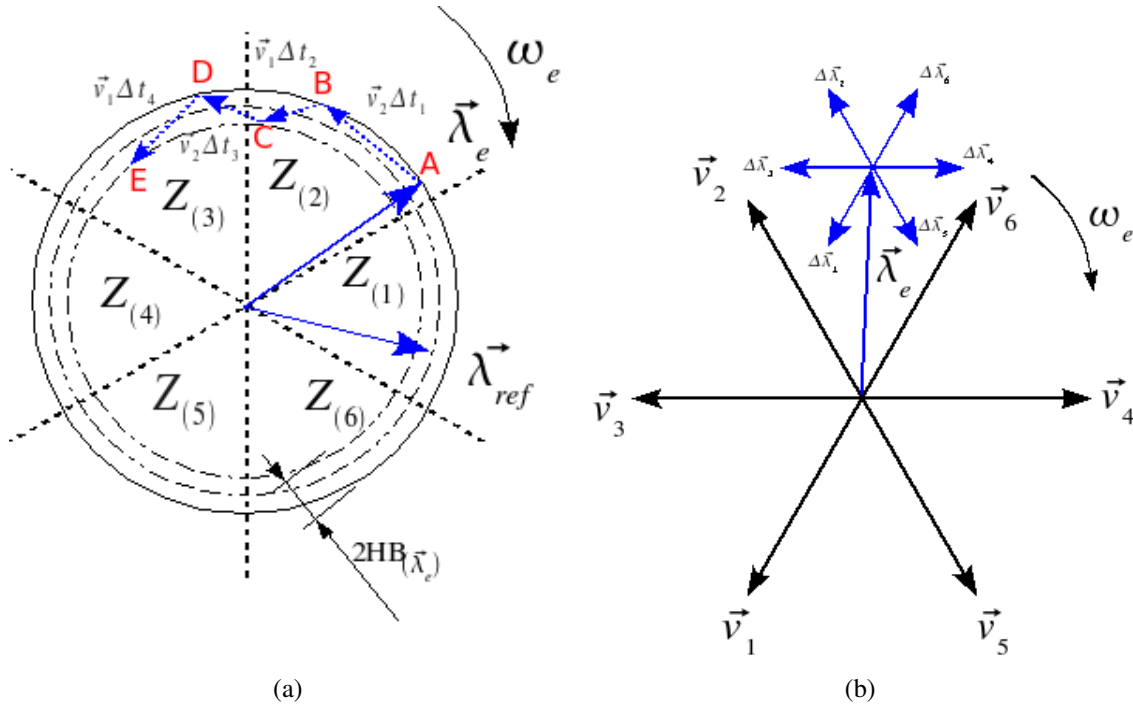


Figura 20.46: (a) Trayectoria del vector especial del enlace de flujo del estator, (b) variación del enlace de flujo en función del vector espacial de tensión del inversor.

El controlador por histéresis del par eléctrico posee tres salidas digitales de acuerdo al valor del error en la magnitud del par de referencia y el estimado y de la banda de histéresis ($HB_{(T_e)}$) utilizada, de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} S_{(T_e)} &= 1 \quad \forall \quad error_{T_e} > HB_{(T_e)} \\ S_{(T_e)} &= -1 \quad \forall \quad error_{T_e} < -HB_{(T_e)} \\ S_{(T_e)} &= 0 \quad \forall \quad -HB_{(T_e)} < error_{T_e} < HB_{(T_e)} \end{aligned} \quad (20.60)$$

La estrategia del controlador directo de par, se fundamenta en ajustar el par eléctrico al de referencia, mediante el control de la magnitud y sentido de rotación del vector espacial del enlace de flujo del estator. Esta posibilidad de ajuste, define seis zonas de operación dependiendo de la posición del vector espacial del enlace de flujo del estator. Estas zonas de control coinciden con la localización de los vectores espaciales de tensión del inversor. Cada uno de estas seis zonas de control tiene un ancho de $\pi/3$ radianes y vienen dados por la expresión (20.61). En la figura 20.46 (a) se puede observar las seis zonas de operación.

$$(2N-3) \cdot \frac{\pi}{6} \leq Z_{(n)} \leq (2N-1) \cdot \frac{\pi}{6} \quad (20.61)$$

En cada zona de operación, una escogencia adecuada del vector espacial de tensión permite incrementar o decrementar la magnitud del enlace de flujo del estator y alterar su sentido de rotación.

Manteniendo las magnitudes de corriente y el enlace de flujo constante, se puede controlar el par eléctrico resultante, modificando el ángulo relativo entre el enlace de flujo y la corriente del estator. Este ángulo relativo se puede variar controlando el sentido de rotación del vector espacial del enlace de flujo en el estator.

Por ejemplo, si el vector espacial del enlace de flujo se encuentra en la primera zona de operación $Z_{(1)}$, y se desea aumentar la magnitud del enlace, se debe aplicar sobre los terminales de la máquina el vector espacial de tensión \vec{v}_2 si el par de referencia es menor que la referencia o el vector espacial \vec{v}_6 si el par eléctrico es mayor que la referencia.

En la tabla 20.2 se presenta la secuencia de disparo del inversor para la estrategia de control directo de par, a partir de la posición del enlace de flujo del estator, y la salida de los comparadores de histéresis del flujo y par eléctrico. Con la finalidad de incrementar la velocidad de cambio del par eléctrico y magnitud del enlace de flujo, no se utiliza el vector espacial de tensión que se encuentra dentro de la zona de localización del enlace de flujo, así como tampoco el localizado en la zona opuesta.

Tabla 20.2: Secuencia de disparo del inversor para el controlador directo de par.

$S_{(\vec{\lambda}_e)}$	$S_{(T_e)}$	$Z_{(1)}$	$Z_{(2)}$	$Z_{(3)}$	$Z_{(4)}$	$Z_{(5)}$	$Z_{(6)}$
1	1	\vec{v}_1	\vec{v}_5	\vec{v}_4	\vec{v}_6	\vec{v}_2	\vec{v}_3
1	0	\vec{v}_7	\vec{v}_0	\vec{v}_7	\vec{v}_0	\vec{v}_7	\vec{v}_0
1	-1	\vec{v}_5	\vec{v}_4	\vec{v}_6	\vec{v}_2	\vec{v}_3	\vec{v}_1
0	1	\vec{v}_2	\vec{v}_3	\vec{v}_1	\vec{v}_5	\vec{v}_4	\vec{v}_6
0	0	\vec{v}_0	\vec{v}_7	\vec{v}_0	\vec{v}_7	\vec{v}_0	\vec{v}_7
0	-1	\vec{v}_6	\vec{v}_2	\vec{v}_3	\vec{v}_1	\vec{v}_5	\vec{v}_4

El estimador de par y flujo de la figura 20.45, se basa en la utilización de las expresiones (20.56), (20.57) y (20.61) para el cálculo de las variables par, flujo y zona de operación.

Consideramos el ejemplo de la figura 20.46 (b), el enlace de flujo estimado se encuentra en la zona de operación $Z_{(2)}$ punto "A" y es mayor que la referencia ($HB_{(\vec{\lambda}_e)} = 0$) y adicionalmente, el par eléctrico es mayor a la referencia ($HB_{(T_e)} = -1$), para corregir esta situación es necesario, como se observa en la tabla 20.2, aplicar el vector espacial de tensión \vec{v}_6 para desplazar el enlace de flujo al punto "B". Este procedimiento es el utilizado por el control directo de par, para el ajuste del enlace de flujo del estator y del par eléctrico a los valores de referencia.

Las respuestas dinámicas de los accionamientos de la máquina de inducción que utilizan control directo de par, son comparables a los obtenidos con otros esquemas de control vectorial. La estimación del enlace de flujo de estator y del par eléctrico instantáneo sólo depende de la resistencia del estator (R_e), a diferencia de otros controladores vectoriales como el de campo orientado en

los que los estimadores, dependen de un conjunto mayor de parámetros del modelo de la máquina de inducción. Entre estos parámetros encontramos: las inductancias del estator, rotor y mutua del estator-rotor, la constante de tiempo del rotor, estos parámetros son fuertemente afectados durante la operación del convertidor electromecánico, por las variaciones del grado de saturación magnética y la temperatura. El efecto por variaciones de la temperatura sobre la resistencia del estator es despreciable y puede ser corregida en línea con métodos de estimación paramétrica.

Entre las características del control directo de par tenemos:

- No utiliza realimentación en corriente.
- No utiliza el esquema tradicional de control por ancho de pulso.
- Los controladores por histéresis del enlace de flujo del estator y del par eléctrico generan un rizado sobre estas variables.
- La frecuencia de conmutación del puente inversor no es constante y depende de la banda de histéresis de los controladores de par eléctrico y del enlace de flujo.

En la figura 20.47, 20.48 y 20.49 se presenta la respuesta del esquema de la figura 20.45 al seguir una consigna de velocidad, para una máquina de inducción de 200HP alimentada con un puente inversor, desde un sistema trifásico de 460V a frecuencia industrial de 60Hz. La conversión AC - DC se realiza con un rectificador no controlado trifásico.

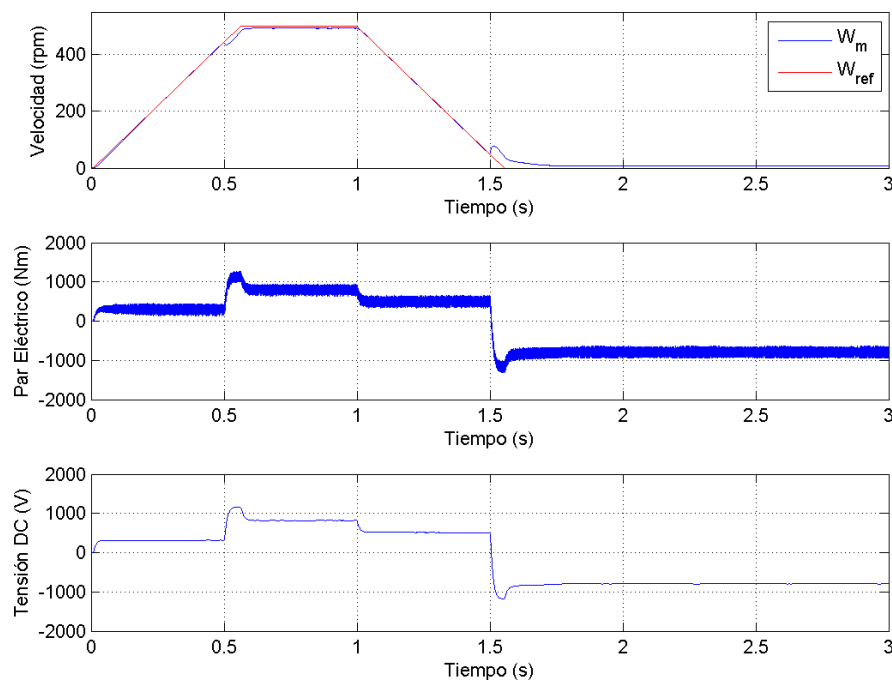


Figura 20.47: Velocidad mecánica, par y tensión de la barra de continua para el accionamiento de DTC

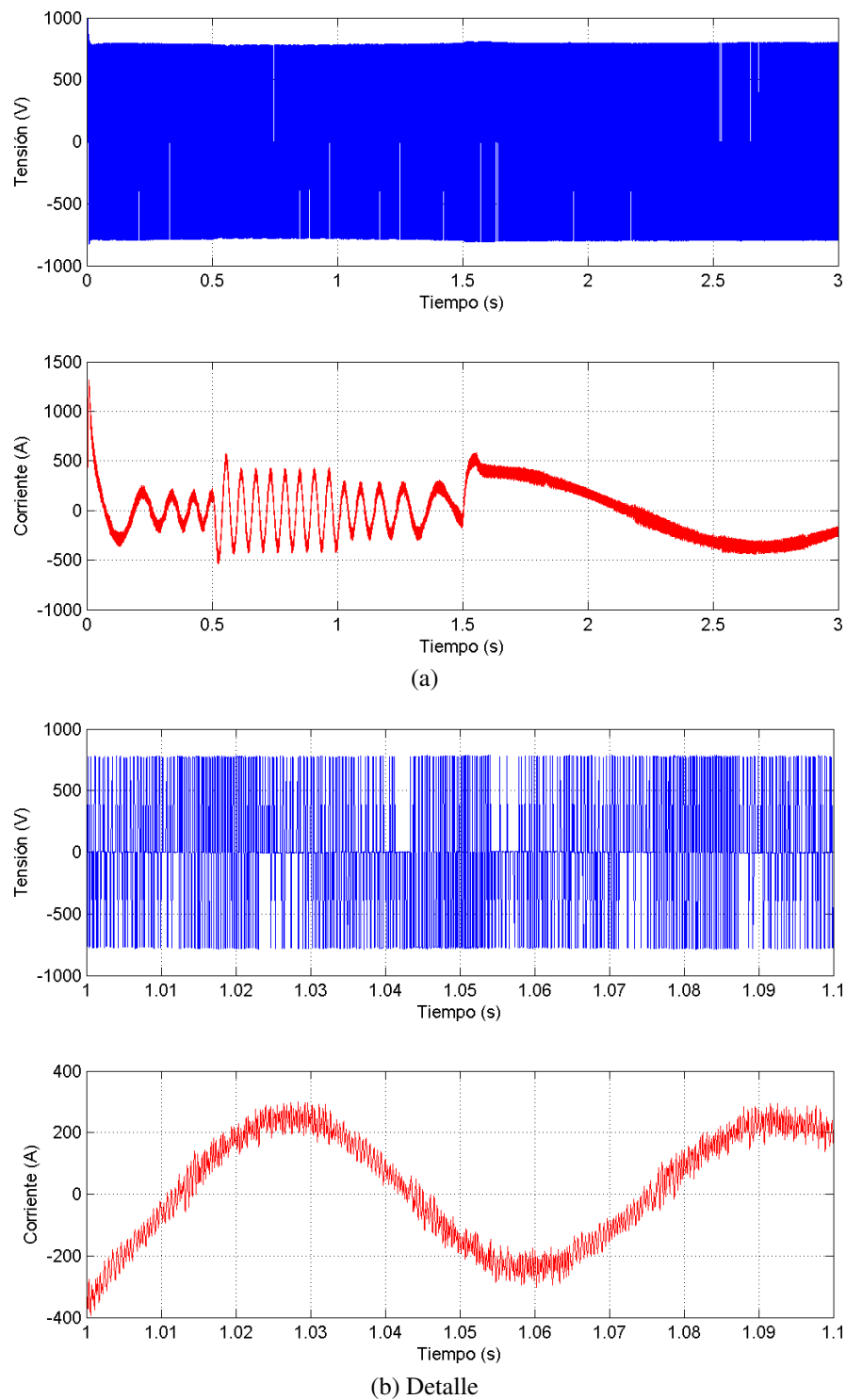
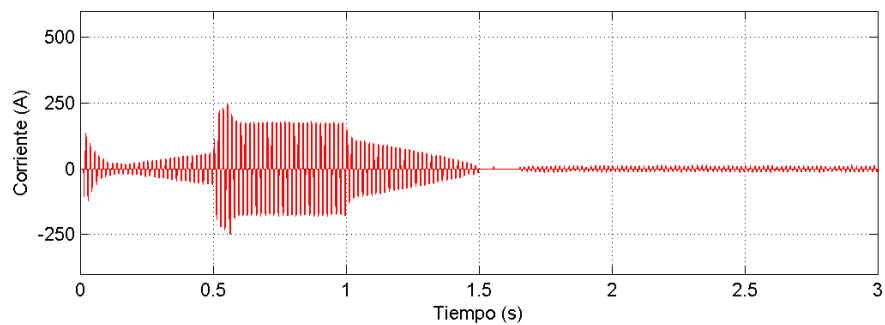
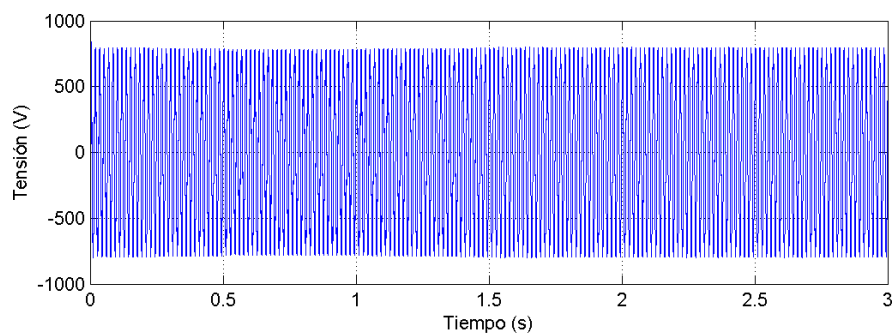
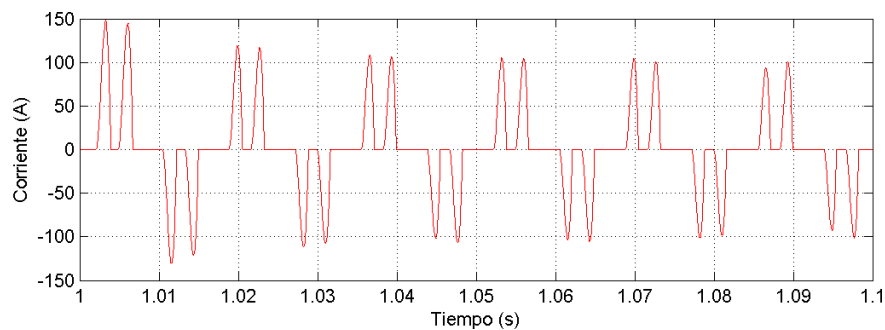
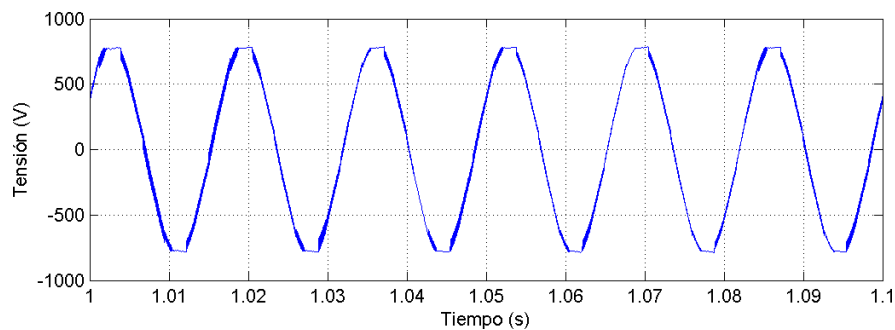


Figura 20.48: Tensión y corriente en la fase “a” del motor de inducción para el accionamiento de *DTC*



(a)



(b) Detalle

Figura 20.49: Tensión y corriente en la fase “a” de la fuente alterna para el accionamiento de *DTC*

20.8. Ejercicios

1. Un inversor trifásico de cuatro pulsos por ciclo, con una tensión de alimentación de $400V$ alimenta a un motor de inducción trifásico de tensión nominal $346,4V$ fase – fase @ $50Hz$. Con los siguientes parámetros: $X_e = X_r = 7,19\Omega$, $X_{er} = 7,0\Omega$ y $R_r = 0,07\Omega$. El motor a $60Hz$ posee un deslizamiento nominal del 5% . Manteniendo la relación de tensión aplicada en bornes del motor y frecuencia constante. Determine:
 - a) Frecuencia del inversor para que la máquina arranque con un par mecánico de $1,5$ veces el par máximo nominal.
 - b) Velocidad mecánica de la máquinas acciona un par de $1,2$ veces el nominal a un deslizamiento del 3% .
 - c) Ancho del pulso en segundos para obtener la tensión eficaz en bornes del motor de la pregunta anterior.
2. Explique las ventajas y limitaciones del modelo de la máquina de Inducción con vectores espaciales al compararlo con el de régimen sinusoidal.

La Máquina Sincrónica

21.1. Introducción

Las máquinas de corriente continua y de inducción tienen un amplio rango de aplicaciones industriales tales como tracción, bombeo, control y otros. Sin embargo, la operación del sistema eléctrico de potencia requiere la conversión de grandes cantidades de energía primaria, en energía y potencia eléctrica. La energía eléctrica puede ser transportada y convertida en otras formas de energía en forma limpia y económica. La máquina sincrónica es hoy por hoy, el convertidor utilizado más ampliamente para realizar esta tarea.

Dependiendo del sistema mecánico de accionamiento, las máquinas sincrónicas pueden construirse de rotor liso cuando deban operar en altas velocidades, o con rotor de polos salientes cuando son accionadas a menor velocidad.

Aun cuando un gran porcentaje de máquinas sincrónicas son utilizadas como generadores en las plantas de producción de energía eléctrica, debido fundamentalmente al alto rendimiento que es posible alcanzar con estos convertidores y a la posibilidad de controlar la tensión, en numerosas ocasiones se emplea industrialmente como elemento motriz. Como otros convertidores electromecánicos, la máquina sincrónica es completamente reversible y se incrementa día a día el número de aplicaciones donde puede ser utilizada con grandes ventajas, especialmente cuando se controla mediante fuentes electrónicas de frecuencia y tensión variable. El principal inconveniente para su uso como motor es que no desarrolla par de arranque, pero si se incluye en el rotor de la máquina un devanado auxiliar de jaula de ardilla, es posible obtener par de aceleración como motor de inducción hasta una velocidad cercana a la de sincronismo, y excitar en el momento apropiado la bobina del campo, con la finalidad de sincronizar la máquina a la red mediante los pares transitorios adicionales que se obtienen durante este proceso. Si la fuente de alimentación puede reducir la frecuencia angular de las tensiones o corrientes de armadura a valores muy bajos, la máquina es capaz de sincronizarse a esa red y posteriormente ser acelerada al mismo tiempo que se incrementa paulatinamente la frecuencia de la fuente. Como la construcción de fuentes de gran potencia controladas



(a) Estator de la máquina síncrona



(b) Rotor de polos salientes

Figura 21.1: Partes de las máquinas síncronas

en frecuencia es hoy día factible mediante puentes inversores con interruptores estáticos, es posible que en el futuro esta máquina incremente notablemente su importancia como accionamiento industrial, e incluso desplace a las máquinas de corriente continua.

21.2. Descripción de la máquina síncrona

La máquina síncrona es un convertidor electromecánico de energía con una pieza giratoria denominada rotor o campo, cuya bobina se excita mediante la inyección de una corriente continua, y una pieza fija denominada estator o armadura por cuyas bobinas circula corriente alterna. Las corrientes alternas que circulan por los enrollados del estator producen un campo magnético rotatorio que gira en el entre hierro de la máquina con la frecuencia angular de las corrientes de armadura. El rotor debe girar a la misma velocidad del campo magnético rotatorio producido en el estator para que el par eléctrico medio pueda ser diferente de cero. Si las velocidades angulares del campo magnético rotatorio y del rotor de la máquina síncrona son diferentes, el par eléctrico medio es nulo. Por esta razón a esta máquina se la denomina síncrona; el rotor gira mecánicamente a la misma frecuencia del campo magnético rotatorio del estator durante la operación en régimen permanente. En la figura 21.1a y 21.1b, se observa el estator y rotor de una máquina síncrona de polos salientes.

Durante la operación de la máquina síncrona en régimen permanente, la velocidad mecánica del rotor es igual a la velocidad angular del campo magnético rotatorio producido por el estator. En estas condiciones, sobre los conductores o bobinas del campo no se induce fuerza electromotriz. Para producir fuerza magnetomotriz en el rotor es necesario inyectar corriente en esta bobina mediante una fuente externa. De esta forma se obtienen dos campo magnéticos rotatorios que giran a la misma velocidad, uno producido por el estator y otro por el rotor. Estos campos interactúan

produciendo par eléctrico medio y se realiza el proceso de conversión electromecánica de energía. La condición necesaria, pero no suficiente, para que el par medio de la máquina sea diferente de cero es:

$$\omega_e = p \cdot \omega_m \quad (21.1)$$

donde:

p es el número de pares de polos de la máquina síncronica.

La bobina del rotor o campo de la máquina síncronica se alimenta mediante la inyección de corriente continua, como se mencionó anteriormente, con la finalidad de producir un campo magnético de magnitud constante, semejante al de un imán permanente, pero de una intensidad mucho mayor. Debido a que el rotor de la máquina gira en régimen permanente a la velocidad síncronica, el campo magnético constante producido en este sistema se comporta, desde el punto de vista del estator, como un campo magnético rotatorio. En la figura 21.2 se ha representado el esquema básico de una máquina síncronica trifásica de polos salientes.

La magnitud del par en una máquina síncronica se puede evaluar como:

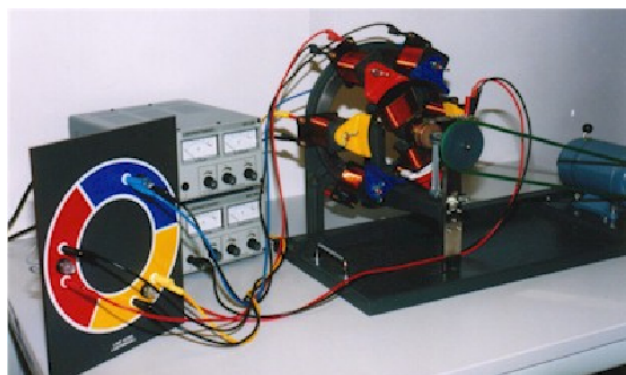
$$T_e = k \cdot \mathbf{F}_r \mathbf{F}_e \sin \delta \quad (21.2)$$

donde:

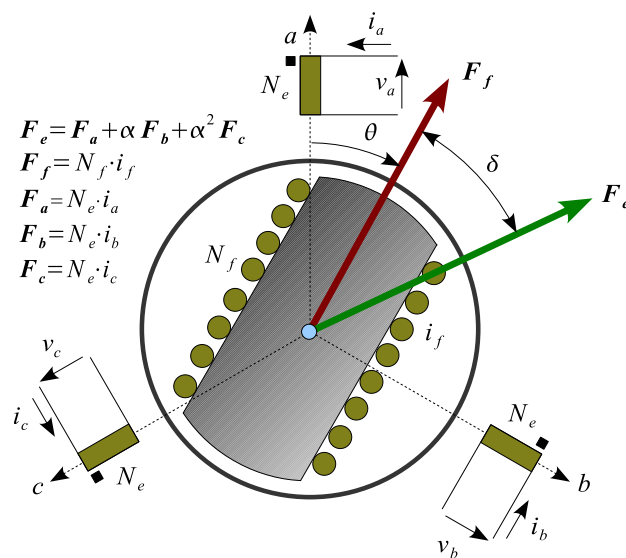
k	es una constante de proporcionalidad que depende de la geometría de la máquina y de la disposición física de las bobinas.
\mathbf{F}_e	es la amplitud de la distribución sinusoidal de la fuerza magnetomotriz del estator.
\mathbf{F}_r	es la amplitud de la distribución sinusoidal de la fuerza magnetomotriz del rotor.
δ	es el ángulo entre las amplitudes de las dos fuerzas magnetomotrices, conocido generalmente como ángulo de carga.

Las fuerzas magnetomotrices del estator \mathbf{F}_e , y del rotor \mathbf{F}_r tienen una amplitud constante y para que en la expresión (21.2) el par medio resulte constante, es necesario que el ángulo δ entre las dos fuerzas magnetomotrices sea constante en el tiempo durante la operación en régimen permanente. Para lograr esto, las dos fuerzas magnetomotrices deben girar a la misma velocidad angular.

Cuando la máquina síncronica se encuentra desequilibrada, el campo magnético rotatorio producido por las bobinas del estator es elíptico. Este campo se puede descomponer en dos campos magnéticos



(a) Modelo elemental demostrativo



(b) Esquema básico

Figura 21.2: Esquema básico de una máquina síncrona trifásica de polos salientes

rotatorios circulares de sentidos contrarotativos. Para que sea posible la producción de par eléctrico medio en estas condiciones, es necesario que la velocidad del rotor esté sincronizada con uno de los dos campos magnéticos contrarotativos. El campo que está fuera de sincronismo y gira en el sentido contrario del rotor, produce par eléctrico transitorio, pero su valor medio es cero.

Si se cortocircuita la bobina de campo en el rotor de la máquina síncronica, es posible en ciertos casos acelerar el rotor como si fuera un motor de inducción con rotor devanado. En el campo se inducen fuerzas electromotrices con la frecuencia del deslizamiento cuando el campo magnético rotatorio del estator corta a los conductores del campo. La fuerza electromotriz inducida en el rotor fuerza la circulación de corrientes por este devanado. Aun cuando el par eléctrico puede ser muy reducido, en algunas ocasiones este método puede ser utilizado para arrancar en la máquina síncronica sin cargas mecánicas acopladas.

21.3. Modelo de la máquina síncronica

Analizando el comportamiento de los ejes eléctricos de la máquina síncronica en el sistema de coordenadas correspondiente a las bobinas reales o físicas, se satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[v_{abc,f}] = [R_{abc,f}] [i_{abc,f}] + \frac{d}{dt} [\lambda_{abc,f}] \quad (21.3)$$

En los sistemas lineales, la relación entre las corrientes que circulan por las bobinas y los enlaces de flujo que las enlazan vienen dados por la relación:

$$[\lambda_{abc,f}(\theta, i)] = [L_{abc,f}(\theta)] [i_{abc,f}] \quad (21.4)$$

Sustituyendo esta relación en la expresión (21.3) se obtiene el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} [v_{abc,f}] &= [R_{abc,f}] [i_{abc,f}] + [L_{abc,f}] \frac{d}{dt} [i_{abc,f}] + \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dt} [L_{abc,f}] [i_{abc,f}] = \\ &= [R_{abc,f}] [i_{abc,f}] + [L_{abc,f}] p [i_{abc,f}] + \dot{\theta} \cdot [\tau_{abc,f}] [i_{abc,f}] \end{aligned} \quad (21.5)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (21.5) representa el comportamiento dinámico de las bobinas de la máquina síncronica en coordenadas primitivas. La matriz de inductancia $[L_{abc,f}]$ depende de la posición relativa θ del rotor con respecto al estator, por esta razón la matriz de transición de estado también depende de la posición angular del rotor. Si la velocidad de la máquina es constante, la posición angular del rotor es:

$$\theta = \theta_0 + \omega_m t \quad (21.6)$$

La solución del sistema (21.5) puede obtenerse mediante métodos numéricos de integración, utilizando algoritmos tales como Euler, Runge-Kutta o Adams entre muchos otros. El principal inconveniente que se presenta es la necesidad de evaluar e invertir la matriz de inductancias de la máquina en cada paso de integración, debido a la dependencia de esta matriz con la posición angular del rotor. Por este motivo durante varias décadas se desarrollaron transformaciones de coordenadas que simplifican el problema, aceleran notablemente los cálculos y permiten interpretar más fácilmente el comportamiento dinámico y estático de la máquina sincrónica.

Durante los períodos transitorios, la velocidad angular de la máquina cambia y la posición angular del rotor es una nueva variable de estado que debe ser evaluada para determinar su dependencia temporal. En este caso es necesario incorporar una ecuación adicional al sistema (21.5) para determinar el comportamiento dinámico del eje mecánico de la máquina:

$$\frac{1}{2} [i_{abc,f}]^t [\tau_{abc,f}] [i_{abc,f}] - T_m = J \ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} \quad (21.7)$$

Esta expresión representa el balance del par eléctrico y mecánico en el eje del rotor. El par acelerante es igual al par eléctrico del convertidor, menos el par resistente opuesto por la carga y por las pérdidas mecánicas. La ecuación diferencial (21.7) puede ser expresada mediante dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_m = \frac{1}{J} \left(\frac{1}{2} [i_{abc,f}]^t [\tau_{abc,f}] [i_{abc,f}] - T_m - \alpha \dot{\theta} \right) \\ \dot{\theta} = \omega_m \end{cases} \quad (21.8)$$

donde:

J	es el momento de inercia del rotor,
T_m	es el par mecánico resistente,
α	es el coeficiente de fricción dinámica

El sistema de seis ecuaciones diferenciales formado por las cuatro ecuaciones del sistema (21.5), y las dos ecuaciones mecánicas representadas por la expresión (21.8), definen el comportamiento dinámico y transitorio completo de la máquina sincrónica de la figura 21.2. Este sistema de ecuaciones diferenciales es no lineal y los coeficientes son variables en el tiempo, por este motivo es necesario recurrir a técnicas numéricas para evaluar el comportamiento de la máquina o simplificar el problema mediante la técnica de transformación de coordenadas.

En la matriz de inductancia de la máquina sincrónica, se encuentra toda la información necesaria para determinar su comportamiento. En la matriz de inductancia se resume la información sobre la disposición geométrica de las bobinas, sus acoplamientos, números de vueltas y reluctancias de los diferentes caminos magnéticos. Una vez conocida la matriz de inductancias se puede evaluar la

matriz de par calculando la derivada parcial de esta matriz con respecto a la posición angular del rotor. La matriz de inductancias de la máquina sincrónica esquematizada en la figura 21.2 posee la siguiente estructura:

$$[L_{abc,f}(\theta)] = \begin{bmatrix} [L_{ee}(\theta)] & [L_{er}(\theta)] \\ [L_{re}(\theta)] & L_f \end{bmatrix} \quad (21.9)$$

$$[L_{ee}(\theta)] = \begin{bmatrix} L_{aa}(\theta) & M_{ab}(\theta) & M_{ac}(\theta) \\ M_{ba}(\theta) & L_{bb}(\theta) & M_{bc}(\theta) \\ M_{ca}(\theta) & M_{cb}(\theta) & M_{cc}(\theta) \end{bmatrix} ; [L_{ef}(\theta)] = [L_{fe}(\theta)]^t = \begin{bmatrix} M_{af}(\theta) \\ M_{bf}(\theta) \\ M_{cf}(\theta) \end{bmatrix}$$

donde:

- e es subíndice referido a las bobinas del estator,
- f es el subíndice referido a las bobinas del campo,
- a, b, c son los subíndices de las tres bobinas físicas del estator.

Cada una de las inductancias de la máquina sincrónica se puede representar como una función del ángulo θ . Esta función es periódica porque se repite nuevamente cada vez que el rotor realiza un giro completo. Esta propiedad permite representar estas funciones mediante expansiones en series de Fourier, con el ángulo θ como variable. Si la pieza polar se diseña convenientemente, es posible representar las inductancias de la máquina con un número reducido de los términos de la serie. La expresión de la matriz de inductancias más simple consiste en considerar términos dependientes hasta en 2θ , para las inductancias estator-estator y términos en θ para las inductancias estator-rotor.

La inductancia del rotor L_f , es independiente de la posición θ del rotor debido a que el estator de la máquina es aproximadamente liso. El resto de las inductancias propias y mutuas depende de la posición angular θ , si el rotor de la máquina es de polos salientes. Las permeanzas de los caminos magnéticos de las bobinas del estator y de los acoplamientos estator-rotor son dependientes de la posición angular θ . Cuando la pieza polar del rotor se encuentra alineada con una de las bobinas del estator, el camino magnético posee la máxima permeanza. Si la pieza polar se encuentran en cuadratura con la bobina, el entre hierro es muy grande y disminuye la permeanza. La variación de la permeanza depende del ángulo 2θ porque una bobina alineada con el polo norte del rotor tiene el mismo camino magnético cuando el alineamiento ocurre con el polo sur. Estas inductancias se pueden representar aproximadamente mediante las siguientes funciones:

$$L_{aa}(\theta) = L_{1e} + M_{2e} \cos 2\theta + \dots \quad (21.10)$$

$$L_{bb}(\theta) = L_{1e} + M_{2e} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \quad (21.11)$$

$$L_{cc}(\theta) = L_{1e} + M_{2e} \cos 2\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \dots \quad (21.12)$$

$$M_{ab}(\theta) = M_{ba}(\theta) = -M_{1e} - M_{2e} \cos 2(\theta + \frac{\pi}{6}) + \dots \quad (21.13)$$

$$M_{ac}(\theta) = M_{ca}(\theta) = -M_{1e} - M_{2e} \cos 2(\theta - \frac{\pi}{6}) + \dots \quad (21.14)$$

$$M_{bc}(\theta) = M_{cb}(\theta) = -M_{1e} - M_{2e} \cos 2(\theta - \frac{\pi}{2}) + \dots \quad (21.15)$$

donde:

$$L_d \equiv \frac{3}{2} (L_{1e} + M_{2e}) ; L_q \equiv \frac{3}{2} (L_{1e} - M_{2e}) ; L_{df} \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} M_{ef} \quad (21.16)$$

$$L_{1e} = \frac{L_d + L_q}{3} ; M_{2e} = \frac{L_d - L_q}{3} \quad (21.17)$$

$$M_{1e} \simeq \frac{L_{1e}}{2} \quad (21.18)$$

En lo que se refiere a los acoplamientos mutuos estator-rotor la funcionalidad de las inductancias es diferente porque al girar el rotor 180° , la bobina del campo invierte su polaridad. Las inductancias del estator varían entre un valor máximo y un mínimo, siempre positivo respecto a la posición angular del rotor. Sin embargo, los acoplamientos mutuos estator-rotor varían entre un valor máximo positivo hasta un valor máximo negativo, que en valor absoluto son idénticos, cuando el rotor de la máquina gira 180° . Las inductancias mutuas entre el estator y el rotor pueden ser aproximadas mediante las siguientes funciones:

$$M_{af}(\theta) = M_{fa}(\theta) = M_{ef} \cos \theta + \dots \quad (21.19)$$

$$M_{bf}(\theta) = M_{fb}(\theta) = M_{ef} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \dots \quad (21.20)$$

$$M_{cf}(\theta) = M_{fc}(\theta) = M_{ef} \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) + \dots \quad (21.21)$$

Si el rotor de la máquina sincrónica es liso, todas las inductancias del estator son independientes de la posición del rotor. En esta situación la matriz de inductancias $[L_{abc,f}(\theta)]$, se expresa de la siguiente forma:

$$[L_{abc,f}(\theta)] = \begin{bmatrix} L_{1e} & M_{1e} & M_{1e} & M_{ef} \cos \theta \\ M_{1e} & L_{1e} & M_{1e} & M_{ef} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ M_{1e} & M_{1e} & L_{1e} & M_{ef} \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ M_{ef} \cos \theta & M_{ef} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M_{ef} \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & L_f \end{bmatrix} \quad (21.22)$$

Aun para el caso de una máquina sincrónica de rotor liso, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales que determina el comportamiento de la máquina sincrónica requiere el uso de métodos numéricos, debido a la dependencia de las inductancias mutuas entre el estator y el campo, con la

posición θ del rotor. El modelo de la máquina síncronica de rotor liso o de polos salientes se puede obtener mediante transformaciones del sistema de coordenadas.

21.4. Transformación a vectores espaciales

Para aplicar la transformación de vectores espaciales a las ecuaciones (21.5) y (21.7) que representan el comportamiento de la máquina síncronica en coordenadas primitivas es conveniente expresar por separado las ecuaciones del estator y del rotor:

$$[v_e] = [R_e][i_e] + p \{ [L_{ee}][i_e] + [L_{ef}] i_f \} \quad (21.23)$$

$$v_f = R_f i_f + p \{ [L_{fe}][i_e] + L_f i_f \} \quad (21.24)$$

Aplicando esta transformación de vectores espaciales a la expresión (21.23), se obtienen el siguiente resultado:

$$\vec{v}_e = R_e \vec{i}_e + p \left\{ (L_{1e} + M_{1e}) \vec{i}_e + \frac{3}{2} M_{2e} e^{j2\theta} \vec{i}_e^* + \sqrt{\frac{3}{2}} M_{ef} e^{j\theta} i_f \right\} \quad (21.25)$$

$$v_f = R_f i_f + p \left\{ L_{df} \left[\frac{e^{j\theta} \mathbf{i}_e^* + e^{-j\theta} \mathbf{i}_e}{2} \right] + L_f i_f \right\} \quad (21.26)$$

donde:

$$\vec{x}_e = \sqrt{\frac{2}{3}} (x_a + \alpha x_b + \alpha^2 x_c) \quad (21.27)$$

El par eléctrico es:

$$T_e = \frac{1}{2} (L_d - L_q) \Im m \left\{ (e^{-j\theta} \vec{i}_e)^2 \right\} + L_{df} \Im m \left\{ e^{-j\theta} \vec{i}_e \right\} i_f \quad (21.28)$$

Las expresiones (21.25), (21.26) y (21.28) modelan la máquina síncronica utilizando vectores espaciales. La principal ventaja de esta transformación consiste en la reducción de las tres ecuaciones del estator a una sola en variable compleja. Por otra parte, aun cuando la dependencia angular en θ se mantiene en este sistema de coordenadas, las correspondientes expresiones han sido simplificadas convenientemente al utilizar los términos $e^{\pm j\theta}$. En la expresión (21.28) correspondiente al par eléctrico pueden observarse dos componentes: el par de reluctancia y el par producido entre las fuerzas magnetomotrices del estator y del campo.

21.5. Transformación a coordenadas rotóricas

Para eliminar la dependencia en θ existente en el modelo de la máquina sincrónica en vectores espaciales, es posible referir las variables del estator al sistema de referencia del rotor, el cual se encuentra exactamente en la posición θ con respecto al sistema solidario con el estator. Por esta razón es posible multiplicar la ecuación del estator por $e^{-j\theta}$ para referir estas ecuaciones a un sistema de coordenadas sincronizado con el eje del campo. Este nuevo sistema de coordenadas es conocido como ejes d y q . El eje directo d apunta en la misma dirección que el eje del campo f . El eje cuadratura q se encuentra a 90° en adelante con respecto al eje d . De esta forma se pueden introducir las siguientes definiciones:

$$\mathbf{v}_e^{dq} \equiv v_d + jv_q = \overrightarrow{v}_e e^{-j\theta} \quad (21.29)$$

$$\mathbf{i}_e^{dq} \equiv i_d + ji_q = \overrightarrow{i}_e e^{-j\theta} \quad (21.30)$$

Derivando la expresión (21.30) se obtiene la relación siguiente:

$$e^{-j\theta} p \overrightarrow{i}_e = pi_d + jpi_q + j\dot{\theta} \mathbf{i}_e^{dq} \quad (21.31)$$

Al multiplicar la ecuación (21.25) por el término de rotación $e^{-j\theta}$, se obtiene:

$$\mathbf{v}_e^{dq} = R_e \mathbf{i}_e^{dq} + \frac{1}{2}(L_d + L_q) \left(p \mathbf{i}_e^{dq} + j\dot{\theta} \mathbf{i}_e^{dq} \right) + \frac{1}{2}(L_d - L_q) \left(p \mathbf{i}_e^{dq*} + j\dot{\theta} \mathbf{i}_e^{dq*} \right) + L_{df} (pi_f + j\dot{\theta} i_f) \quad (21.32)$$

Descomponiendo la expresión (21.32) en parte real y parte imaginaria, resulta:

$$v_d = R_e i_d + p (L_d i_d + L_{df} i_f) - \dot{\theta} L_q i_q = R_e i_d + p \lambda_d - \dot{\theta} \lambda_q \quad (21.33)$$

$$v_q = R_e i_q + p (L_q i_q) + \dot{\theta} (L_d i_d + L_{df} i_f) = R_e i_q + p \lambda_q + \dot{\theta} \lambda_d \quad (21.34)$$

Realizando transformaciones semejantes en la ecuación (21.26), se obtiene el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} v_f &= R_f i_f + p \left\{ \frac{L_{df}}{2} \left[\mathbf{i}_e^{dq} + \left(\mathbf{i}_e^{dq} \right)^* \right] + L_f i_f \right\} = \\ v_f &= R_f i_f + p (L_f i_f + L_{df} i_d) = R_f i_f + p \lambda_f \end{aligned} \quad (21.35)$$

Finalmente transformando las variables espaciales de la expresión (21.28) correspondiente al par eléctrico, se obtiene:

$$T_e = \frac{1}{2}(L_d - L_q) \Im \left\{ (\mathbf{i}_e^{dq})^2 \right\} + L_{df} \Im \left\{ e^{-j\theta} \overrightarrow{i}_e \right\} i_f =$$

$$= (L_d - L_q) i_d i_q + L_{df} i_q i_f = \lambda_d i_q - \lambda_q i_d = \lambda_e^{dq} \times \mathbf{i}_e^{dq} \quad (21.36)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que determina el comportamiento dinámico de la máquina síncronica se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} v_d = R_e i_d + p \lambda_d - \omega \lambda_q \\ v_q = R_e i_q + p \lambda_q + \omega \lambda_d \\ v_f = R_f i_f + p \lambda_f \\ J \dot{\omega} = \lambda_e^{dq} \times \mathbf{i}_e^{dq} - T_m(\omega) \end{cases} \quad (21.37)$$

donde:

$$\lambda_d = L_d i_d + L_{df} i_f,$$

$$\lambda_q = L_q i_q,$$

$$\lambda_f = L_f i_f + L_{df} i_d,$$

$$\lambda_e^{dq} = \lambda_d + j \lambda_q.$$

21.6. Transformación de Park

En la máquina síncronica, el campo magnético rotatorio producido por las fuerzas magnetomotrices de los devanados estatóricos, gira a la velocidad síncronica ω_e . El rotor de la máquina también gira a la velocidad síncronica $\omega_r = \omega_e$. Por esta razón es conveniente referir las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de la máquina a un sistema de coordenadas solidario con el rotor. De acuerdo con estos lineamientos se definen los siguientes ejes magnéticos:

- Eje d : Gira con respecto al estator a la velocidad del rotor, y en todo momento se encuentra colineal con el eje magnético del campo.
- Eje q : Rota con respecto al estator a la velocidad del rotor, y en todo momento se encuentra en cuadratura con el eje magnético del campo.
- Eje 0 : Fijo en el estator y se encuentra desacoplado magnéticamente del resto de los ejes de la máquina.
- Eje f : Solidario con el sistema rotórico y colineal con el eje magnético de la bobina de campo.

Aun cuando los ejes d y q giran a igual velocidad que el rotor, estos ejes representan variables del estator. El eje 0 es necesario para permitir que la transformación de coordenadas sea bidireccional, es decir, se pueda transformar de variables primitivas a variables $dq0$ y viceversa. El eje 0 tiene

una estrecha relación con las variables de secuencia cero de la transformación de componentes simétricas. En la práctica el eje 0 permite representar flujos de dispersión que no están acoplados con otras bobina de la máquina. En la figura 21.3(b) se ha representado el sistema de coordenadas $dq0-f$.

La transformación de coordenadas primitivas abc, f a coordenadas $dq0, f$ es:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) & 0 \\ -\sin \theta & -\sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \end{bmatrix} \quad (21.38)$$

El modelo de la máquina sincrónica utilizando la transformación de Park es:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + L_d p & -\omega L_q & 0 & L_{df} p \\ \omega L_d & R_e + L_q p & 0 & \omega L_{df} \\ 0 & 0 & R_0 + L_0 p & 0 \\ L_{df} p & 0 & 0 & R_f + L_f p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \end{bmatrix}$$

$$Jp\omega = (L_d - L_q) i_d i_q + L_{df} i_q i_f - \rho \omega - T_m \quad (21.39)$$

El modelo de la máquina sincrónica obtenido a partir de la transformación de vectores espaciales referidos a las coordenadas del rotor 21.37 coincide con el modelo 21.39, obtenido aplicando la transformación de Park.

En un sistema trifásico sin neutro no circula corriente de secuencia cero, pero cuando las tres corrientes de fase encuentran un camino de retorno, es necesario considerar esta componente. La componente de secuencia cero representa la circulación de corrientes iguales y en fase por las bobinas de la máquina. Estas corrientes no producen magnetización debido a que la suma de las fuerzas magnetomotrices de las tres bobinas es cero. Sin embargo, los flujos de dispersión si poseen componente de secuencia cero. En el modelo de la máquina no existe acoplamiento magnético de esta secuencia con el resto de las bobinas. Esta componente no puede producir par eléctrico, pero influye en las pérdidas de la máquina y en las fuerzas electromotrices sobre las bobinas. En la expresión 21.39 no aparecen fuerzas electromotrices de generación sobre la bobina de campo. Esto se debe a que el sistema de coordenadas $dq0$ es solidario al eje f del campo. Los flujos de las bobinas d y q no cruzan tangencialmente a los conductores del campo. Sin embargo, en este eje pueden aparecer fuerzas electromotrices por transformación, debido a que el flujo de la bobina del eje directo atraviesa el devanado de campo. Por el contrario, el eje cuadratura no puede producir ningún efecto sobre el campo debido a que se encuentra permanentemente en una posición ortogonal.

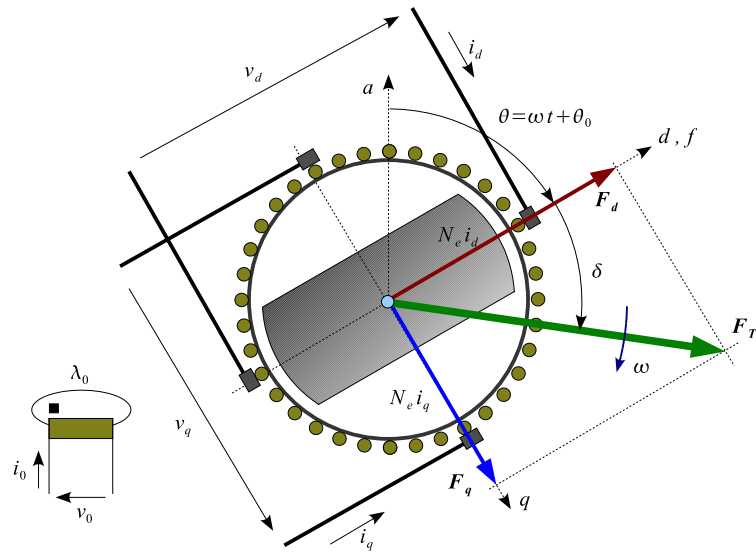


Figura 21.3: Modelo en coordenadas $dq0 - f$ de la máquina síncrona

En la figura (21.3) se presenta el modelo en coordenadas $dq0 - f$ que satisface las ecuaciones 21.39. En la máquina real, las corrientes i_d e i_q no circulan por ningún devanado físico, para determinar las corrientes reales es necesario aplicar la transformación inversa de coordenadas $dq0 - f$ a coordenadas primitivas.

21.7. Régimen permanente

Para analizar el comportamiento de la máquina síncrona en régimen permanente es necesario excitar los circuitos de armadura con un sistema equilibrado y simétrico de corrientes. Además, en estas condiciones el rotor de la máquina debe girar a la velocidad síncrona. La posición relativa del rotor con respecto al sistema de referencia solidario al estator es:

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (21.40)$$

En régimen permanente las ecuaciones del modelo 21.39 se reducen a:

$$v_d = R_e i_d - \omega L_q i_q = R_e i_d - X_q i_q \quad (21.41)$$

$$v_q = R_e i_q + \omega L_d i_d + \omega L_{df} i_f = R_e i_q + X_d i_d + e_f \quad (21.42)$$

$$v_f = R_f i_f \quad (21.43)$$

$$T_e = (L_d - L_q) i_d i_q + L_{df} i_q i_f \quad (21.44)$$

21.8. Circuito equivalente de la máquina sincrónica

A partir del modelo 21.39 que define el comportamiento dinámico de las corrientes de la máquina sincrónica en convención motor, se puede modelar la máquina mediante cuatro circuitos eléctricos acoplados por términos de generación y transformación, mediante transformadores y fuentes de tensión dependientes de corriente. En la figura 21.4 se presenta el circuito equivalente de la máquina sincrónica de polos salientes.

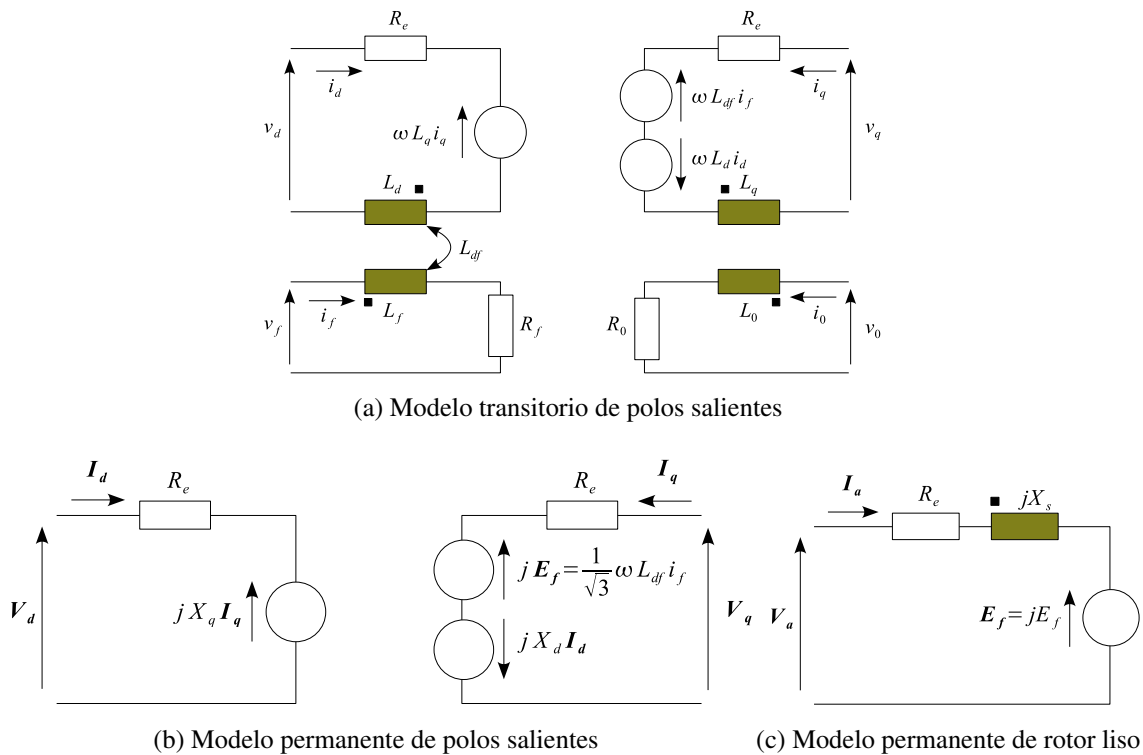


Figura 21.4: Circuitos equivalente de la máquina sincrónica en convención motor

Si la máquina sincrónica es de rotor liso, las reactancias del eje directo y del eje cuadratura son iguales y se denomina entonces reactancia sincrónica X_s .

Valores típicos adimensionales de las inductancias propias, mutuas y de dispersión en las máquinas sincrónicas convencionales se presentan en la tabla 21.1.

Tabla 21.1: Rango típico de los valores de las inductancias de la máquina síncronica de polos salientes

Inductancia	Rango en pu
$L_{df} = L_{md} = L_{mf}$	$0,7 \sim 1,1$
L_{mq}	$0,5 \sim 0,7$
$L_{\sigma d} \approx L_{\sigma q} = \sigma_d L_{df}$	$(0,1 \sim 0,2) L_{df}$
$L_{\sigma f} = \sigma_f L_{df}$	$(0,2 \sim 0,3) L_{df}$
$L_d = (1 + \sigma_d) L_{df}$	$(1,1 \sim 1,2) L_{df}$
$L_f = (1 + \sigma_f) L_{df}$	$(1,2 \sim 1,3) L_{df}$
$L_q = (1 + \sigma_q) L_{mq}$	$(1,1 \sim 1,2) L_{mq}$
$L'_d = L_d - \frac{L_{df}^2}{L_f}$	$(0,27 \sim 0,43) L_{df}$
$L'_f = L_f - \frac{L_{df}^2}{L_d}$	$(0,29 \sim 0,47) L_{df}$

21.9. Máquinas de imán permanente

Los materiales magnéticos fueron utilizados en la fabricación de máquinas eléctricas a partir de la década de los cincuenta, los materiales más utilizados actualmente en la construcción de estos convertidores electromecánicos son los magnetos de ferrita, alnico-5, samarium-cobalt y neodimium. En la figura 21.5, se presenta la característica de magnetización de los imanes permanentes.

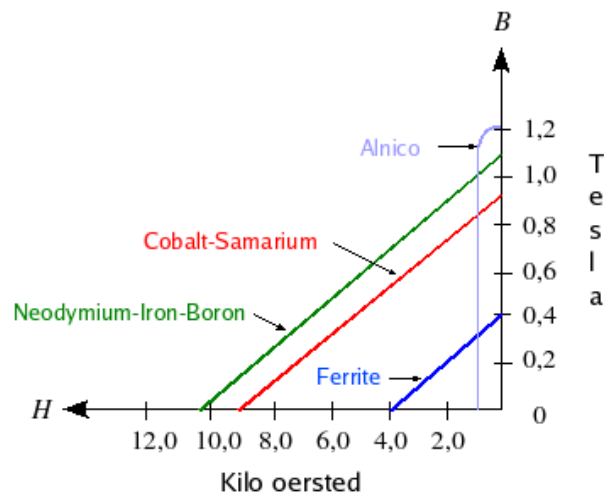


Figura 21.5: Característica de magnetización de los imanes permanentes.

En la figura 21.6 se muestra la característica de desmagnetización del imán permanente durante el proceso de operación de la máquina, a partir de esta curva se puede determinar la densidad de flujo de imán durante la operación. Generalmente esta desmagnetización en condiciones normales de operación esta limitada como se muestra en la figura 21.6 y se tiende a considerar constante. Si el

imán en una operación bajo fallas, como un cortocircuito, es sometido a una intensidad de campo magnético superior al punto de $H_{crítico}$, el imán pierde fuerza cohesiva y modifica su característica de flujo de remanencia.

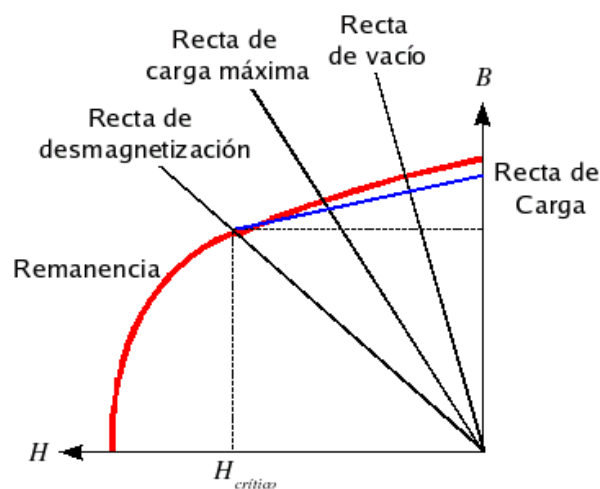


Figura 21.6: Característica de remanencia del imán permanente.

Los esquemas de disposición de los imanes en el rotor de la máquina sincrónica, se muestran en la figura 21.7. Los esquemas de montaje superficial de los imanes 21.7a y 21.7b, originan que la reactancia de eje directo y cuadratura sean similares ($L_d \approx L_q$), mientras que el montaje de los imanes embutido en el rotor 21.7c origina que la reactancia de cuadratura sea mayor que la de eje directo ($L_q > L_d$). Por las facilidades constructivas la mayoría de las máquinas sincrónicas de imán permanente presentan una disposición superficial de los imanes. En la figura 21.8, se muestra una máquina sincrónica de imán permanente con imanes superficiales en el rotor.

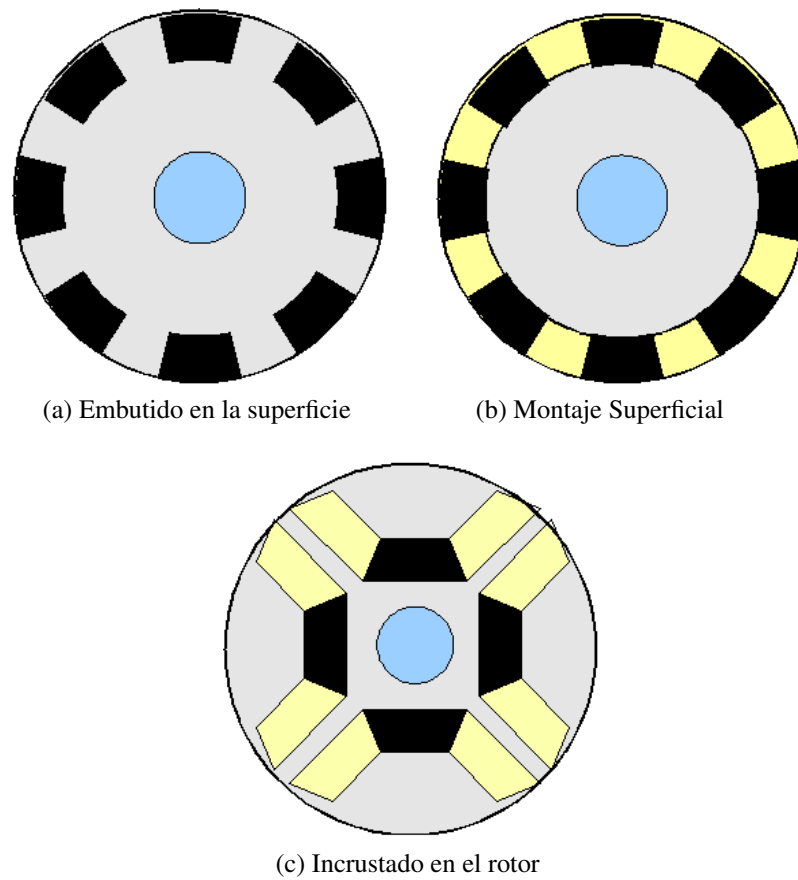


Figura 21.7: Esquema de montaje de los imanes permanentes en el rotor.

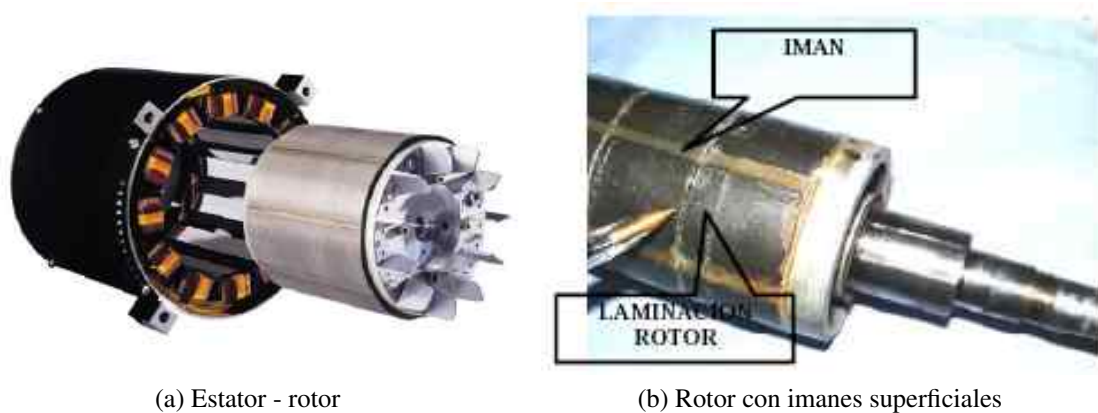


Figura 21.8: Máquina síncrona de imán permanente.

21.9.1. Ecuaciones de la máquina sincrónica de imán permanente referidas al rotor

El sistema de ecuaciones diferenciales que determina el comportamiento dinámico de la máquina sincrónica de imán permanente se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} v_d = R_e i_d + p \lambda_d - \omega \lambda_q \\ v_q = R_e i_q + p \lambda_q + \omega \lambda_d \\ J \dot{\omega} = \lambda_e^{dq} \times i_e^{dq} - T_m(\omega) \end{cases} \quad (21.45)$$

donde:

$$\lambda_d = L_d i_d + \lambda_{af}$$

$$\lambda_q = L_q i_q$$

$$\lambda_e^{dq} = \lambda_d + j \lambda_q$$

El sistema de ecuaciones 21.45 es similar al 21.37, donde el enlace de flujo del campo, se sustituye por el producido por el imán permanente (λ_{af}). Desarrollando la expresión de par eléctrico de la ecuación 21.7, se obtiene:

$$T_e = \lambda_{af} i_q + (L_d - L_q) i_q i_d \quad (21.46)$$

Para imanes con montaje superficial la ecuación 21.46, se reduce a:

$$T_e = \lambda_{af} i_q \quad (21.47)$$

21.10. Accionamiento de la máquina sincrónica

21.10.1. Control tensión frecuencia constante

En la figura 21.9, se presenta el esquema de control de un motor sincrónico por tensión frecuencia constante. En este accionamiento la relación entre la tensión de alimentaron de la máquina y la frecuencia de las corrientes del estator se mantiene constante. Generalmente el esquema de control de inversor es por modulación de ancho de pulso (*PWM*). En la figura 21.10, se presenta el esquema

de tracción de este accionamiento, en donde se observa como la tensión de alimentación de la máquina esta acotada en un límite inferior para frecuencias bajas.

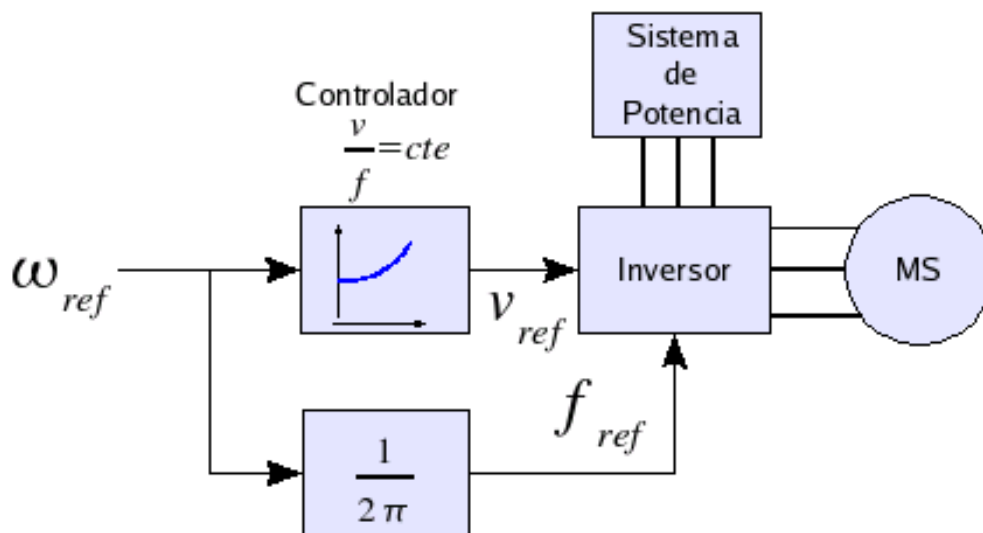


Figura 21.9: Esquema del accionamiento $v/f = cte$ para máquinas síncronas

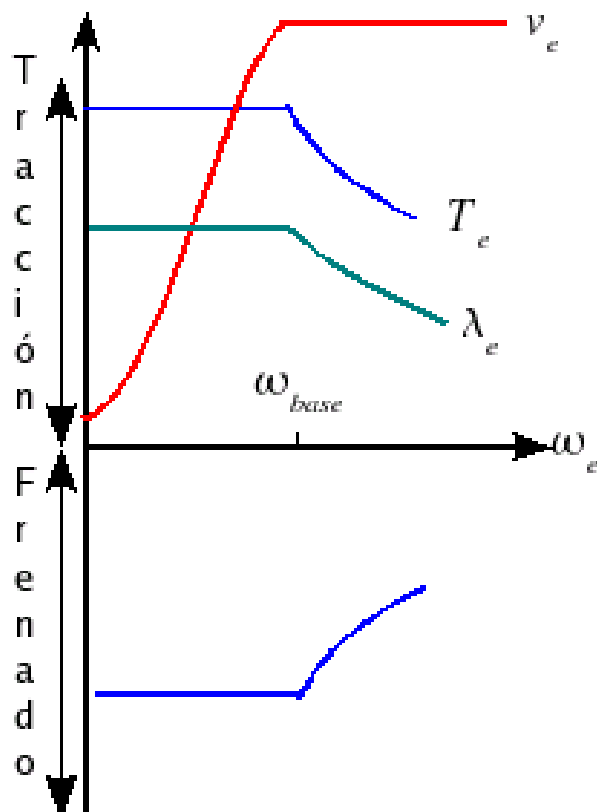


Figura 21.10: Características par velocidad para el accionamiento $v/f = cte$ de la máquina síncrona

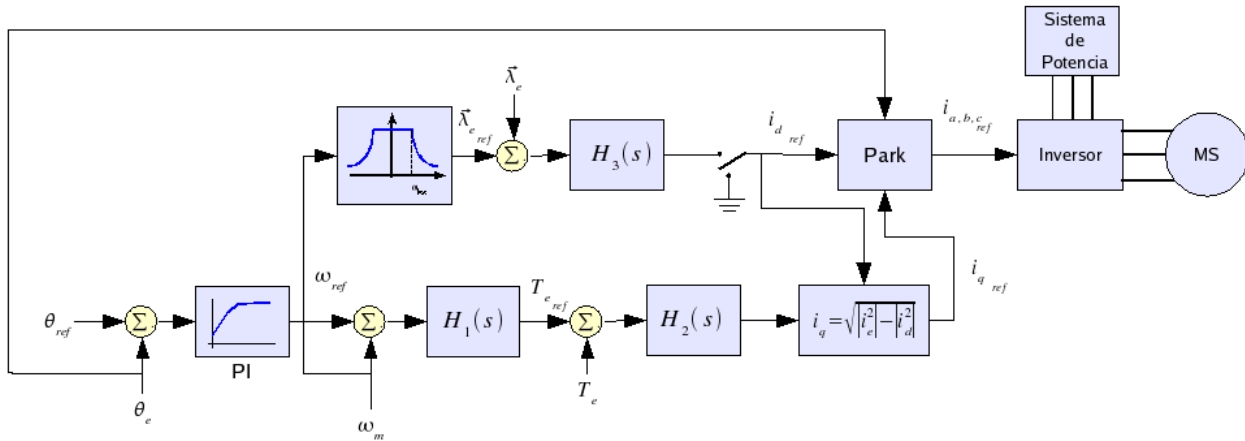


Figura 21.11: Diagrama de control vectorial de la máquina síncrona

21.10.2. Control vectorial

Para simplificar la ecuación de par de la máquina síncrona cuando se realiza control vectorial es escoge que la corriente del eje cuadratura de la máquina sea igual a cero ($i_d = 0$), en esta condición el vector espacial de corriente y el par se reduce ha:

$$T_e = \lambda_f i_q \quad (21.48)$$

$$\mathbf{i}_e^{dq} \equiv j i_q = \vec{i}_e e^{-j\theta} \quad (21.49)$$

En el caso de máquinas de imán permanente se sustituye el enlace de flujo del campo (λ_f) por el enlace de flujo equivalente del imán (λ_{af}). En la figura 21.11, se presenta el diagrama de control vectorial de una máquina síncrona, este esquema incluye un lazo para establecimiento del enlace de flujo del estator durante el arranque el cual permite accionar la máquina a par constante, luego de establecido el flujo al valor de referencia se procede a dar una referencia de corriente en el eje directo de cero. El esquema de control mantiene la corriente en el estator de la máquina constante y las ordenes de encendido y apagado de las componentes del inversor se realiza mediante modulación delta de corriente.

En la figura 21.12, 21.13 y 21.14 se presenta la respuesta del esquema de la figura 21.11 al seguir una consigna de velocidad, para una máquina de síncrona de polos salientes de 200 HP alimentada con un puente inversor, desde un sistema trifásico de 460 V a frecuencia industrial de 60 Hz. La conversión AC - DC se realiza con un rectificador activo trifásico.

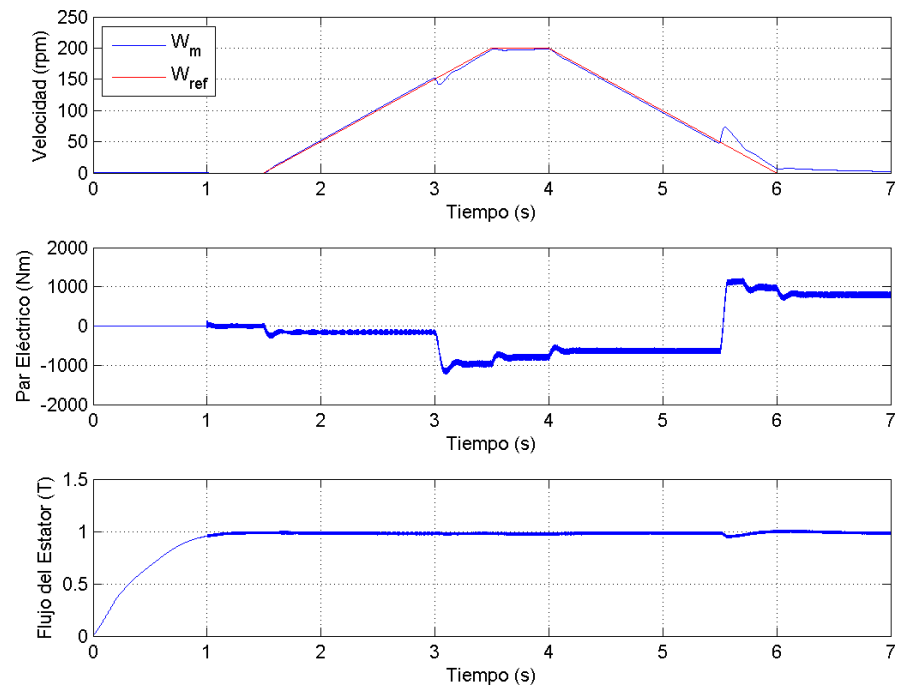


Figura 21.12: Velocidad mecánica, par eléctrico y flujo del estator para el accionamiento de la máquina síncrona de polos salientes

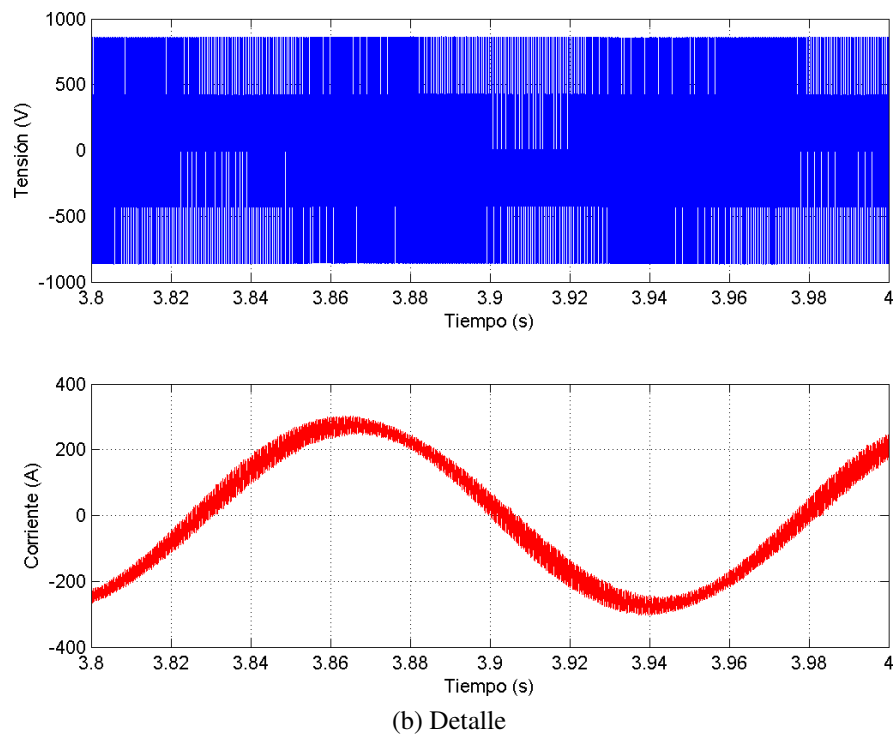
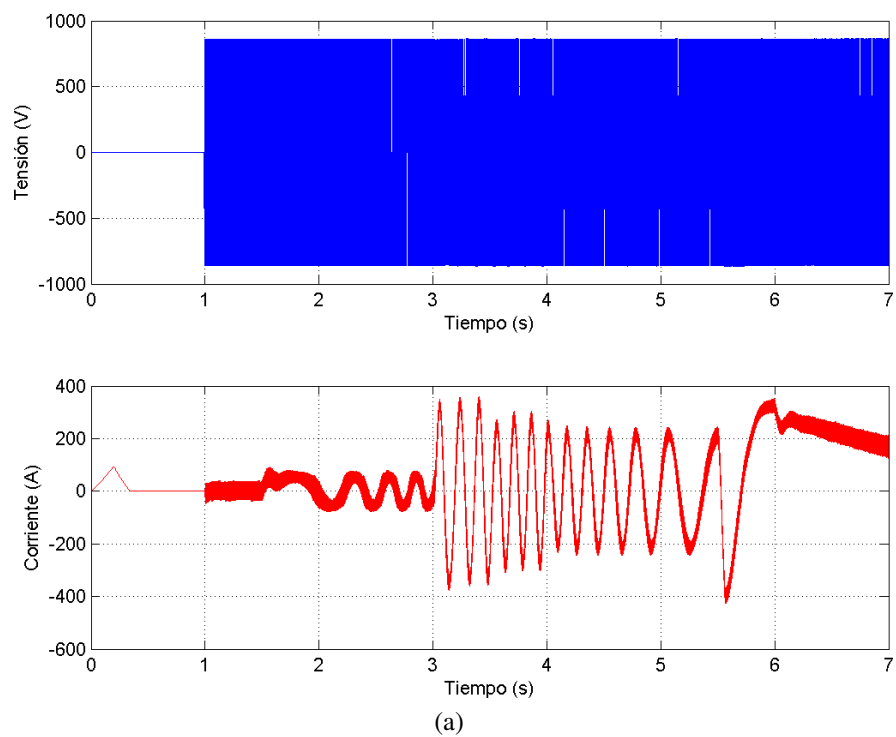


Figura 21.13: Tensión y corriente en la fase "a" del motor para el accionamiento de la máquina sincrónica de polos salientes

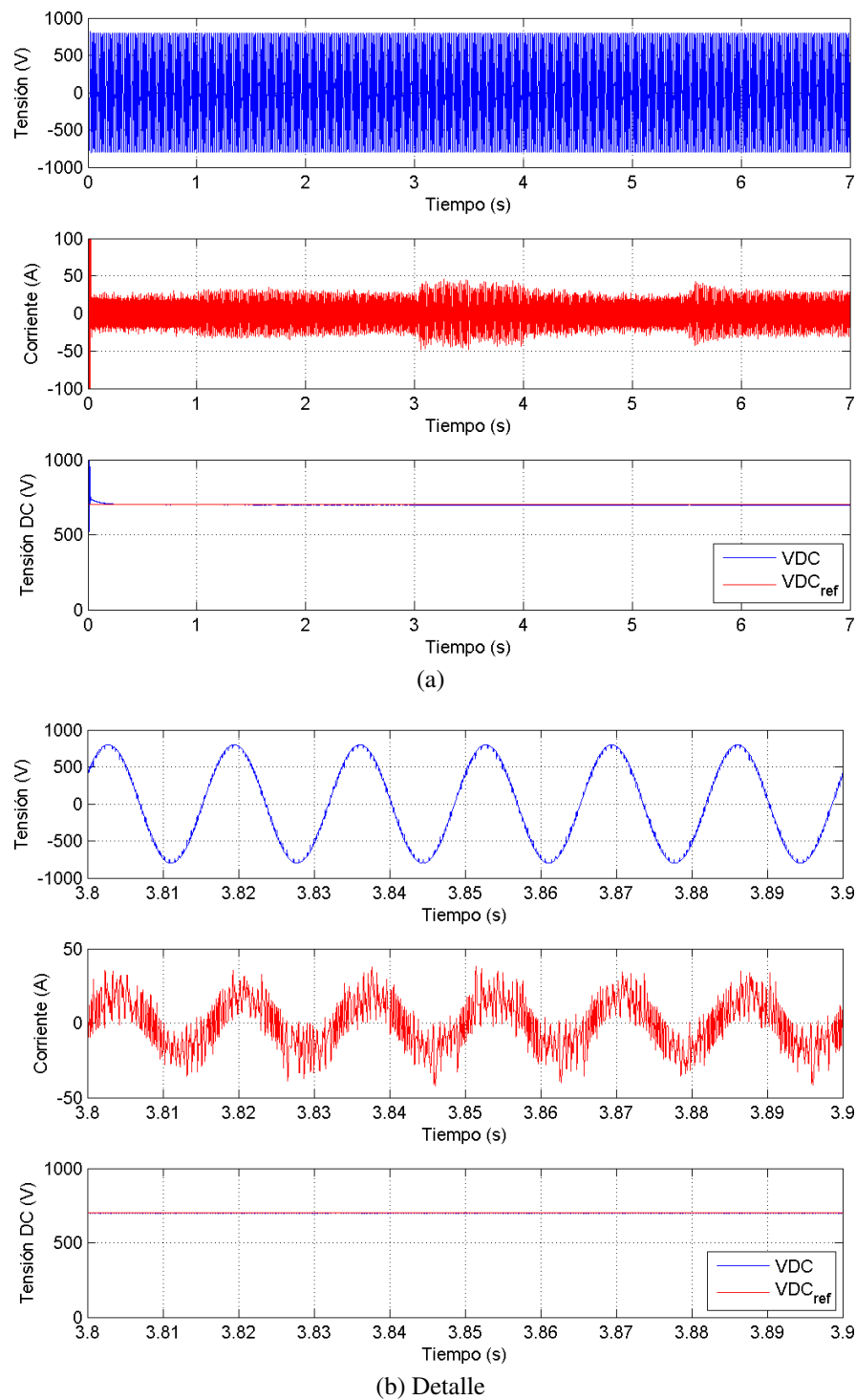


Figura 21.14: Tensión y corriente en la fase “a” y Tensión en la barra de corriente continua del rectificador de la fuente alterna el accionamiento de la máquina síncrona de polos salientes

En la figura 21.15, 21.16 y 21.17 se presenta la respuesta del esquema de la figura 21.11 al seguir una consigna de velocidad, para una máquina de síncrona de imán permanente con distribución de flujo sinusoidal de 5 HP alimentada con un puente inversor, desde un sistema trifásico de 220V a

frecuencia industrial de 60 Hz . La conversión AC - DC se realiza con un rectificador no controlado trifásico.

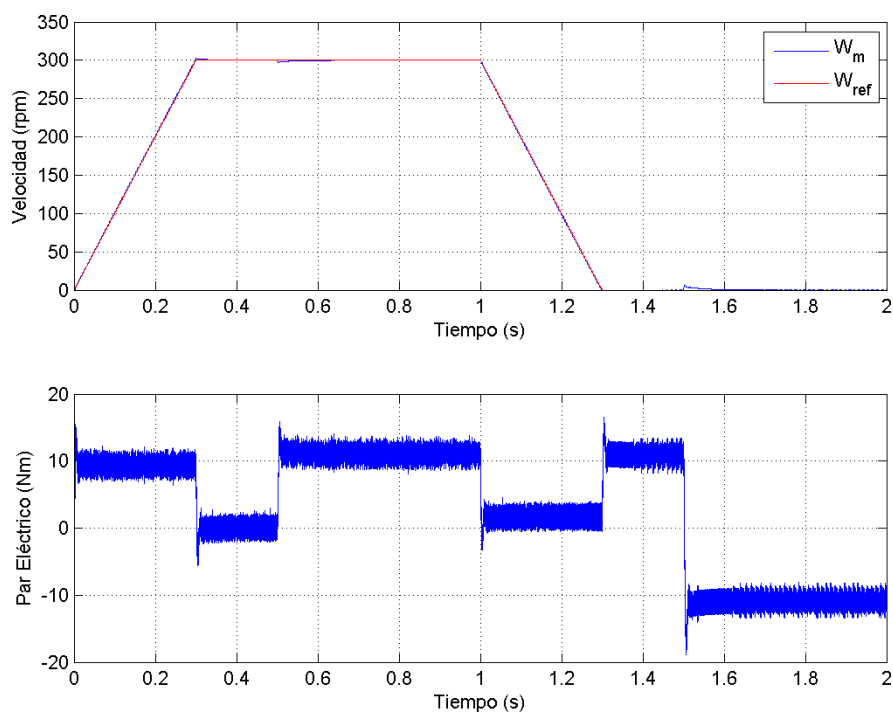


Figura 21.15: Velocidad mecánica y par eléctrico para el accionamiento de la máquina sincrónica de imán permanente

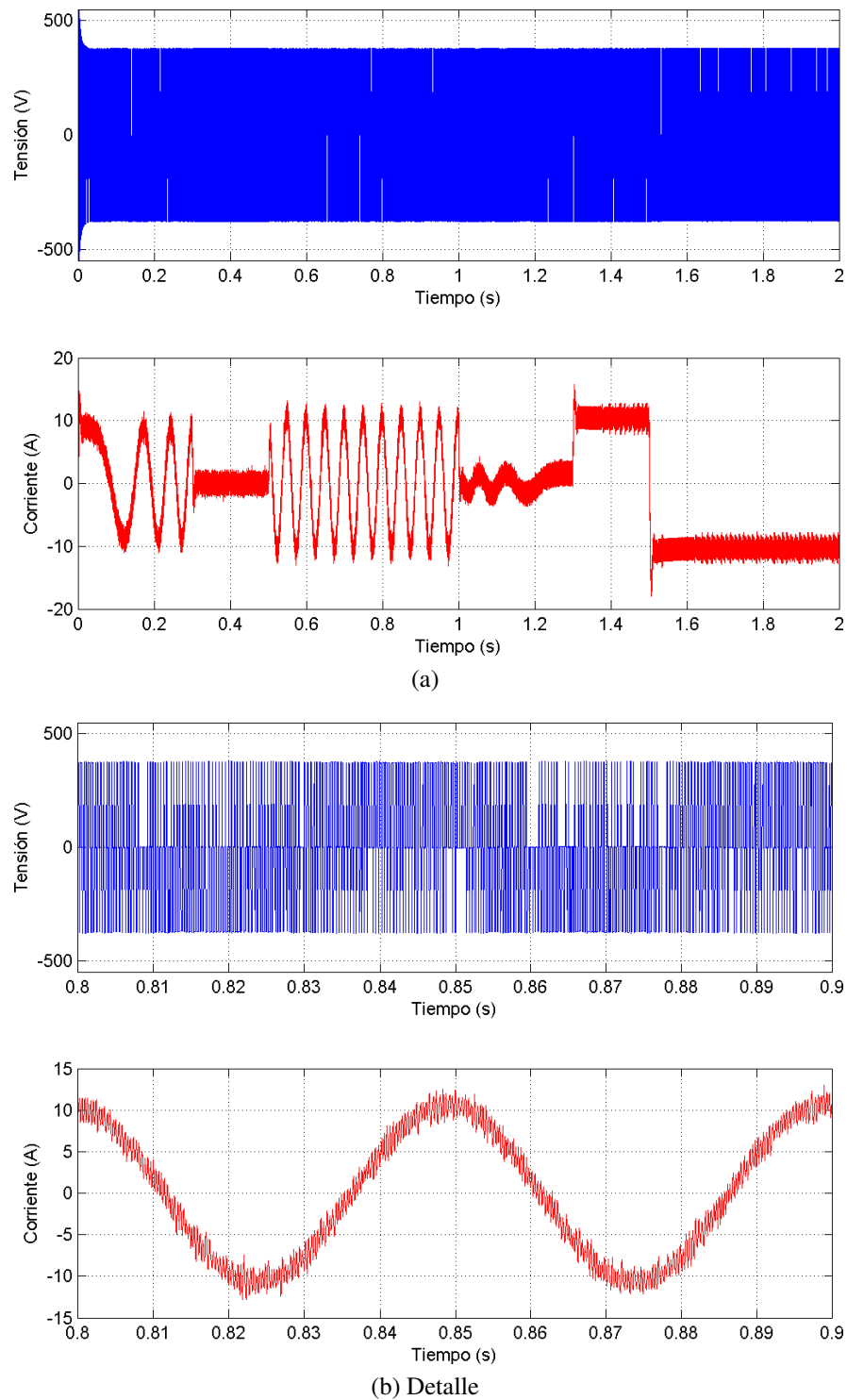


Figura 21.16: Tensión y corriente en la fase “a” del motor para el accionamiento de la máquina síncrona de imán permanente

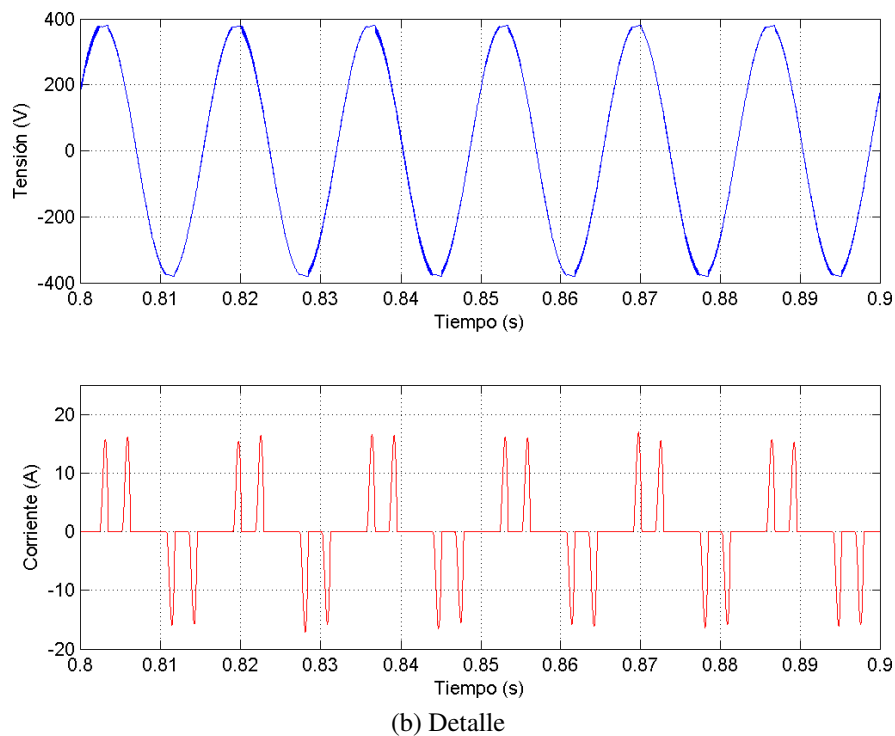
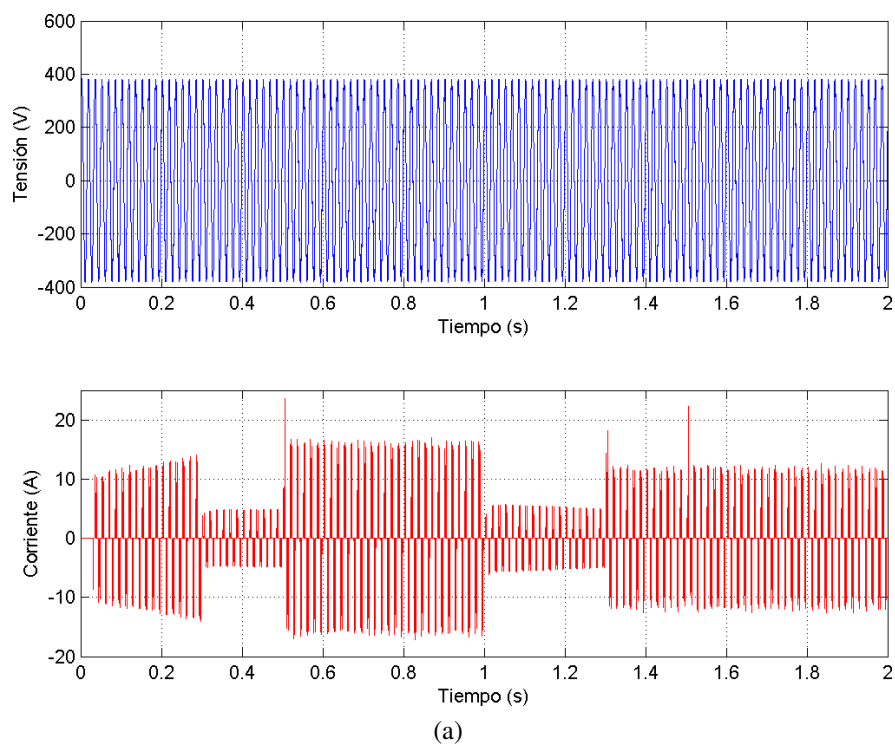


Figura 21.17: Tensión y corriente en la fase “a” de la fuente alterna el accionamiento de la máquina sincrónica de polos salientes

21.10.3. Control Directo de Par

En la figura 21.18, se muestra el esquema de control directo de par del motor sincrónico, este esquema es similar al estudiado para la máquina de inducción y se basa en el mismo principio.

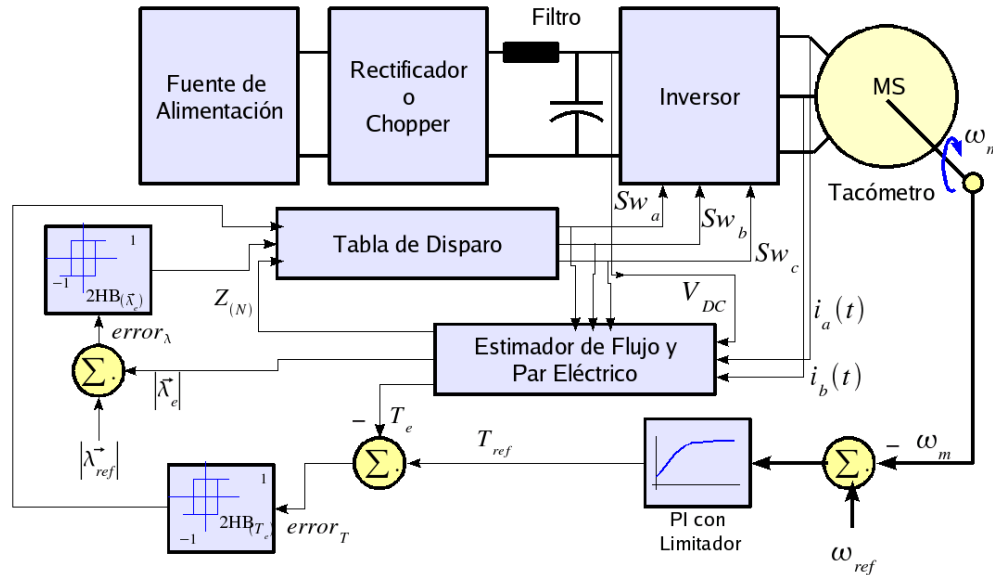


Figura 21.18: Diagrama de control directo de par de la máquina sincrónica

En la tabla 21.2 se presenta la secuencia de disparo del inversor para la estrategia de control directo de par, a partir de la posición del enlace de flujo del estator, y la salida de los comparadores de histéresis del flujo y par eléctrico. Con la finalidad de incrementar la velocidad de cambio del par eléctrico y magnitud del enlace de flujo, no se utiliza el vector espacial de tensión que se encuentra dentro de la zona de localización del enlace de flujo, así como tampoco el localizado en la zona opuesta.

Tabla 21.2: Secuencia de disparo del inversor para el controlador directo de par de la máquina sincrónica.

$HB_{(\vec{\lambda}_e)}$	$HB_{(T_e)}$	$Z_{(1)}$	$Z_{(2)}$	$Z_{(3)}$	$Z_{(4)}$	$Z_{(5)}$	$Z_{(6)}$
1	1	\vec{v}_5	\vec{v}_4	\vec{v}_6	\vec{v}_2	\vec{v}_3	\vec{v}_1
1	-1	\vec{v}_6	\vec{v}_2	\vec{v}_3	\vec{v}_1	\vec{v}_5	\vec{v}_4
-1	1	\vec{v}_1	\vec{v}_5	\vec{v}_4	\vec{v}_6	\vec{v}_2	\vec{v}_3
-1	-1	\vec{v}_2	\vec{v}_3	\vec{v}_1	\vec{v}_5	\vec{v}_4	\vec{v}_6

En el control de la máquina sincrónica no se utilizan los estados \vec{v}_0 y \vec{v}_7 debido a que estos producen un vector de cero tensión sobre los devanados del estator lo cual es contraproducente para la vida útil del imán permanente.

Parte IX

Técnicas Modernas de Control

Rectificador por Modulación de Ancho de Pulso

En los últimos años las aplicaciones que requieren conversión $AC - DC$ se han incrementado con avances tecnológicos. En la figura 22.1 se presenta la clasificación de los rectificadores de acuerdo a su frecuencia de conmutación y topología.

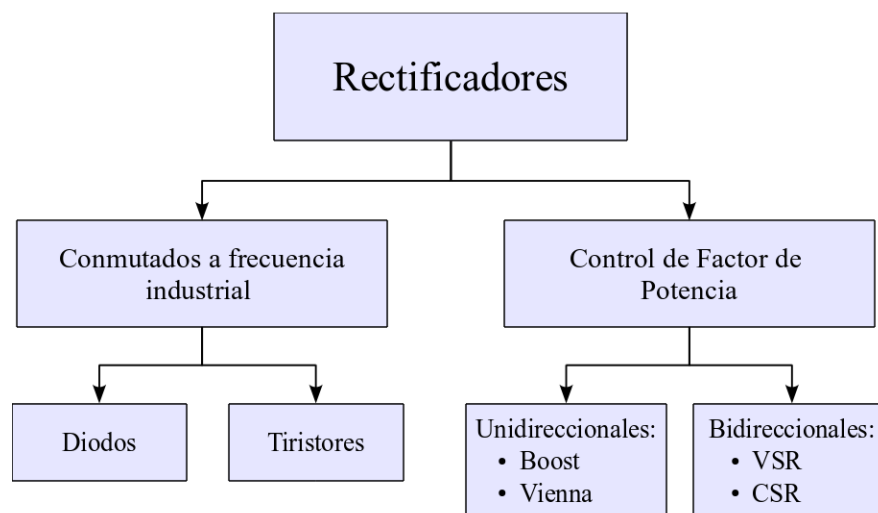


Figura 22.1: Clasificación de los rectificadores

Los rectificadores conmutados a frecuencia industrial de diodos son los más sencillos y económicos en el proceso de conversión de energía alterna a continua. El uso en estos convertidores con tiristores permite controlar el flujo de energía del lado de alterna al de corriente continua. La principal desventaja de estos convertidores son la generación de armónicos y consumo de potencia reactiva sobre el sistema de corriente alterna. Para mitigar estos problemas es necesario la inclusión de filtros pasivos a la entrada del convertidor $AC - DC$ con la finalidad de reducir su impacto armónico sobre el sistema de alimentación.

Otra manera conceptualmente diferente de realizar la conversión de $AC - DC$ es utilizar componentes con control de encendido y apagado que permita modular la corriente de entrada del puente controlando el factor de potencia en la barra de alimentación de alterna. El uso de transistores conmutados a alta frecuencia para la construcción de estos tipos de rectificadores permite disminuir su impacto armónico de baja frecuencia al utilizar técnicas de modulación por ancho de pulso (PWM).

Entre los rectificadores que utilizan modulación por ancho de pulso se encuentran dos vertientes de acuerdo a si permiten flujo bidireccional de potencia entre el lado AC y DC . Los rectificadores PWM unidireccionales de potencia encontramos en tipo Boost y el Vienna, mientras que en los bidireccionales encontramos los rectificadores de fuente de tensión (VSR) y los de fuente de corriente (CSR). El esquema de control de los rectificadores PWM permite, regular la magnitud de la tensión en la barra de corriente continua.

22.1. Rectificadores bidireccionales de potencia

22.1.1. Rectificador VSR

Monofásico

El rectificador PWM , más utilizado es el que utiliza la topología del puente inversor con transistores (VSI), para realizar la operación de rectificación. En la figura 22.2, se presenta el esquema del puente rectificador monofásico. Note que de no existir orden de disparo de los transistores (Q_i) el puente se comporta como un puente rectificador de diodos.

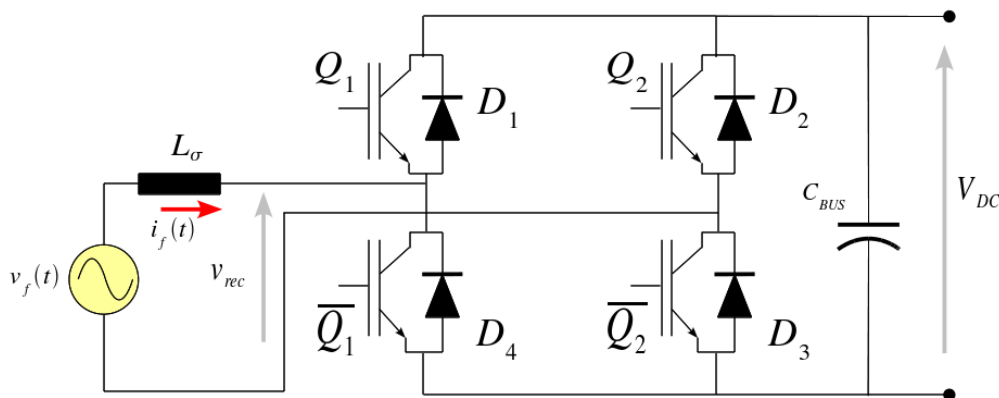


Figura 22.2: Rectificador PWM monofásico

En la tabla 22.1 se presentan los valores de tensión en bornes del rectificador en función de la conectividad de los transistores Q_1 y Q_2 .

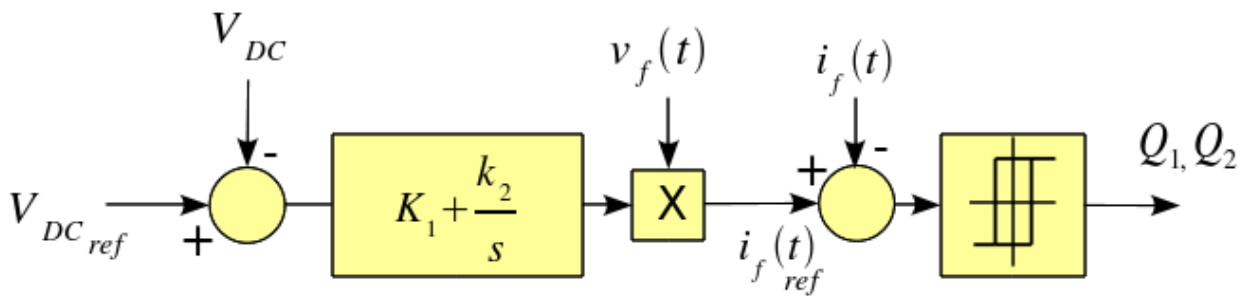
Tabla 22.1: Tensión v_{rec} para el rectificador PWM monofásico

Q_1	Q_2	v_{rec}
0	0	0
1	0	V_{DC}
0	1	$-V_{DC}$
1	1	0

Calculando la corriente suministrada por la fuente de alterna ($i_f(t)$) en la figura 22.2, se obtiene:

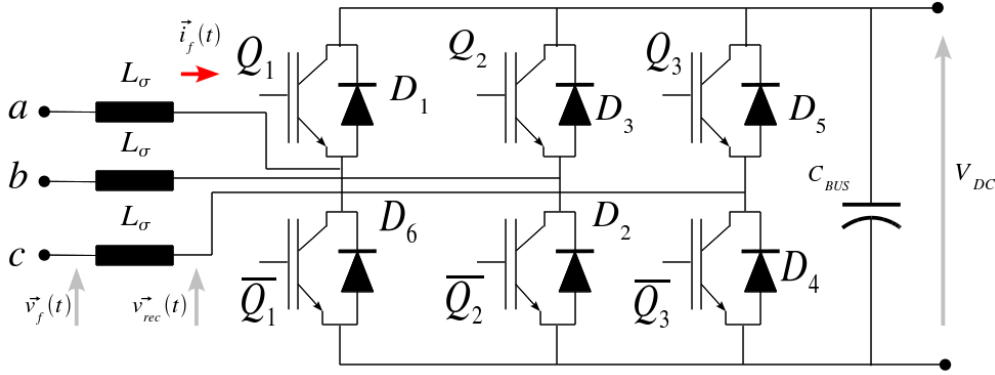
$$i_f(t) = \frac{1}{L_\sigma} \int (v_f(t) - v_{rec}) dt \quad (22.1)$$

De la expresión 22.1, se puede observar que se puede controlar el flujo de potencia entre el lado de alterna y continua controlando la magnitud y fase de la corriente $i_f(t)$ mediante el control de la tensión en bornes del rectificador (v_{rec}) que es función del estado de conectividad de los transistores Q_1 y Q_2 . El control de la corriente i_f permite regular el factor de potencia consumido por el convertidor. En la figura 22.3, se presenta el esquema de control del puente rectificador PWM monofásico. En este esquema se compara la tensión de referencia de la barra de continua con la medida en el capacitor C_{BUS} , el error alimenta un controlador proporcional integral cuya salida es multiplicada por la tensión de la fuente en por unidad ($v_f(t)$), obteniendo la corriente de referencia del sistema ($i_{fref}(t)$). Esta corriente de referencia es comparada con la medición realizada en el circuito y con el error de esta comparación se calcula el vector de interrupciones del puente Sw utilizando la modulación delta de corriente.

Figura 22.3: Esquema de control del rectificador PWM monofásico

Trifásico

En la figura 22.4, se presenta el esquema del puente rectificador PWM trifásico.

Figura 22.4: Rectificador *PWM* trifásico

El esquema de control del puente trifásico es similar al del monofásico si se utilizan los vectores espaciales en vez de las magnitudes medidas. Recordando que:

$$\vec{v}_f(t) = \vec{v}_{rec}(t) + L_\sigma \frac{d\vec{i}_f(t)}{dt} \quad (22.2)$$

Donde:

$$\vec{i}_f(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} \quad (22.3)$$

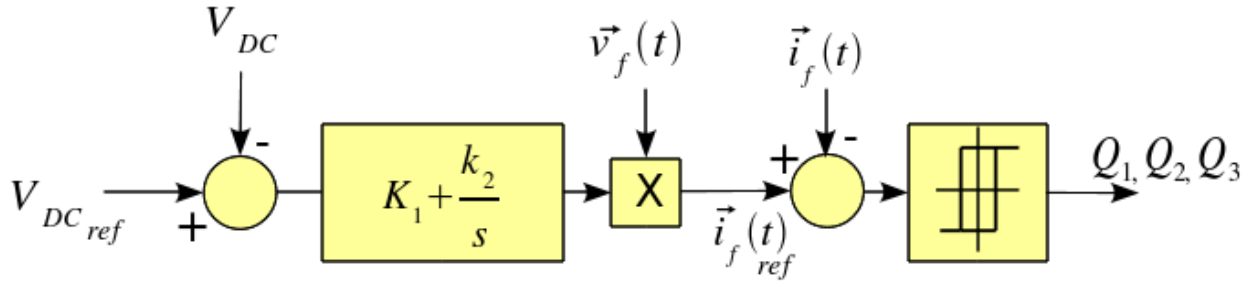
$$\vec{v}_{rec}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} V_{DC} \quad (22.4)$$

El vector $\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}^t$ representa el estado de los interruptores del puente trifásico. En este vector el elemento "1" corresponde al encendido del interruptor superior, mientras que "0" indica el encendido del interruptor inferior de la misma rama. El vector espacial de tensiones del rectificador presenta solamente ocho posibles estados correspondientes a las combinaciones de los interruptores. En la tabla 22.2 se presentan los ocho estados de tensión del rectificador en función de la conectividad de los interruptores del puente.

Tabla 22.2: Vectores espaciales de tensiones del rectificador (\vec{v}_{rec}) trifásico

Q_1	Q_2	Q_3	\vec{v}_{fn}
0	0	0	0
0	0	1	$-\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}e^{j\frac{\pi}{3}}$
0	1	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}e^{-j\frac{\pi}{3}}$
0	1	1	$-\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}$
1	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}$
1	0	1	$\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}e^{-j\frac{\pi}{3}}$
1	1	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}V_{DC}e^{j\frac{\pi}{3}}$
1	1	1	0

En la figura 22.5, se presenta el esquema de control del puente trifásico con vectores espaciales.

Figura 22.5: Esquema de control del rectificador *PWM* trifásico

Utilizando la teoría de vectores espaciales para modificar la estrategia de control del puente rectificador por ancho de pulso, es posible utilizar este puente como rectificador activo, controlar el factor de potencia en la barra donde esta conectado, regular la tensión de la barra de corriente continua, compensar los armónicos introducidos por otros puentes convertidores electrónicos conectados a la misma barra de alimentación en corriente alterna y controlar el flujo instantáneo de potencia activa y reactiva.

En la figura 22.6, se presenta las formas de onda de tensión línea a línea y corriente en la fase “a” del sistema de potencia que alimenta un rectificador por modulación de ancho de pulso con filtro pasabajos (*LC*) en el lado de corriente continua. Adicionalmente en la figura 22.7, se presenta el

contenido armónico de estas formas de onda. La operación de este tipo de puente convertidor produce armónicas de corriente, de alto orden en el sistema de potencia que son rápidamente atenuadas por este, a diferencia de los rectificadores convencionales.

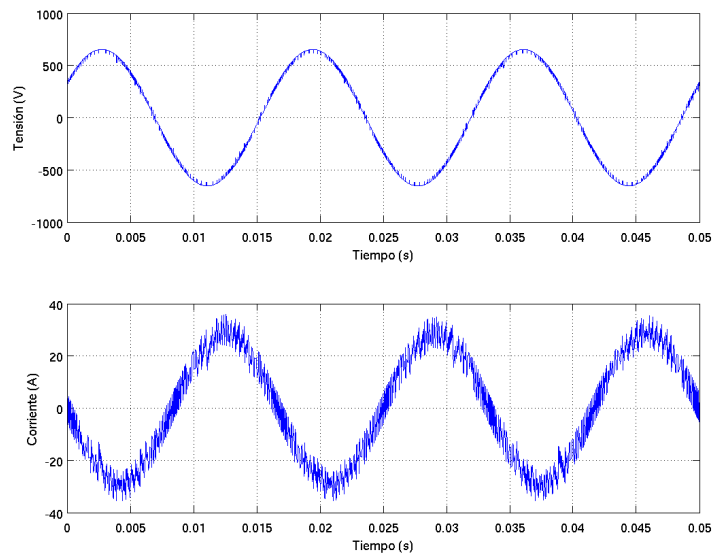


Figura 22.6: Forma de onda de tensión y corriente en el sistema que alimenta un rectificador trifásico por *PWM*

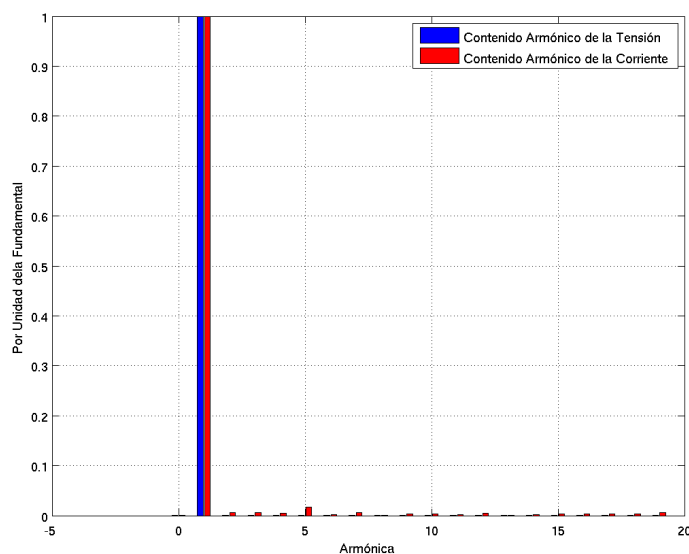


Figura 22.7: Contenido armónico de la tensión y corriente en el sistema que alimenta un rectificador trifásico por *PWM*

22.1.2. Rectificador CSR

En la figura 22.8, se presenta el esquema del puente rectificador bidireccional con fuente de corriente en la barra de corriente continua. La corriente del rectificador ($\vec{i}_{rec}(t)$) presenta ocho posibles estados en función de la conectividad de los transistores Q_1 , Q_2 y Q_3 . De estos ocho estados dos corresponden al vector cero.

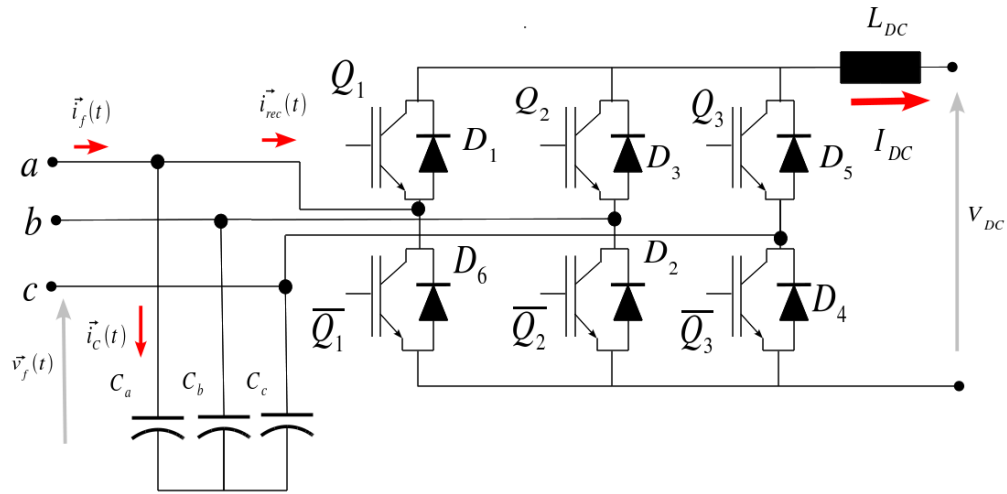


Figura 22.8: Rectificador CSR trifásico

En este puente se controla la corriente de la fuente alterna ($\vec{i}_f(t)$) mediante el vector de conectividades $\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}^t$ y la fuente de tensión ($\vec{v}_f(t)$) como:

$$\begin{aligned} \vec{i}_f(t) &= \vec{i}_c(t) + \vec{i}_{rec}(t) \\ &= C \frac{d\vec{v}_f(t)}{dt} + \vec{i}_{rec}(t) \end{aligned} \quad (22.5)$$

donde:

$$\vec{i}_{rec}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} I_{DC} \quad (22.6)$$

En la figura 22.9, se presentan los estados de corriente del rectificador ($\vec{i}_{rec}(t)$) en por unidad de la corriente de I_{DC} para cada una de los diferentes estados de conectividad del puente de la figura 22.8.

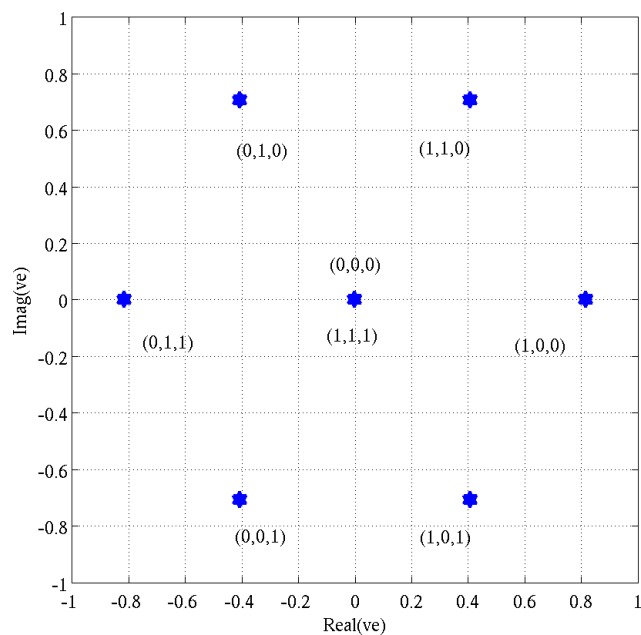
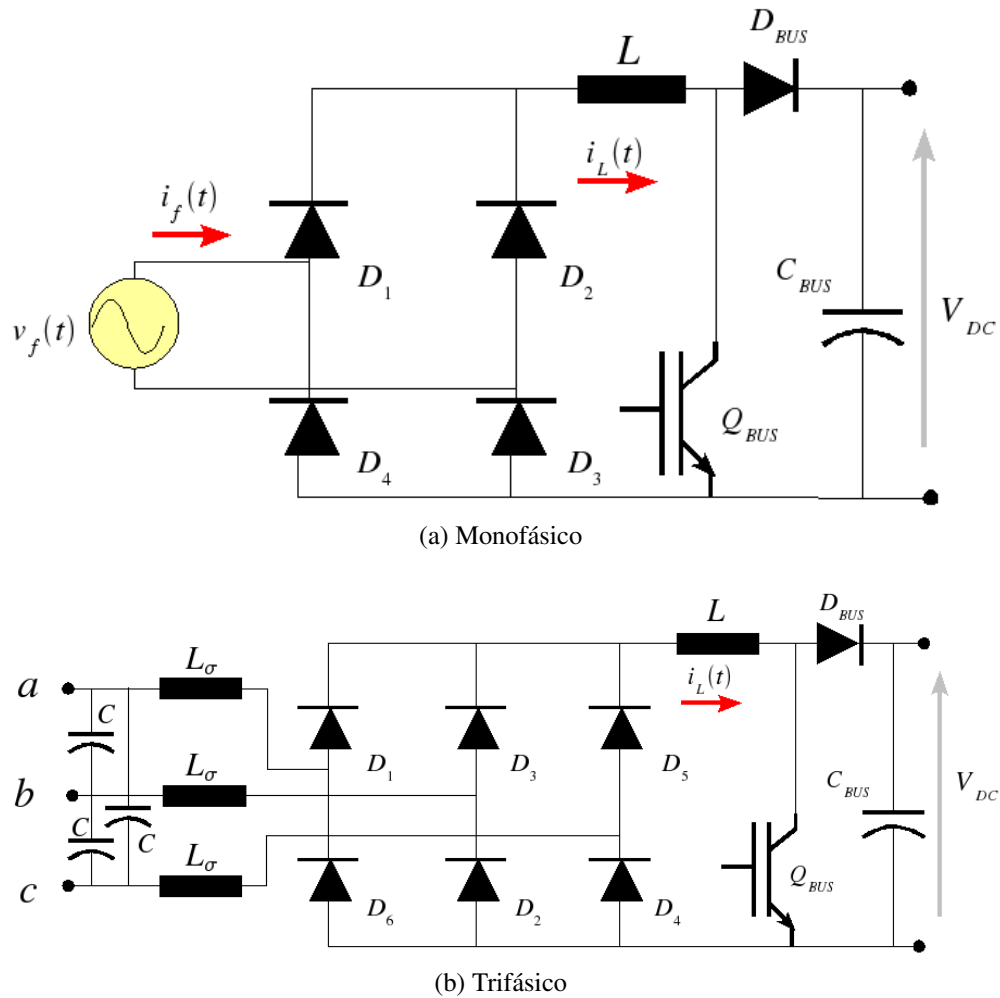


Figura 22.9: Corriente espacial del rectificador $\left(\vec{i}_{rec}\right)$ trifásico en por unidad de I_{DC} .

22.2. Rectificadores Unidireccionales de Potencia

22.2.1. Rectificador *PWM* Boost

En la figura 22.10, se presenta el esquema del puente rectificador *PWM* tipo Boost en su configuración monofásica y trifásica.

Figura 22.10: Rectificador *PWM* con chopper

Este puente permite regular la tensión de la barra de continua y el ángulo relativo entre la tensión y corriente de alimentación, mediante el control de apertura y cierre del transistor Q_{BUS} . En la figura 22.11, se presenta el esquema de control del puente. En este esquema se compara la tensión de la barra de corriente continua con la referencia deseada, el error se introduce en un controlador proporcional integral, la salida de este controlador se multiplica por el modulo de la tensión de la fuente, obteniendo la corriente de referencia de la inductancia L de la barra de continua ($i_{Lref}(t)$). Al comparar la corriente $i_L(t)$ medida con la referencia se determina la secuencia de disparo del transistor Q_{BUS} utilizando por ejemplo la modulación de delta de corriente. Este puente no permite devolver energía a la red de alterna.

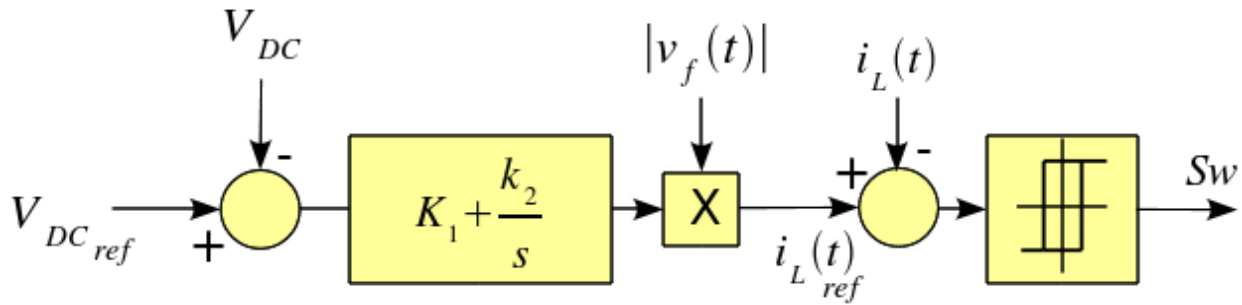


Figura 22.11: Esquema de control del rectificador *PWM* con chopper

22.2.2. Rectificador Vienna

El rectificador tipo Vienna fue propuesto en 1993 por el Prof. Johann W. Kolar y consiste en un puente rectificador de tres niveles $\left(0, \pm \frac{V_{DC}}{2}\right)$ con transistores con capacidad de conducción de corriente bidireccional. En la figura 22.12, se presenta el esquema de un puente rectificador Vienna monofásico. La tensión v_{rec} depende del estado del interruptor Q_1 y del sentido de circulación de la corriente $i_f(t)$. La corriente en el lado de corriente alterna se puede controlar utilizando la expresión (22.1).

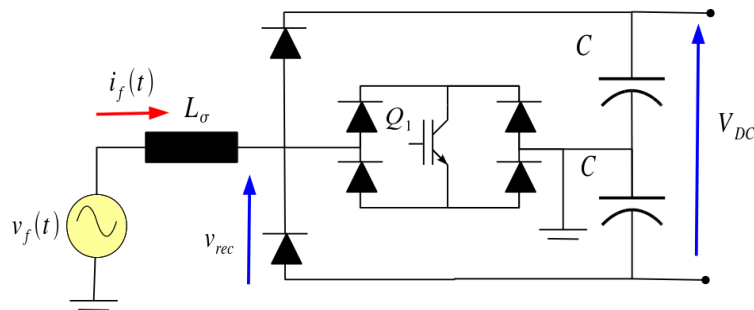


Figura 22.12: Puente rectificador Vienna monofásico

En puentes trifásicos esta configuración se utiliza en fuentes con neutro aislado. En la figura 22.13, se presenta el esquema de un puente rectificador tipo Vienna trifásico. Este puente se puede controlar utilizando vectores espaciales, teniendo en cuenta que no puede traspasar energía del lado de continua a alterna.

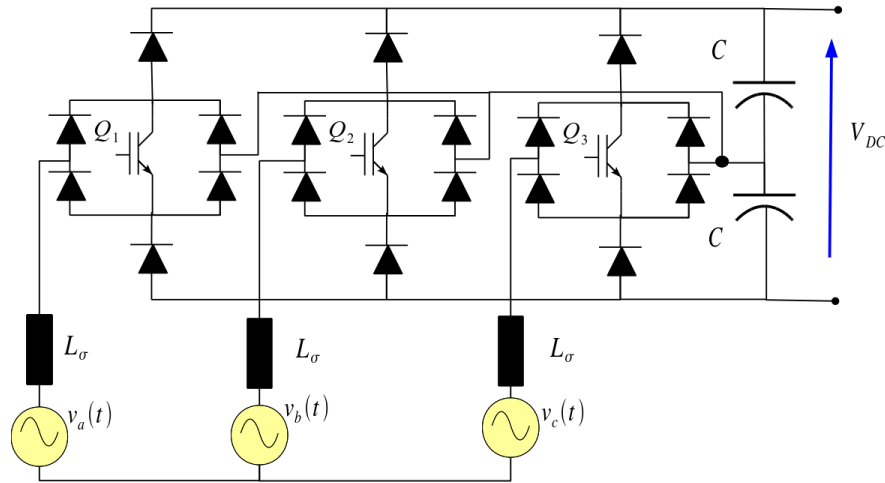


Figura 22.13: Rectificador trifásico tipo Vienna

22.3. Esquemas de Control para Rectificadores *PWM*

A continuación se presentan dos ejemplos de control para puentes rectificadores *PWM* tipo *VSR* trifásicos. El primero controlando la potencia instantánea en la barra de corriente alterna y el segundo controlando la corriente por el sistema alterno.

22.3.1. Control de potencia instantánea

Sin Armónica en la Fuente de Alimentación

En este ejemplo se controla la potencia activa y reactiva instantánea consumida por el rectificador activo desde un sistema de potencia balanceado de secuencia positiva y con tensión equilibrada

$$v_f(t) = \sin(\omega t) \quad (22.7)$$

Durante la operación se cambio la referencia de potencia activa de positiva a negativa, y la de potencia reactiva de cero a positiva. En la figura 22.14 se presenta la variación de la consigan de control de potencia activa y reactiva instantánea del rectificador activo. En esta referencia se invierte el flujo de potencia activa del sistema de alterna al de corriente continua.

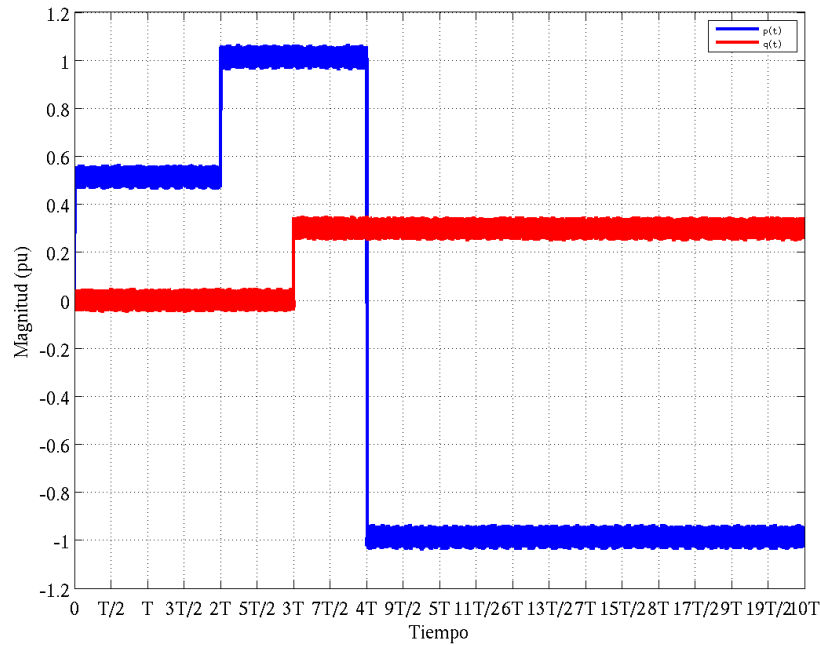


Figura 22.14: Potencia activa y reactiva instantánea en la barra del Sistema

En la figura 22.15 se presenta la forma de onda de tensión y corriente en la fase "a" del sistema de potencia para la consigna de potencia de la figura 22.14. Nótese como la corriente invierte su fase al cambiar el sentido de circulación de la potencia activa.

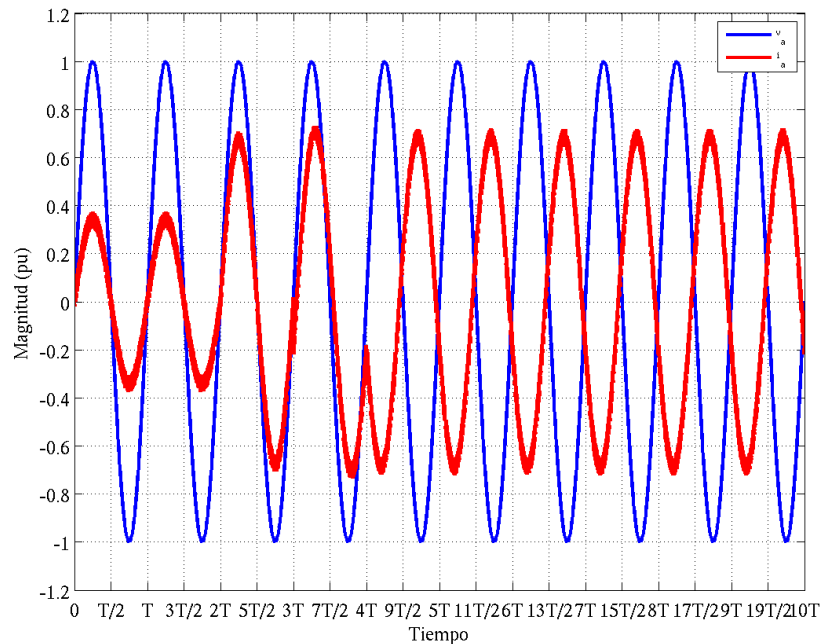


Figura 22.15: Tensión y corriente de la fase "a" en la barra del Sistema

En la figura 22.16 se presenta el contenido armónico de la tensión y la corriente en el sistema de alimentación de alterna para el puente rectificador activo. Se puede destacar que no parecen armónicas por debajo de la armónica treinta.

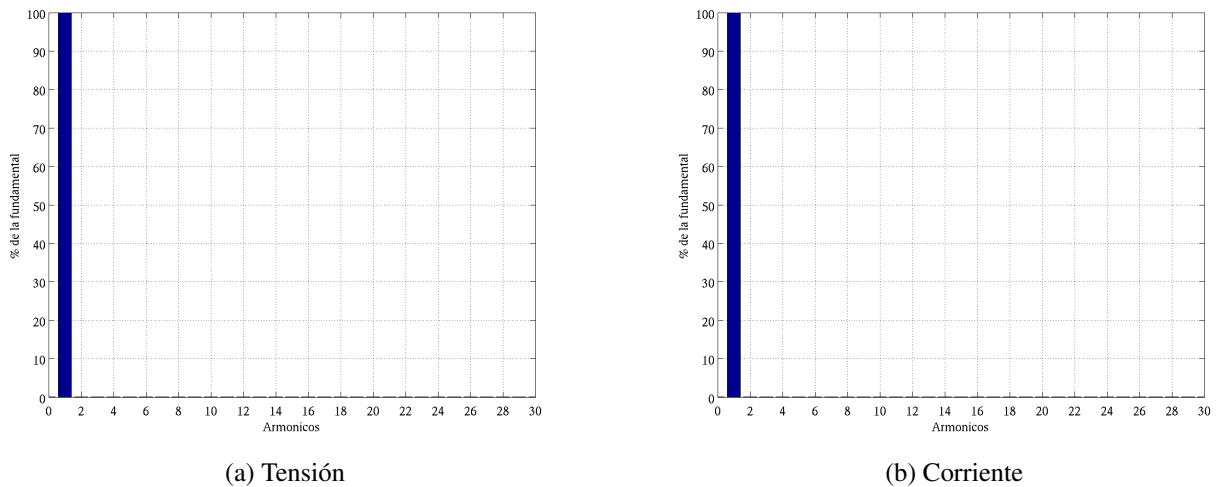


Figura 22.16: Contenido armónico de la tensión y corriente en la fase “a” del sistema

Con Armónica en la Fuente de Alimentación

En este ejemplo se controla la potencia activa y reactiva instantánea consumida por el rectificador activo desde un sistema de potencia balanceado de secuencia positiva y con tensión equilibrada y distorsionada

$$v_f(t) = 1,0 \cdot \text{sen}(\omega t) + 0,2 \cdot \text{sen}(5 \cdot \omega t) \quad (22.8)$$

Durante la operación se cambio la referencia de potencia activa de positiva a negativa, y la de potencia reactiva de cero a positiva. En la figura 22.17 se presenta la variación de la consigan de control de potencia activa y reactiva instantánea del rectificador activo. En esta referencia se invierte el flujo de potencia activa del sistema de alterna al de corriente continua.

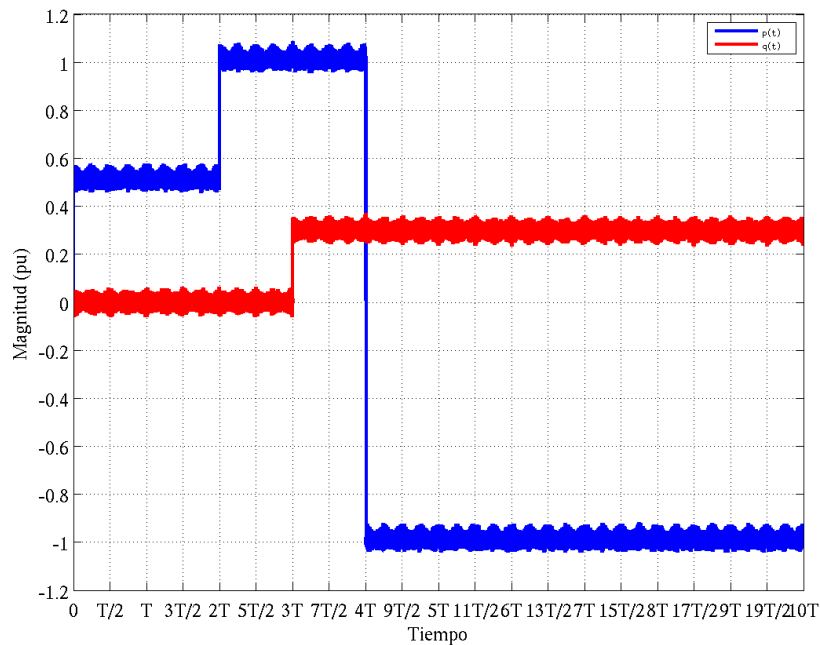


Figura 22.17: Potencia activa y reactiva instantánea en la barra del Sistema

En la figura 22.18 se presenta la forma de onda de tensión y corriente en la fase "a" del sistema de potencia para la consigna de potencia de la figura 22.17. Nótese como la corriente invierte su fase al cambiar el sentido de circulación de la potencia activa.

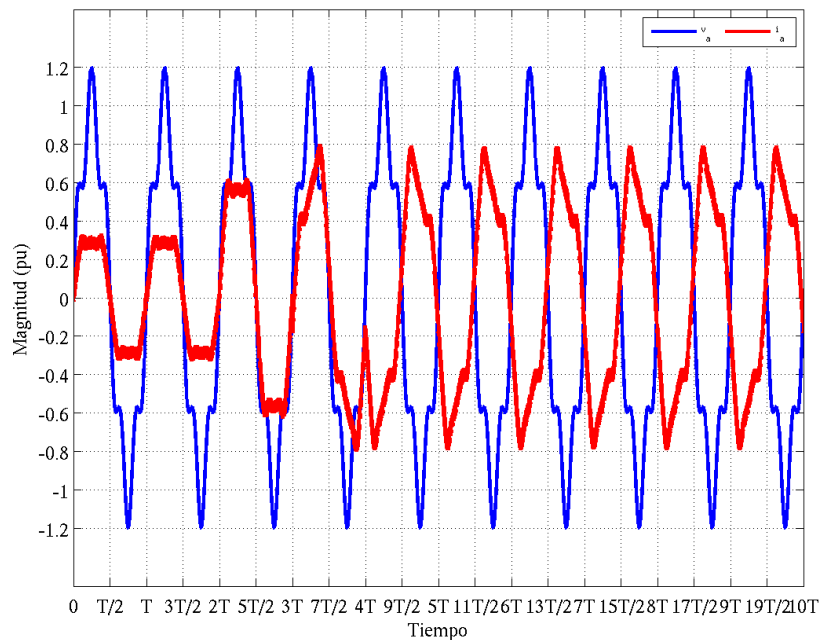


Figura 22.18: Tensión y corriente de la fase "a" en la barra del Sistema

En la figura 22.19 se presenta el contenido armónico de la tensión y la corriente en el sistema de alimentación de alterna para el puente rectificador activo. Se puede destacar como el controlador ajusta el contenido armónico de la corriente a fin de obtener una referencia de potencia activa y reactiva instantánea constante.

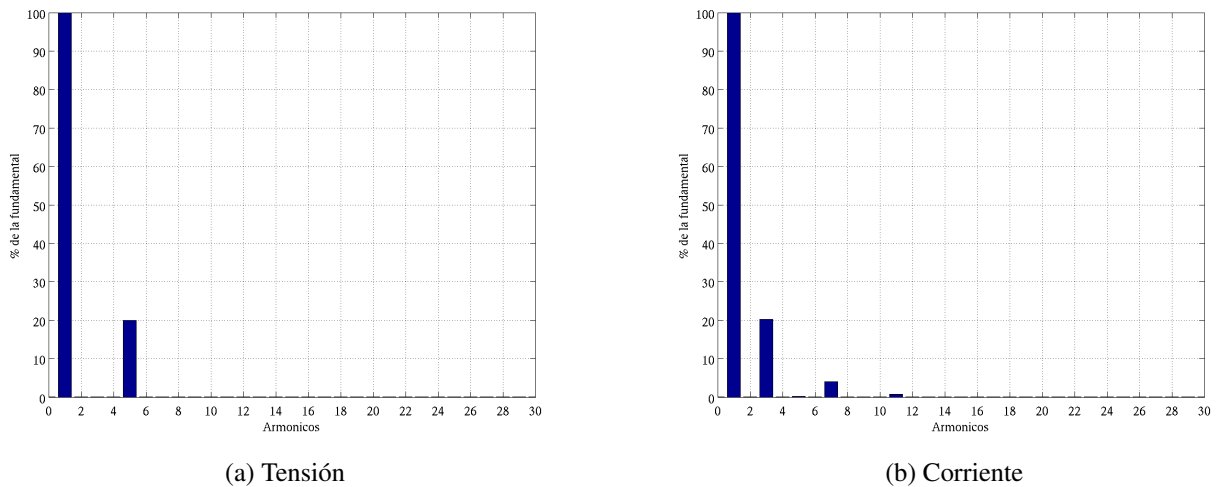


Figura 22.19: Contenido armónico de la tensión y corriente en la fase “a” del sistema

22.3.2. Control de Corriente

En este ejemplo se controla la corriente instantánea consumida por el rectificador activo desde un sistema de potencia balanceado de secuencia positiva y con tensión equilibrada y distorsionada de la forma presentada en la expresión (22.8). Durante la operación se cambio la magnitud y fase de la corriente consumida por el rectificador activo

$$i(t) = I \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (22.9)$$

En la figura 22.20 se presenta la forma de onda de la tensión y la corriente en el sistema de alterna. Durante el tiempo de simulación se cambio la magnitud y la fase de la corriente de referencia como se observa en la figura.

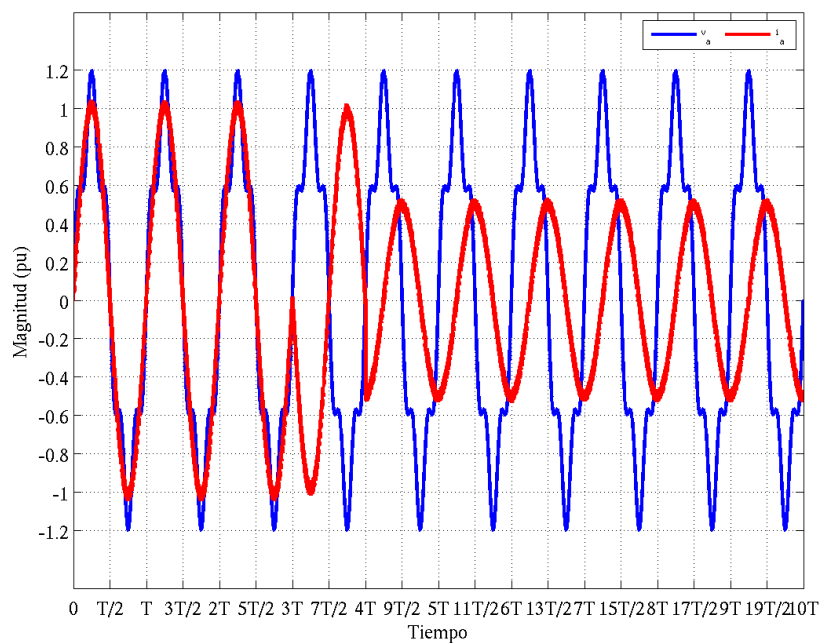


Figura 22.20: Tensión y corriente de la fase “a” en la barra del Sistema

En la figura 22.21 se presenta la potencia activa y reactiva instantánea en el sistema de corriente alterna para cada una de las corrientes de referencias utilizadas en la simulación.

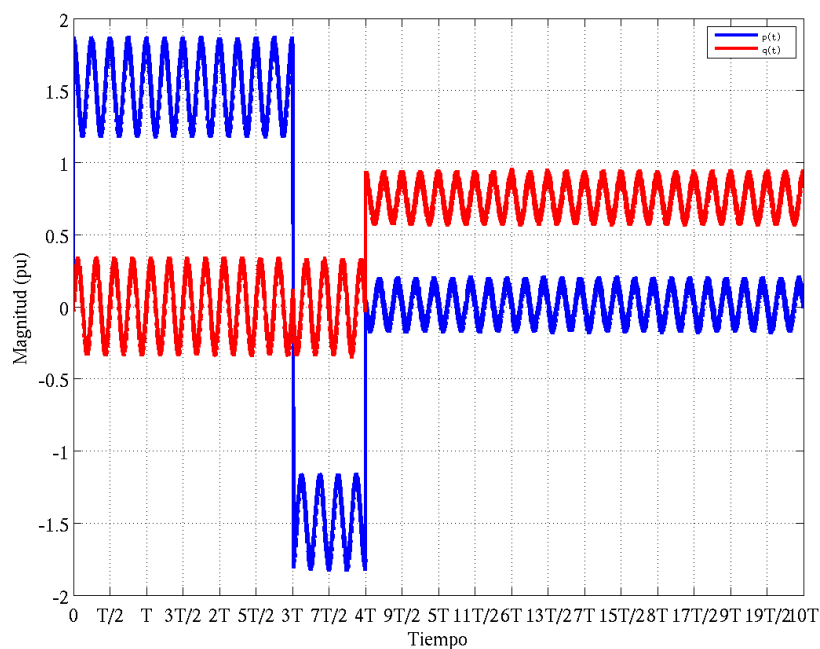
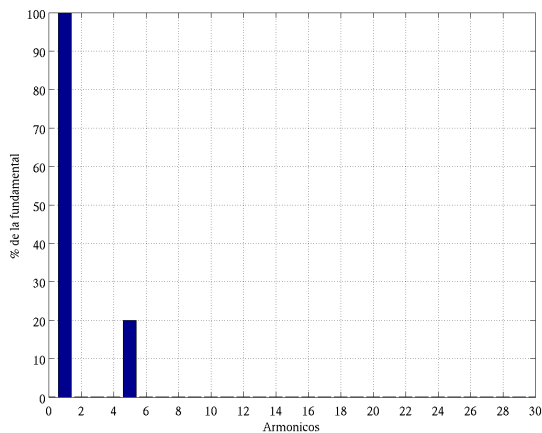
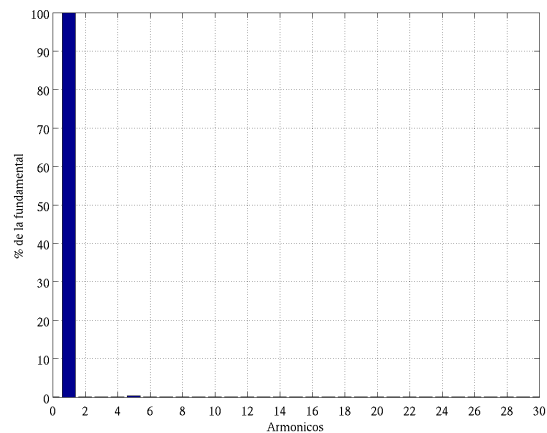


Figura 22.21: Potencia activa y reactiva instantánea en la barra del Sistema

En la figura 22.22 se presenta el contenido armónico de la tensión y corriente por el sistema de corriente alterna. Noté que la corriente sólo presenta armónica fundamental coincidiendo con la referencia suministrada al convertidor.



(a) Tensión



(b) Corriente

Figura 22.22: Contenido armónico de la tensión y corriente en la fase “a” del sistema

Modulación de Vectores Espaciales

23.1. Aspectos Generales

En la figura 23.1 se presenta el inversor trifásico de tensión, este convertidor es utilizado en las mayorías de las aplicaciones modernas que requieren un control preciso del flujo bidireccional de potencia entre los lados de alterna y/o continua. Recientemente muchas investigaciones se centran en el desarrollo de formas eficientes de control, de este puente, con una disminución de la carga computacional del microprocesador, baja inyección de contenido armónico al sistema, reducción de las pérdidas de conmutación y de la interferencia electromagnética y una alta flexibilidad en la selección de la estrategia de modulación utilizando en hardware tradicional de control. Entre las técnicas de control de este convertidor electrónico de potencia, encontramos la modulación delta, eliminación selectiva de armónicas, técnicas de modulación de ancho de pulso *PWM* híbridas, entre otras. De estas técnicas las basados en *PWM* con portadoras triangulares han sido la opción preferida, y en las últimas décadas diversas variantes de esta técnica se han estudiado.

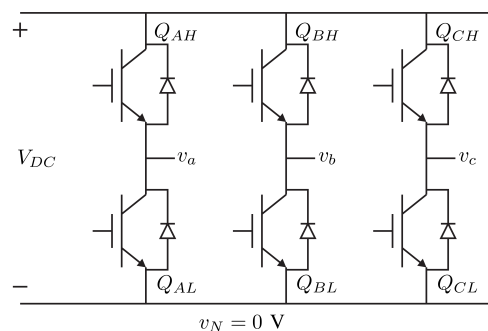


Figura 23.1: Diagrama circuital del inversor de tensión trifásico

En los últimos años, con la disponibilidad de una potencia de procesamiento cada vez mayor, estrategias de control de alto rendimiento basadas en la teoría de vectores espaciales, que han abierto nuevas posibilidades en el control de sistemas dinámicos. La modulación por ancho de

pulso de vectores espaciales (*SVPWM*), ha representado un tema de una extensa investigación para el mejoramiento de las prestaciones del control dinámico.

En este capítulo se propone un algoritmo especialmente diseñado para aplicaciones que requieren cambios frecuentes en las estrategias de modulación, para la generación de un vector espacial de tensión con un periodo promedio de portadora. Las principales ventajas de este algoritmo pueden resumirse como:

- El algoritmo permite la unificación de todas las estrategias de modulación de vectores espaciales con pulsos de simetría central. Este algoritmo puede ser aplicado indistintamente a los sistemas descritos en coordenadas naturales (a, b, c) o a los descritos utilizando coordenadas (x, y) en vectores espaciales.
- Definición de una expresión analítica de identificación del sector de trabajo que utiliza sólo la función de signo, comparaciones lógicas y operaciones aritméticas de suma, resta y multiplicación.
- El algoritmo permite su aplicación para sintetizar modulaciones continuas o discontinuas, como *SPMW*, *SVPWM*, *DPWM_{min}*, *DPWM_{max}*, *DPWM_(0,1,2,3)* a través de la utilización de una fórmula cerrada con un único parámetro para la selección de la estrategia de modulación.
- El ciclo de trabajo para cada una de las ramas del convertidor que se utiliza en sintetizar el vector espacial promedio \vec{v} , utiliza circuitos *PWM* estándares, con un número reducido de operaciones lo cual facilita su aplicación en un alta gama de micro-controladores.
- El algoritmo propuesto utiliza dos vectores para la definición de tres sectores o zonas bases que conforman un paralelogramo, que cubre el espacio hexagonal producido por el convertidor de la figura 23.1.
- A nivel experimental se han comprobado siete ejemplos en el laboratorio y los resultados muestran la ventaja de utilizar el algoritmo generalizado en el propio sistema de coordenadas del control.

23.2. Modulación de Vectores Espaciales

El puente inversor trifásico de la figura 23.1, presenta $4^3 = 64$ estados posibles, de los cuales $3^3 = 27$ son permitidos ya que no producen cortocircuitos sobre el lado de corriente continua, de estos estados sólo $2^3 = 8$ presentan un dispositivo encendido en cada una de las ramas que conforman el puente. Tres de estos estados pueden considerarse un conjunto base para producir mediante combinaciones lineales los otros cinco estados. En la figura 23.2 se muestran tres vectores

bases α^0 , α^1 y α^2 , que corresponden a los estados (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) respectivamente. En esta representación “1” corresponde al componente de potencia de la parte superior de puente (Q_H) encendido mientras que el de la parte inferior (Q_L) se encuentra apagado, y “0” corresponde al componente de potencia de la parte inferior (Q_L) encendido, mientras el superior (Q_H) se encuentra apagado.

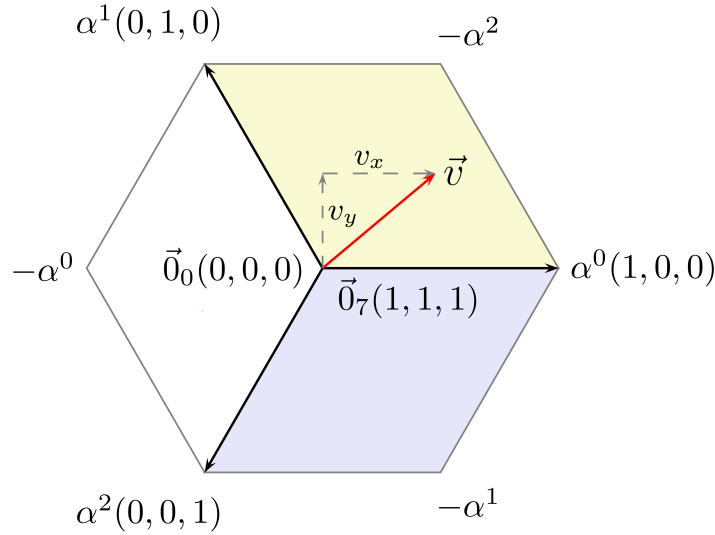


Figura 23.2: Vectores y paralelogramos bases

Cualquier vector espacial promedio, normalizado por ξV_{DC} , inscrito en el espacio hexagonal de la figura 23.2, puede ser obtenido utilizando la transformación de Clarke como:

$$\vec{v} = \xi (v_{aN}\alpha^0 + v_{bN}\alpha^1 + v_{cN}\alpha^2) \quad (23.1)$$

ξ usualmente toma valores de 1, $\frac{2}{3}$ o $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Normalizando la expresión (23.1) por ξV_{DC} , podemos escribir el vector espacial de tensión en por unidad como:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{pu} = v_x + jv_y &= \frac{\xi}{\xi V_{DC}} (v_{aN}\alpha^0 + v_{bN}\alpha^1 + v_{cN}\alpha^2) = \\ &= \frac{1}{V_{DC}} [(v_a - v_N) + (v_b - v_N)\alpha + (v_c - v_N)\alpha^2] = \\ &= (D_a + D_b\alpha + D_c\alpha^2) \end{aligned} \quad (23.2)$$

Donde v_{aN} , v_{bN} y v_{cN} corresponden a las tensiones de las fases con respecto a la barra de tensión negativa de la fuente de corriente continua (V_{DC}), $\alpha = e^{j\frac{2\pi}{3}}$, y D_a , D_b y D_c corresponden a los ciclos de trabajo de cada una de las ramas del inversor de la figura 23.1.

La magnitud instantánea del vector espacial de tensión en el inversor trifásico depende del valor de ξ y esta puede ser calculada de $|v_{a_{max}} \alpha^0| = |v_{b_{max}} \alpha^1| = |v_{c_{max}} \alpha^2| = \xi V_{DC}$. Sin embargo, con el uso de la modulación por ancho de pulso la tensión promedio en cada rama puede ser controlada en cada período de la señal portadora.

En este trabajo se propone un algoritmo general y compacto de modulación por ancho de pulso de vectores espaciales (*SVPWM*) para la síntesis de cualquier vector espacial, en el espacio hexagonal normalizado cubiertos por los vectores base de la figura 23.2. El método utiliza la técnica de dos vectores bases para la modulación mediante intersección con ondas triangulares, también conocida como ondas portadoras en telecomunicaciones.

Este método generalizado puede ser aplicada a los sistemas descritos en coordenadas naturales (a, b, c) o en los sistemas cartesianos (x, y) que describen los vectores espaciales; para ello, las expresiones para la selección del sector utilizando sólo las operaciones matemáticas básicas.

Este algoritmo no permite describir las estrategias de conmutación que no son adecuadas para las implementaciones con portadoras triangulares estándar.

La relación entre el tiempo empleado en el estado $(0, 0, 0)$ en comparación con el tiempo empleado en el estado $(1, 1, 1)$ cuando ambos vectores son utilizado para sintetizar el vector de cero, en un período de *PWM* particular, se ha utilizado tradicionalmente como la base para los diferentes algoritmos generalizados de *SVPWM*. Esta proporción se referirá en este trabajo como la relación vector nulo δ y se utilizará tanto para las coordenadas vectoriales (x, y) y naturales (a, b, c) . En general δ , puede tomar cualquier valor entre cero y uno y al mismo tiempo, este valor puede ser modificado a partir del período de control, dependiendo de la estrategia de modulación que se desee utilizar. Para $\delta = 1$ el vector cero se sintetiza mediante el uso único estado $(0, 0, 0)$. Del mismo modo, para $\delta = 0$ el vector cero se sintetiza utilizando sólo estado $(1, 1, 1)$.

23.2.1. Modulación Generalizada en coordenadas vectoriales (x, y)

Las estrategias de control modernas suelen describir el espacio vectorial mediante un sistema dos coordenadas ortonormales (x, y) y realizan la representación de las variables de estado del sistema de potencia como la tensión, el flujo, la potencia y la corriente en dicho sistema. Para los sistemas trifásicos esta descripción en vectores espaciales tiene la ventaja de reducir la cantidad de las ecuaciones necesarias para un modelo dinámico del mismo, para la realización de procesos de control. Aunque los ciclos de trabajo, para la obtención de una tensión específica, requeridos por cada rama del puente inversor trifásico pueden obtenerse fácilmente mediante el uso de transformaciones de dos o tres ejes. En este trabajo se propone un procedimiento basado sólo en la conmutación de dos ramas del puente en cada ciclo de control.

Definici3n de paralelogramos:

El vector nulo se puede obtener utilizando s3lo el estado $\vec{0}_0 = (0, 0, 0)$ o el estado $\vec{0}_7 = (1, 1, 1)$. Cu3ndo el vector nulo es sintetizado utilizando 3nicamente el estado $\vec{0}_0$, el espacio hexagonal se divide en tres regiones descritas por los paralelogramos $z0 = \{0, 1, 2\}$ que son mostrados en la figura 23.3a. En este caso el vector espacial \vec{v} es sintetizado con la rama que no conmuta en estado “0”. Por otra parte, cuando se realiza la s3ntesis del vector nulo 3nicamente con el estado $\vec{0}_7$ el espacio hexagonal se divide en las tres zonas que forma los paralelogramo $z1 = \{0, 1, 2\}$, presentados en la figura 23.3b y el espacio vectorial se sintetiza con la rama que no conmuta en estado “1”. El espacio hexagonal puede ser dividido en diferentes zonas dependiendo del valor del operador $z0$ o $z1$, de forma general se pueden representar con el operador zn , con $n = \{0, 1\}$. Cada zona es identificada por el super3ndice (zn) para cualquiera de los ejes bases α^{zn} o $-\alpha^{zn}$, este corresponde al vector en el el l3mite de la zona de paralelogramo para un vector espacial \vec{v} y se mueve en sentido antihorario. En general cualquier zona $zn = \{0, 1, 2\}$ puede ser rotada al paralelogramo base ($zone_{z0=0}$) definida por los vectores directores α^0 y α^1 , utilizando rotaci3n y suma vectorial.

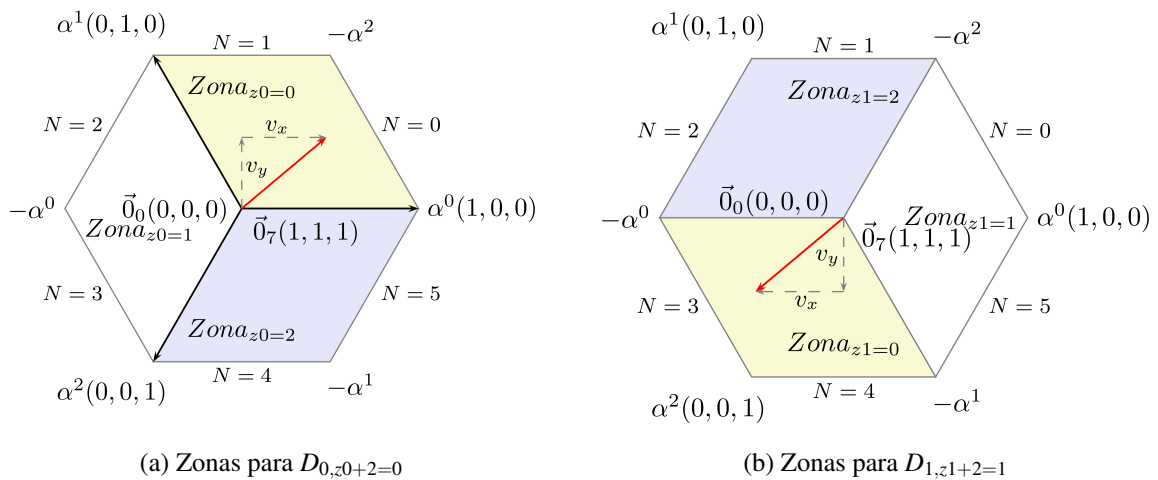


Figura 23.3: Espacio hexagonal normalizado definido por la salida del inversor

En cualquier rama k , con $k = \{0, 1, 2\}$, la operaci3n de la rama no conmutada en el estado n , permite normalizar la magnitud de la tensi3n promedio y definirla igual al ciclo de trabajo $D_{k,n}$. Como se muestra en la figura 23.3, el estado de la rama no conmutada del inversor $D_{n,zn+2} = n$ define la zona de operaci3n con $n = 0$ (fig. 23.3a) y para $n = 1$ (fig. 23.3b). El algoritmo para la sintetizaci3n del vector espacial \vec{v} utiliza las dos descripciones mostradas en la figura 23.3. Esta descripci3n puede ser simplificada utilizando la informaci3n del sector N , que se obtiene utilizando el 3ngulo θ del vector espacial.

$$N = \left\lfloor \frac{3\theta}{\pi} \right\rfloor \quad (23.3)$$

$$\theta(v_x, v_y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) & v_x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) & v_y \geq 0, v_x < 0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) & v_y < 0, v_x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & v_y > 0, v_x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & v_y < 0, v_x = 0 \\ 0 & v_y = 0, v_x = 0 \end{cases} \quad (23.4)$$

donde $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\} = \text{floor}(x)$ y $\theta(v_x, v_y) = \text{atan2}(v_x, v_y)$. Las zonas z_0 y z_1 son definidas utilizando la información del sector N utilizando aritmética de modulo 3, mediante las siguientes expresiones:

$$z_0 = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \pmod{3}, \quad z_1 = \left\lfloor \frac{N+3}{2} \right\rfloor \pmod{3} \quad (23.5)$$

Ciclos de Trabajo para las zonas generalizadas:

La generalización del algoritmo en la zona $z_0 = 0$, definida por los vectores directores α^0 y α^1 , es utilizada para definir este como paralelogramo base y calcular los ciclos de trabajo $D_{n,zn}$ y $D_{n,zn+1}$ requeridos por cualquier vector ubicado en $Zona_{zn}$ en función de los del paralelogramo base. La sintetización de cualquier vector espacial \vec{v} ubicado en cualquier zona ($Zona_{zn}$) requiere sumar al vector espacial en por unidad (\vec{v}_{pu}) el vector $-\alpha^{zn+2}D_{n,zn+2}$, que corresponde al estado de la rama no conmutada. El resultado de esta operación es rotada por el ángulo α^{-zn} . En la figura 23.4, se presenta un ejemplo de esta operación para referir cualquier zona ($Zona_{zn}$) al paralelogramo base. La modulación requerida en las ramas que presentan conmutación se obtiene de:

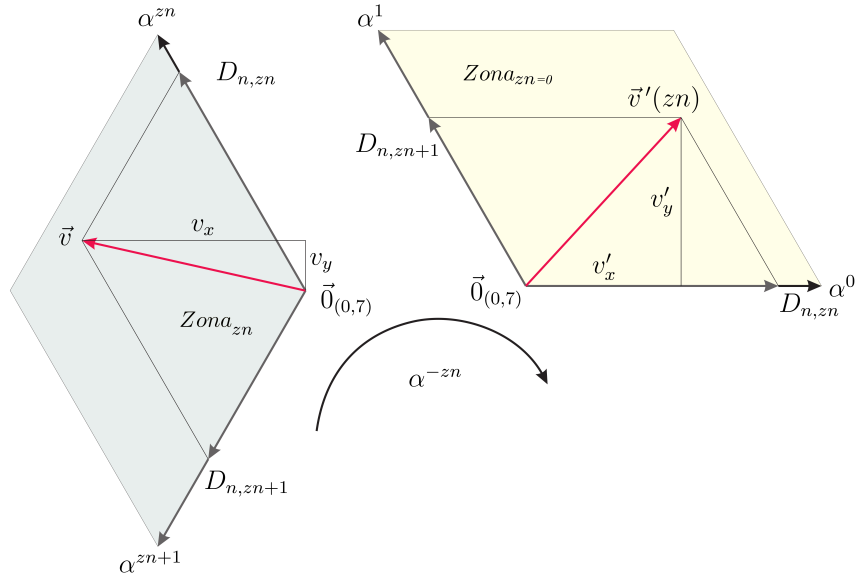


Figura 23.4: Sintetización del vector \vec{v} de una zona zn al paralelogramo base $zn = 0$

$$(\vec{v}_{pu} - \alpha^{zn+2} D_{n,zn+2}) \alpha^{-zn} = \alpha^0 D_{n,zn} + \alpha^1 D_{n,zn+1} \quad (23.6)$$

Definiendo el vector espacial normalizado y rotado como:

$$\vec{v}'(zn) = v'_x + jv'_y = \vec{v}_{pu} \alpha^{-zn} \quad (23.7)$$

Reemplazando la expresión (23.7) en (23.6),

$$\vec{v}'(zn) - \alpha^2 D_{n,zn+2} = \alpha^0 D_{n,zn} + \alpha^1 D_{n,zn+1} \quad (23.8)$$

Considerando n , el estado de la rama que no conmuta, los ciclos de trabajo del inversor se calculan como:

$$\begin{aligned} D_{n,zn} &= v'_x + \frac{v'_y}{\sqrt{3}} + n \\ D_{n,zn+1} &= \frac{2v'_y}{\sqrt{3}} + n \\ D_{n,zn+2} &= n \end{aligned} \quad (23.9)$$

donde $D_a = D_{n,0}$, $D_b = D_{n,1}$ y $D_c = D_{n,2}$, y los subíndices operan utilizando aritmética de módulo 3.

23.2.2. Modulación Generalizada en coordenadas naturales (a, b, c)

Una aplicación sencilla de *SVPWM* en coordenadas naturales (a, b, c) , utiliza las tensiones de fase normalizadas, cuando el vector cero ($\vec{0}_0$) es sintetizado únicamente con el estado $(0, 0, 0)$ es proporcional a las siguientes expresiones:

$$D_{0,k} = (v_{kN} - v_{min}) \quad k = a, b, c. \quad (23.10)$$

Cuando el vector cero ($\vec{0}_7$) es sintetizado sólo con el estado $(1, 1, 1)$:

$$D_{1,k} = (1 + v_{kN} - v_{max}) \quad k = a, b, c \quad (23.11)$$

donde, las tensiones están normalizadas por V_{DC} y,

$$v_{min} = \frac{1}{V_{DC}} \text{mín}(v_{aN}, v_{bN}, v_{cN}) \quad (23.12)$$

$$v_{max} = \frac{1}{V_{DC}} \text{máx}(v_{aN}, v_{bN}, v_{cN})$$

Estas dos formas posibles para sintetizar un vector espacial se utilizarán más adelante en la versión escalar del algoritmo generalizado de *SVPWM*.

23.2.3. Relación de uso del vector nulo δ en *SVPWM*

Un parámetro similar a la relación vector nulo δ , tradicionalmente se ha propuesto como un parámetro de control en diversas técnicas de modulación por diferentes autores. Como primera estrategia de modulación de δ proporciona una forma de combinar los ciclos de trabajo resultantes de sintetizar el vector nulo $\vec{0}$ mediante los estados $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$. Una estrategia más general de modulación de este parámetro puede ser una función de la posición angular del vector espacial a sintetizar.

Aplicación de la relación δ en coordenadas vectoriales (x, y)

Los ciclos de trabajo obtenidos para cada rama del inversor de tensión mediante el algoritmo generalizado, corresponden a un promedio de los ocho (8) posibles estados permisibles del convertidor. Estableciendo una combinación lineal entre los ciclos de trabajo obtenidos en función del estado de la rama no conmutada del inversor obtenemos:

$$D_k = \delta D_{0,k} + (1 - \delta) D_{1,k} \quad k = \{0, 1, 2\} \quad (23.13)$$

La aplicación práctica del algoritmo generalizado de modulación se simplifica mediante la definición de las siguientes variables intermedias,

$$f_x = v_x; \quad f_y = \frac{v_y}{\sqrt{3}} \quad (23.14)$$

Utilizado estas variables intermedias, la selección del sector se puede expresar como:

$$N(f_x, f_y) = \left\lfloor \frac{3\theta}{\pi} \right\rfloor = 2,5 - \text{sgn}(f_y) [(f_x > f_y) + (f_x > -f_y) + 0,5] \quad (23.15)$$

$N(f_x, f_y)$ localiza el vector espacial a ser sintetizado dentro de uno de los sectores que define el espacio hexagonal de la figura 23.3, y define las expresiones necesarias para calcular los ciclos de trabajo D_a , D_b y D_c .

El procedimiento para calcular los ciclos de trabajo de cada una de las ramas del inversor, se puede resumir en:

1. De las expresiones (23.14) y (23.15), se determina el sector donde se encuentra el vector espacial a ser sintetizado.
2. Con el sector N , y las expresiones (23.5), se determina el valor de z_0 y z_1 .
3. De la expresión (23.7), se calcula $\vec{v}'(z_0)$ y $\vec{v}'(z_1)$.
4. El subíndice zn en la expresión (23.9) es remplazado primero con z_0 y luego con z_1 , obteniendo los ciclos de trabajo en función del estado de la rama que no conmuta ($D_{o,k}, D_{1,k}$).
5. Finalmente, se determina los ciclos de trabajo de cada rama (D_a, D_b, D_c) en función del parámetro δ utilizando la expresión (23.13)

En la tabla 23.1, se presentan las expresiones necesarias para el cálculo de los ciclos de trabajo de cada una de las ramas del inversor en función de las variables intermedias y del parámetro δ . Esta tabla se obtiene utilizando el procedimiento anteriormente descrito y puede ser utilizada en la implementación del algoritmo generalizado.

Tabla 23.1: Expresiones para la implementación práctica de los ciclos de trabajo del algoritmo generalizado

N	z_0	z_1	D_a	D_b	D_c
0	0	1	$\delta(f_x + f_y - 1) + 1$	$D_a - f_x + f_y$	$D_a - f_x - f_y$
1	0	2	$D_b + f_x - f_y$	$\delta(2f_y - 1) + 1$	$D_b - 2f_y$
2	1	2	$D_b + f_x - f_y$	$\delta(-f_x + f_y - 1) + 1$	$D_b - 2f_y$
3	1	0	$D_c + f_x + f_y$	$D_c + 2f_y$	$\delta(-f_x - f_y - 1) + 1$
4	2	0	$D_c + f_x + f_y$	$D_c + 2f_y$	$\delta(-2f_y - 1) + 1$
5	2	1	$\delta(f_x - f_y - 1) + 1$	$D_a - f_x + f_y$	$D_a - f_x - f_y$

Aplicación de la relación δ en coordenadas naturales (a, b, c)

En coordenadas naturales, los ciclos de trabajo de las ramas del inversor se obtienen utilizando la expresión 23.13 y sustituyendo en esta los resultados de las expresiones (23.10) y (23.11), se obtiene:

$$D_k = (1 - \delta)(1 - v_{max}) - \delta v_{min} + v_{kN} \quad \{k = a, b, c\} \quad (23.16)$$

En coordenadas naturales las estrategias de modulación se obtienen por inyección de componente de secuencia cero, la tensión de secuencia cero v_0 inyectada por la estrategia de modulación es,

$$v_0 = (1 - \delta)(1 - v_{max}) - \delta v_{min} \quad (23.17)$$

y los ciclos de trabajo son:

$$D_k = v_0 + v_k \quad \{k = a, b, c\} \quad (23.18)$$

El *SVPMW* clásico puede ser obtenido, seleccionando $\delta = \frac{1}{2}$.

23.2.4. Método de Modulación Generalizado utilizando δ

Como mencionamos en 23.1, los métodos de modulación son infinitos en teoría y depende de la escogencia del valor de la relación del vector nulo δ , pero únicamente pocos casos han sido reportados en aplicaciones practicas. Las técnicas de modulación vectorial pueden dividirse en modulación por ancho de pulso continuas (*CPWM*) y discretas (*DPWM*) tanto para las formulación en coordenadas naturales como vectoriales. El método generalizado propuesto en este trabajo reproduce las estrategias de modulación *SVPMW*, *DPWM*₀, *DPWM*₁, *DPWM*₂ y *DPWM*₃ que presenta Hava a

inicios del siglo XXI, estableciendo la relación del vector nulo δ en función de la posición angular del vector espacial de tensión en por unidad ($\vec{v}_{pu} = v_x + jv_y$). En la tabla 23.2 se presenta el valor de δ , obtenidas a partir del algoritmo generalizado, para cada una de estas modulaciones.

Tabla 23.2: Ejemplos de modulaciones utilizando el algoritmo generalizado

Modulación	δ
$DPWM_{min}$	1
$DPWM_{max}$	0
$SVPWM$	$\frac{1}{2}$
$DPWM_0$	$\frac{1}{2} [1 + (-1)^{n_1}]$
$DPWM_1$	$\frac{1}{2} [1 + (-1)^{n_2}]$
$DPWM_2$	$\frac{1}{2} [1 + (-1)^{(n_1+1)}]$
$DPWM_3$	$\frac{1}{2} [1 + (-1)^{(n_2+1)}]$
$SPWM$	$\left[\frac{\frac{2}{3}v_{rx} - \frac{1}{2}}{v_{rx} + \frac{v_{ry}}{\sqrt{3}} - 1} - \frac{1}{2} \right] \cdot (-1)^{n_1} + \frac{1}{2}$ $v_{rx} + jv_{ry} = (v_x + jv_y) \cdot \alpha^{-\frac{\pi}{3}n_1}$
Para coordenadas vectoriales (x, y): $n_1 = N = 2,5 - \text{sign}(f_y) [(f_x > f_y) + (f_x > -f_y) + 0,5]$ $n_2 = 3,5 - \text{sign}(f_x + 3f_y) [(f_x > 0) + (f_x > 3f_y) + 0,5]$	
Para coordenadas naturales (a, b, c): $n_1 = N = 2,5 - \text{sign}(v_{bN} - v_{cN}) [(v_{aN} > v_{bN}) + (v_{aN} > v_{cN}) + 0,5]$ $n_2 = 3,5 + \text{sign}(v_{cN}) [(v_{aN} > 0) + (v_{aN} > -v_{cN}) + 0,5]$	

Aunque el algoritmo generalizado es la combinación lineal de dos métodos de modulación discontinua $DPWM_{min}$ y $DPWM_{max}$, la modulación sinusoidal estándar puede ser representada mediante el ajuste de δ en función del ángulo θ del vector espacial.

Por ejemplo, la señal sinusoidal con amplitud máxima que se puede sintetizar en cada rama del puente inversor, debe poseer un valor medio de $\frac{V_{DC}}{2}$. Esta estrategia de modulación trae como resultado en las tres fases del sistema una componente de secuencia cero constante. Para este ejemplo, los ciclos de trabajo del puente inversor son,

$$\begin{aligned}
 D_a(t) &= \frac{1}{2} [1 + \text{sen}(\omega t + \phi)] \\
 D_b(t) &= \frac{1}{2} [1 + \text{sen}(\omega t + \phi - 2\pi/3)] \\
 D_c(t) &= \frac{1}{2} [1 + \text{sen}(\omega t + \phi - 4\pi/3)]
 \end{aligned} \tag{23.19}$$

donde la componente de secuencia cero corresponde a:

$$D_a(t) + D_b(t) + D_c(t) = \frac{3}{2} \quad (23.20)$$

Reemplazando la expresión (23.20) en la (23.13), obtenemos el valor de δ para esta modulación como:

$$\delta = \frac{\frac{3}{2} - \sum D_{1,k}}{\sum (D_{0,k} - D_{1,k})} \quad \{k = 0, 1, 2.\} \quad (23.21)$$

Para ángulos del vector espacial de tensión comprendidos en el rango de $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \rightarrow N = 0$, reemplazando este resultado en la expresión (23.9), el valor de δ se obtiene como:

$$\delta = \left[\frac{\frac{2}{3}v_x - \frac{1}{2}}{v_x + \frac{v_y}{\sqrt{3}} - 1} \right] \quad (23.22)$$

Si el ángulo θ del vector espacial se encuentra fuera del rango $[0, \frac{\pi}{3}]$, se puede emplear la expresión (23.22) para el cálculo del δ , rotando el vector espacial en por unidad (\vec{v}_{pu}) en $\alpha^{-\frac{\pi}{3}N}$, es decir:

$$\vec{v}_r = v_{rx} + jv_{ry} = (v_x + jv_y) \cdot \alpha^{-\frac{\pi}{3}N} \quad (23.23)$$

Finalmente se puede calcular δ para la modulación *SVPWM*, en coordenadas vectoriales, a partir de la expresión (23.23) como:

$$\delta = \left[\frac{\frac{2}{3}v_{rx} - \frac{1}{2}}{v_{rx} + \frac{v_{ry}}{\sqrt{3}} - 1} - \frac{1}{2} \right] \cdot (-1)^N + \frac{1}{2} \quad (23.24)$$

La ecuación 23.24 puede expresarse en coordenadas naturales como:

$$\delta = \frac{\frac{1}{2} - v_{max}}{1 - v_{max} + v_{min}} \quad (23.25)$$

23.2.5. Ejemplos de secuencias de disparo del inversor

En la figura 23.5, se muestra los ciclos de trabajo típicos necesario para producir una trayectoria circular de amplitud máxima del vector espacial de tensión utilizando los valores de $\delta = 0, 1, \frac{1}{2}$. La trayectoria circular utilizada en coordenadas vectoriales (x, y), para este ejemplo es:

$$\vec{v}_{pu}(t) = v_x + jv_y = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{j\omega t} \quad (23.26)$$

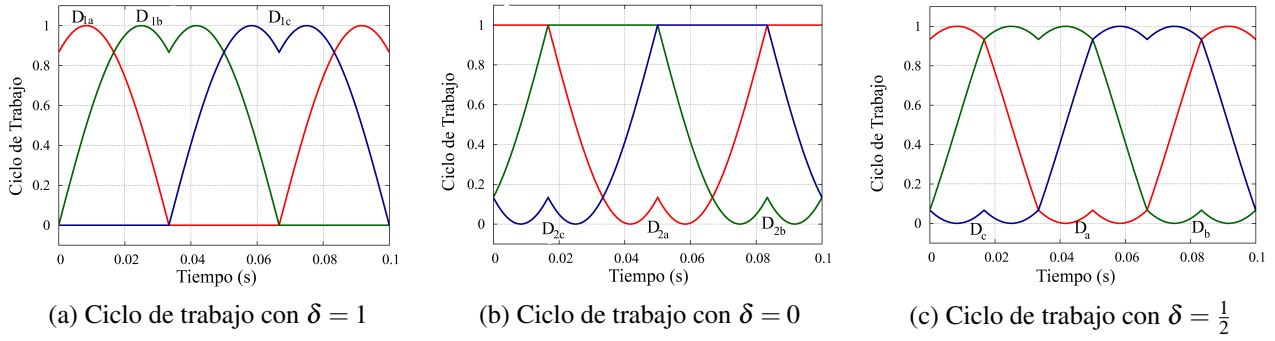


Figura 23.5: Formas de onda para una modulación de trayectoria circular con amplitud máxima utilizando *SPWM*

23.3. Resultados Experimentales

Durante la implementación práctica del algoritmo generalizado, hay varios factores que deben ser considerados para optimizar la longitud del código y la complejidad de las operaciones utilizadas. Para los microprocesadores de gama baja, ninguna función trigonométrica debe ser empleada y el número de operaciones deben mantenerse al mínimo. Para lograr esto, las variables intermedias definidas en la expresión (23.14), se utilizan para la modulación en coordenadas vectoriales (x, y) .

La superposición de las tres zonas de paralelogramo definidas en la figura 23.3, para la modulación con el vector cero sintetizado con los estados $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$, resulta en los seis sectores tradicionales triangulares que definen el espacio hexagonal de trabajo del puente inversor. La tabla 23.1 presenta los ciclos de trabajo correspondientes a cada sector de N en el hexágono, en función de la relación vector nulo δ . La tabla 23.1 es una representación directa de la aplicación práctica del algoritmo generalizado.

Para la implementación práctica del algoritmo, se puede calcular la relación del vector nulo δ en la tabla 23.2 para los casos $DPWM_0$, $DPWM_1$, $DPWM_2$ y $DPWM_3$ simplemente extrayendo el bit menos significativo (*LSB*) de n_1 o n_2 .

$$\begin{aligned}
 DPWM_0 &\rightarrow \delta = \text{not}(n_1 \& 1) \\
 DPWM_1 &\rightarrow \delta = \text{not}(n_2 \& 1) \\
 DPWM_2 &\rightarrow \delta = (n_1 \& 1) \\
 DPWM_3 &\rightarrow \delta = (n_2 \& 1)
 \end{aligned}$$

El algoritmo propuesto se implementó en un *DSP* de punto flotante (*ADSP-21061-40MHz*) utilizando una plataforma de pruebas experimental. La etapa de potencia de la plataforma utiliza seis IGBT's de 50A, 1200V, con un capacitor de 2200 μF a 450V en la barra de corriente continua. El puente se acopla al sistema mediante tres inductores de 7mH y 0,05 Ω .

Las señales de *PWM* se obtienen de un coprocesador de movimiento *ADMC – 201AP*, con las siguientes condiciones de funcionamiento:

Frecuencia del reloj	8MHz
Tiempo muerto	500ns
Pulso de supresión	500ns
Selección del período muestreo de conmutación del <i>PWM</i>	800

Con esta configuración de los circuitos de *PWM* se encuentran operando a una frecuencia de conmutación de 10kHz. Los registros para la programación de los ciclos de trabajo del *PWM* utiliza números enteros en el rango de $[0 \leftrightarrow 800]$ para definir los ciclos de trabajo entre 0% y el 100%.

En las figuras 23.6 y 23.7, se presenta la corriente y señal de disparo para los componentes de la fase “a” del puente inversor de la figura 23.1, para las modulaciones $DPWM_{min}$, $DPWM_{max}$, $DPWM_0$, $DPWM_1$, $DPWM_2$ y $DPWM_3$ sintetizando un vector espacial de tensión que describe una trayectoria circular con una magnitud en por unidad de 0,8998.

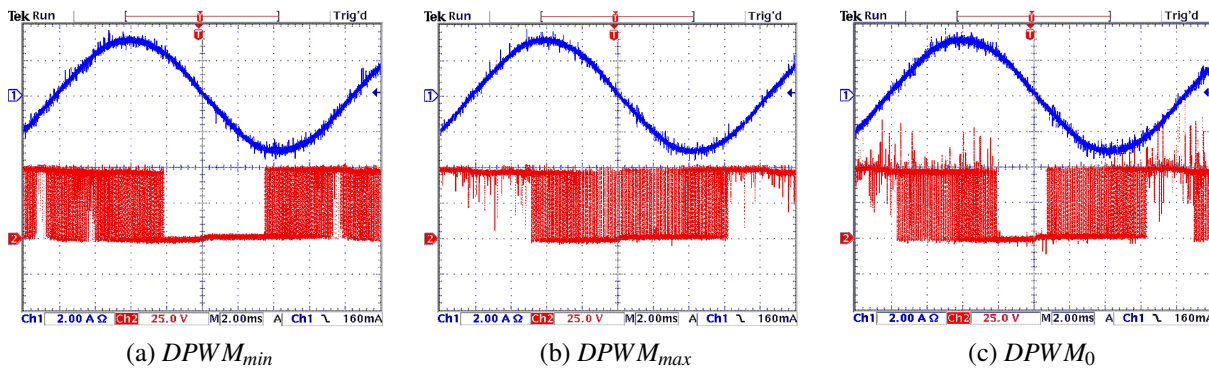


Figura 23.6: Corriente y señal de disparo en la fase “a” del inversor para las modulaciones $DPWM_{min}$, $DPWM_{max}$ y $DPWM_0$.

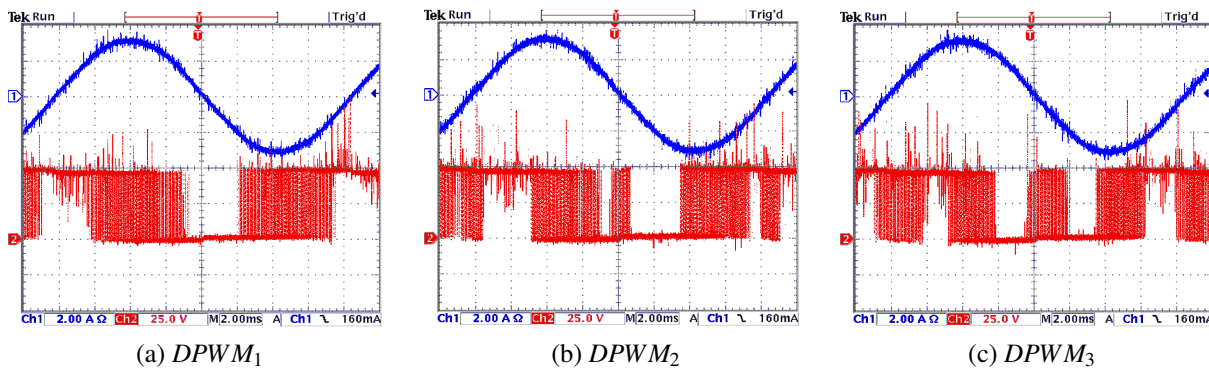


Figura 23.7: Corriente y señal de disparo en la fase “a” del inversor para las modulaciones $DPWM_1$, $DPWM_2$ y $DPWM_3$.

En la figura 23.8, se presenta el contenido armónico de la corriente en la fase “a” de la carga, este contenido varía de manera poco significativa para todos los los métodos de modulación analizados. Aunque las formas de onda de corriente y su contenido armónico aparecen la misma para los seis métodos de modulación a analizados, la señal de disparo para los dispositivos de cada rama del puente inversor tienen formas diferentes.

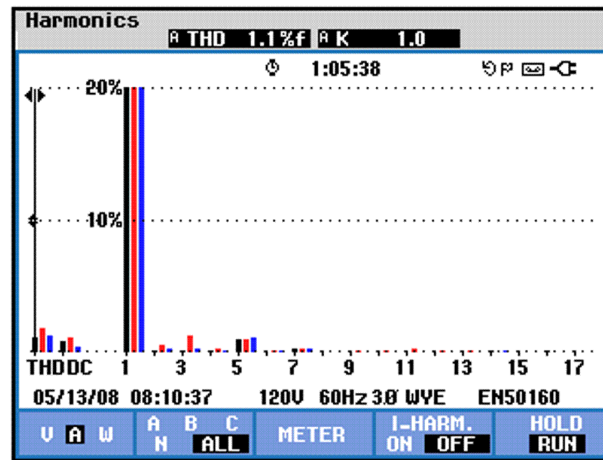


Figura 23.8: Contenido armónico de la corriente en la fase “a” para los diferentes métodos de modulación

En la tabla 23.3, se muestra las operaciones requeridas por las estrategias de modulación en coordenadas naturales (a, b, c) y vectoriales (x, y). La menor cantidad de operaciones se logra con una relación constante vector nulo δ , pero si este es varía la cantidad de operaciones es similar en ambos sistemas de coordenadas.

Tabla 23.3: Operaciones computacionales para las diferentes modulaciones *SVPWM*

	Función	δ constante	$DPWM_0$	$DPWM_1$	$DPWM_2$	$DPWM_3$
Coordenadas Vectoriales (x, y)	Multiplicación	7	6	8	6	8
	Sumas	10	11	15	10	14
	Lógicas	2	3	5	3	5
	Signo	1	1	2	1	2
Coordenadas Naturales (a, b, c)	Multiplicación	5	6	6	6	6
	Sumas	6	11	10	10	9
	Mínimo	2	2	2	2	2
	Máximo	2	2	2	2	2
	Lógicas	0	3	3	3	3
	Signo	0	1	1	1	1

En la tabla 23.4 se muestra el tiempo de ejecución del algoritmo generalizado implementado sobre un procesador digital de señales. Para esta aplicación particular, la diferencia en tiempo de ejecu-

ción es también insignificante para las estrategias de modulación en los dos sistemas de coordenadas. Estos resultados corroboran la ventaja de utilizar una estrategia de modulación en el mismo sistema de coordenadas utilizado por el controlador.

Tabla 23.4: Tiempos de ejecución del algoritmo generalizado en *ADSP – 21061* a 40MHz

Método de Modulación	Tiempo en μs	
	Coordenadas vectoriales	Coordenadas naturales
$DPWM_{min}$	1,62	1,03
$DPWM_{max}$		
$SV PWM$		
$DPWM_0$	2,18	2,13
$DPWM_1$	2,18	2,13
$DPWM_2$	2,15	2,10
$DPWM_3$	2,15	2,10

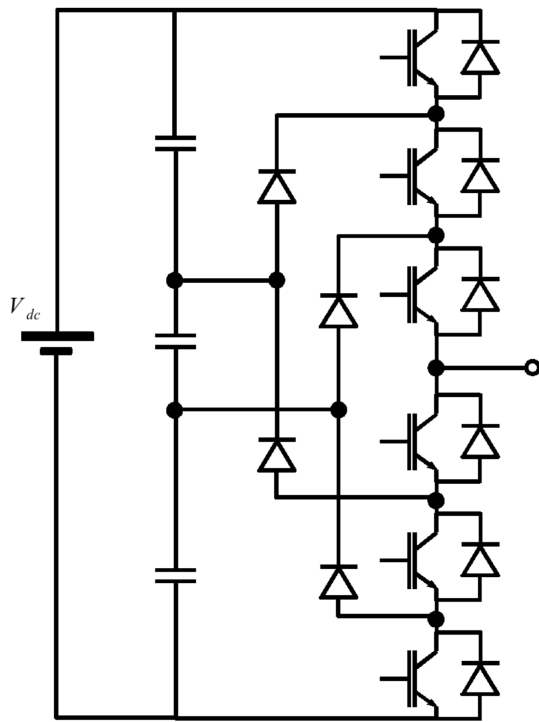
23.4. Convertidores Multinivel

Recientemente se han introducido a nivel industrial aplicaciones que requieren convertidores multinivel. Estos convertidores incrementan el número de interruptores electrónicos de potencia necesarios para obtener niveles de tensión adicionales, que permitan reducir la necesidad de conmutaciones y aumentar la eficiencia del puente. En la actualidad las topologías de mayor uso dependen del tipo de acoplamiento entre los diferentes niveles: mediante diodos, utilizando capacitores flotantes o en conexión cascada.

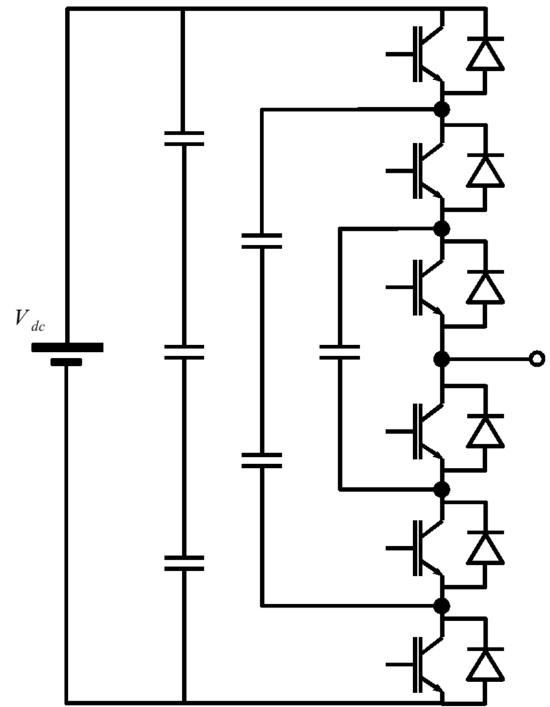
En la figura 23.9 se muestran las tres topologías utilizadas en la literatura para una rama del puente convertidor. En la Figura 23.9a se ilustra una rama del convertidor multinivel con acoplamiento mediante diodos, en la figura 23.9b se utilizan condensadores flotantes y en la Figura 23.9c se representa una rama del esquema en cascada. Por otra parte, para cargas con terminales abiertos se puede obtener un convertidor multinivel utilizando el puente dual mostrado en la figura 23.10, cuya topología corresponde a la de un convertidor de dos niveles en cascada. Este tipo de carga es común en convertidores electromecánicos, especialmente aquellos diseñados para ser utilizados con arrancadores estrella-delta.

Los convertidores multinivel presentan varias ventajas para la alimentación de las diversas cargas encontradas en aplicaciones industriales de potencia, entre las cuales se destacan:

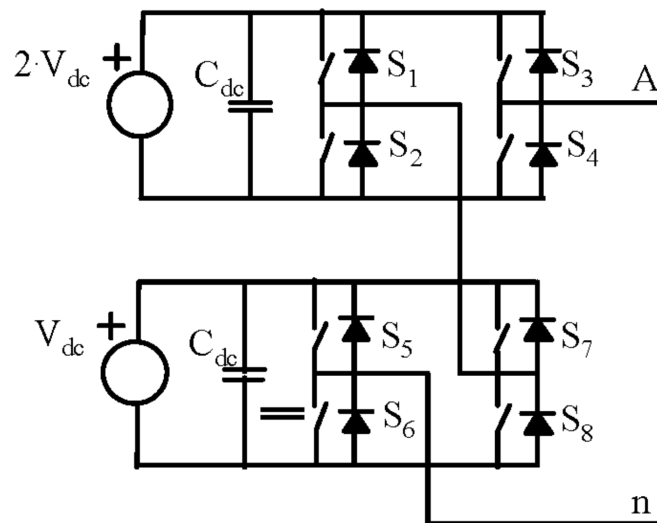
- Obtener señales con un menor contenido armónico.
- La tensión al que se someten los dispositivos conmutadores de potencia es menor que en el caso de los convertidores de dos niveles.



(a) Rama multinivel acoplada mediante diodos



(b) Rama multinivel acoplada mediante capacitores



(c) Rama multinivel tipo cascada

Figura 23.9: Diferentes configuraciones de ramas de convertidores multinivel

- Proporcionan mayores estados de conmutación.
- Utilizan menores frentes de onda de tensión (dv/dt).

Los esquemas de modulación, para puentes multinivel reportados en la literatura se basan en el uso de técnicas de *PWM* donde se requiere generar tantas portadoras como niveles presente el puente. En la configuración dual mostrada en la figura 23.10, cada devanado del estator se alimenta mediante un puente “H”, con lo cual se obtienen los valores V_{dc1} , $(V_{dc1} - V_{dc2})$ y $-V_{dc2}$ entre los terminales de cada fase de la máquina de inducción.

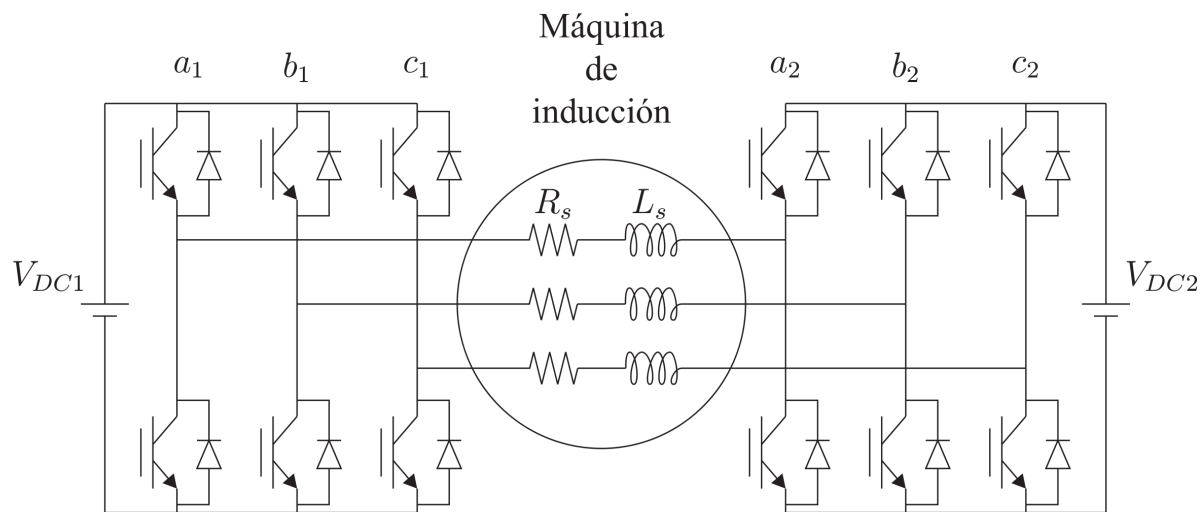


Figura 23.10: Puente convertidor dual en cascada para alimentación de máquinas de inducción con extremos abiertos

La presencia de los dos inversores incrementa el número de los estados de conmutación posibles. En un inversor trifásico simple existen 7 estados diferentes ($2^3 - 1$), mientras que en un multinivel en cascada se obtendría un máximo de 7^n , donde n es el número de etapas en cascada. Para el caso de la figura 23.10, se obtiene un máximo de 49 posibles estados. En la Figura 23.11 se muestran los vectores espaciales que es posible obtener para diferentes valores de las fuentes V_{dc1} y V_{dc2} . En la Figura 23.11a se muestra el caso cuando las tensiones de la barra de continua de ambos puentes son iguales, en el cual se obtienen solamente 19 estados diferentes. En la Figura 23.11b se muestra el caso cuando una barra de corriente continua es el doble que la otra, en el cual se obtienen 37 estados diferentes con una distribución uniforme. Finalmente en la Figura 23.11c se muestra el caso cuando la barra de tensión continua de un puente es mayor al doble que la otra, en el cual se obtienen 49 estados posibles con una distribución no uniforme.

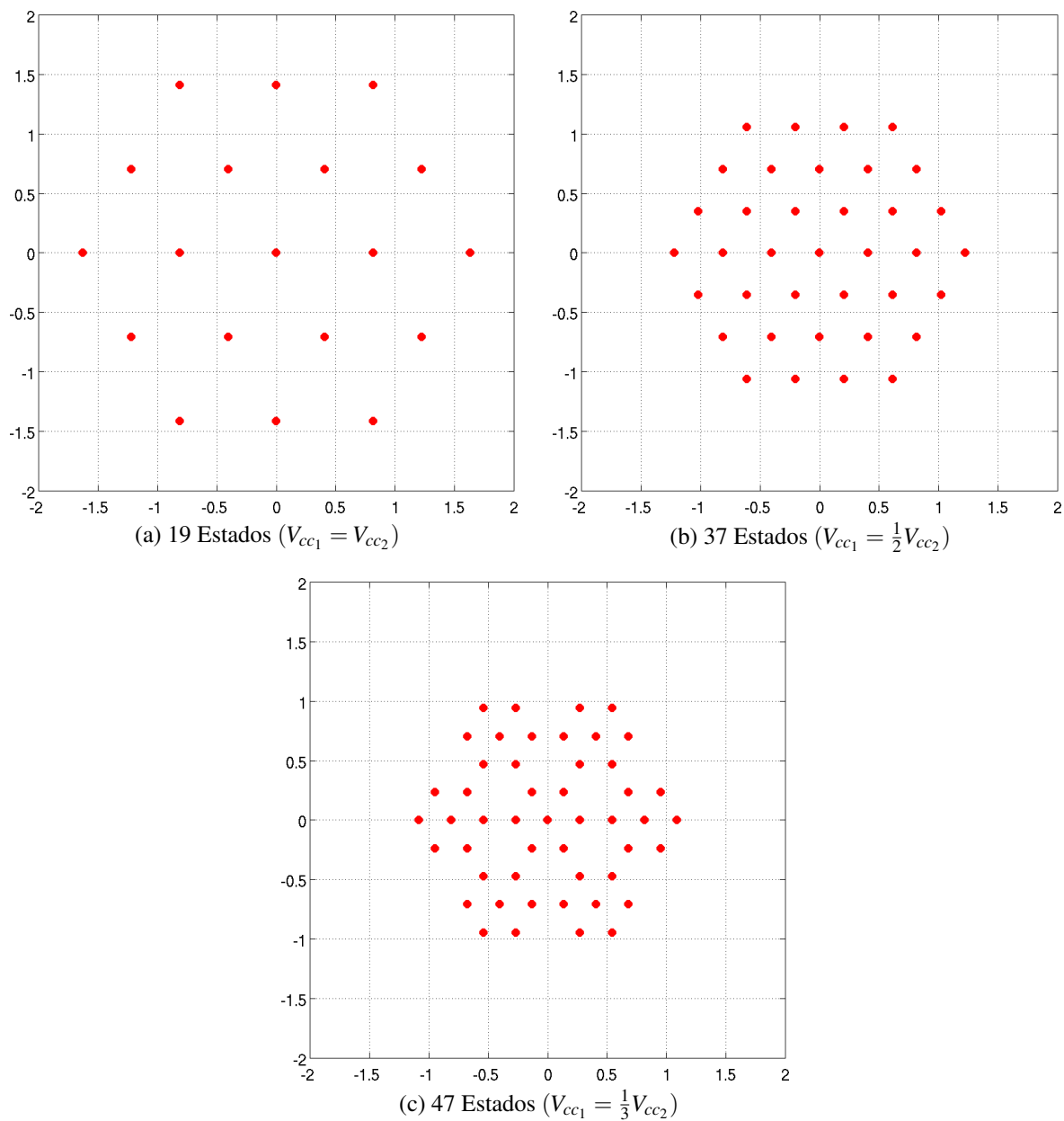


Figura 23.11: Estados posibles de los vectores espaciales con variación relativa de las fuentes de tensión continua de cada uno de los puentes en cascada

Los convertidores multinivel pueden ser modulados para sintetizar vectores espaciales en cualquier punto del espacio de soluciones de la figura 23.11, utilizando técnicas de modulación continuas y discontinuas basadas en *PWM*.

23.4.1. MODULACIÓN DE VECTORES ESPACIALES EN CONVERTIDORES MULTINIVEL

En la figura 23.12 se presentan los estados de un puente convertidor multinivel de tres niveles. Se pueden definir análogamente, como en los puentes de dos niveles, tres vectores directores ($\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2$) o sus opuestos para dividir el espacio hexagonal de solución en tres paralelogramos. Aplicando la misma metodología se puede modular utilizando el algoritmo genérico cualquier vector espacial inscrito en el espacio de solución del convertidor. Los ciclos de trabajo se definen entre los dos estados adyacentes a la proyección del vector espacial sobre los vectores directores utilizados. Esta modulación permite la obtención de tensiones con un número menor de conmutaciones del convertidor, la reducción de su contenido armónico y la disminución de los dv/dt que se traducen en esfuerzos dieléctricos inferiores sobre la aislación de la carga, conectada cuando el desempeño de este tipo de puentes se compara con el de puentes convencionales de dos niveles. Por otra parte, dicha modulación permite reducir las pérdidas por conmutación del puente y las especificaciones de potencia de los interruptores electrónicos.

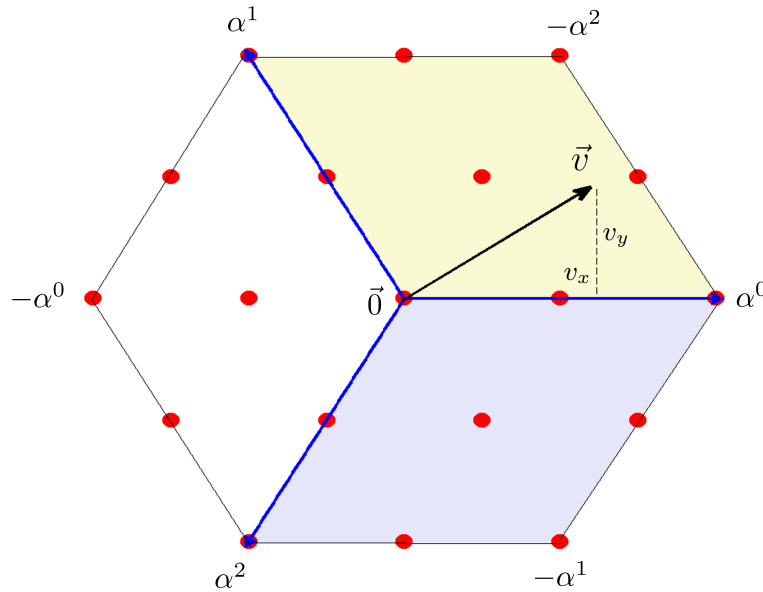


Figura 23.12: Espacio de solución vectorial para un puente multinivel de tres estados

Parte X

Bibliografía

Bibliografía

- [1] IEEE, *IEEE Std 1159-1995 IEEE Recommended Practice for Monitoring Electric Power Quality*, vol. 14. IEEE Standards Coordinating Committee, 1995.
- [2] N. Mohan and T. Undeland, *Power electronics: converters, applications, and design*. Wiley-India, 2009.
- [3] IEEE, *IEEE 519-1992 Recommended practices and requirements for harmonic control in electrical power systems*. IEEE Standards Coordinating Committee, 1992.
- [4] E. Acha, *Power electronic control in electrical systems*. Newnes, 2002.
- [5] J. Nan, T. Hou-Jun, B. Liang-Yu, G. Xin, and Y. Xiao-Liang, “Analysis and control of two switches AC chopper voltage regulator,” *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, vol. 9, no. 4, pp. 208–217, 2010.
- [6] N. V. Nho and M. J. Youn, “Comprehensive study on space-vector-PWM and carrier-based-PWM correlation in multilevel invertors,” in *Electric Power Applications, IEE Proceedings -*, vol. 153, pp. 149–158, Jan. 2006.
- [7] O. Lopez, J. Alvarez, J. Doval-Gandoy, F. D. Freijedo, A. Nogueiras, A. Lago, and C. M. Peñalver, “Comparison of the fpga implementation of two multilevel space vector pwm algorithms,” *IEEE Trans. On Ind. Electronics*, vol. 55, pp. 1537 – 1547, Apr. 2008.
- [8] F. Z. Peng, “A generalized multilevel inverter topology with self voltagebalancing,” in *Industry Applications Conference, 2000. Conference Record of the 2000 IEEE*, vol. 3, (Rome, Italy), pp. 2024–2031, 2000.
- [9] H. Miranda, V. Cardenas, J. Perez, and C. Nuñez, “A hybrid multilevel inverter for shunt active filter using space-vector control,” in *PESC 2004*, June 2004.
- [10] P. Panagis, F. Stergiopoulos, P. Marabeas, and S. Manias, “Comparison of state of the art multilevel inverters,” in *IEEE-PESC 2008*, pp. 4296–4301, June 1998.

- [11] J.-S. Lai and F. Z. Peng, "Multilevel converters-a new breed of power converters," in *Industry Applications Conference, 1995. Thirtieth IAS Annual Meeting, IAS '95., Conference Record of the 1995 IEEE*, vol. 3, (Orlando, FL, USA), pp. 2348–2356, Oct. 1995.
- [12] IEEE, *IEEE C50.12 Standard for Salient-Pole 50 Hz and 60 Hz Synchronous Generators and Generator/Motors for Hydraulic Turbine Applications Rated 5 MVA and Above*. IEEE Standards Coordinating Committee, 2005.
- [13] J. Aller, A. Bueno, and T. Paga, "Power system analysis using space-vector transformation," *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 17, no. 4, pp. 957–965, 2002.
- [14] B. Bose, *Modern power electronics and AC drives*. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [15] S. Dewan and A. Straughen, *Power semiconductor circuits*. Wiley, 1975.
- [16] S. Dewan, G. Slemon, and A. Straughen, *Power semiconductor drives*. Wiley-Interscience, 1984.
- [17] M. Rashid and V. Pozo, *Electrónica de potencia*. Pearson Educación, 2004.
- [18] D. Hart, *Electrónica de potencia*. Pearson Educación, SA, 2001.
- [19] K. Heumann, *Fundamentos de la electrónica de potencia*. Thomson-Paraninfo, 1977.
- [20] J. Kassakian, M. Schlecht, and G. Verghese, *Principles of power electronics*. Addison-Wesley Reading, MA, 1991.
- [21] A. Canovas, *Simulación de circuitos electrónicos por ordenador con Pspice*. Paraninfo, 1996.
- [22] S. Martínez García and J. Gualda Gil, *Electrónica de potencia*. Thomson-Paraninfo, 2006.
- [23] F. Mazda, *Electrónica de potencia*. Thomson-Paraninfo, 1995.
- [24] F. Mora *et al.*, *Máquinas eléctricas*. 1992.
- [25] M. Rashid, *Power electronics handbook*. Academic Pr, 2001.
- [26] G. Seguier and E. Ballester Portillo, *Electrónica de potencia*. Editorial Gustavo Gili, 1979.
- [27] D. White and H. Woodson, *Electromechanical energy conversion*. Wiley, 1959.
- [28] B. Williams, *Power electronics: devices, drivers, applications, and passive components*. McGraw-Hill Companies, 1992.

- [29] S. Bernet, "Recent developments of high power converters for industry and traction applications," *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 15, no. 6, pp. 1102–1117, 2002.
- [30] E. Clarke, *Circuit Analysis of AC Power Systems*. New York: Jhon Wiley, 1943.
- [31] C. T. Johnk, *Teoría electromagnética pricipios y aplicaciones*. Editorial Limusa Mexico, 1975.
- [32] W. Leonhard, *Control of Electrical Drives*. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [33] L. Asiminoaei, P. Rodriguez, and F. Blaabjerg, "Application of discontinuous PWM Modulation in active power filters," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 23, pp. 1692–1706, July 2008.
- [34] V. Blasko, "Analysis of a hybrid PWM based on modified space-vector and triangle-comparison methods," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 33, pp. 756–764, May/June 1997.
- [35] M. A. Boost and P. D. Ziogas, "State-of-the-art carrier PWM techniques: a critical evaluation," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 24, pp. 271–280, Mar./Apr. 1988.
- [36] D. Casadei, D. Dujic, E. Levi, G. Serra, A. Tani, and L. Zarri, "General modulation strategy for seven-phase inverters with independent control of multiple voltage space vectors," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, pp. 1921–1932, May 2008.
- [37] N. Celanovic and D. Boroyevich, "A fast space-vector modulation algorithm for multilevel three-phase converters," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 37, pp. 637–641, Mar./Apr. 2001.
- [38] D. Dujic, G. Grandi, M. Jones, and E. Levi, "A space vector PWM scheme for multifrequency output voltage generation with multiphase voltage-source inverters," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, pp. 1943–1955, May 2008.
- [39] A. M. Hava, R. J. Kerkman, and T. A. Lipo, "A high-performance generalized discontinuous PWM algorithm," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 34, pp. 1059–1071, Sept./Oct. 1998.
- [40] A. M. Hava, R. J. Kerkman, and T. A. Lipo, "Carrier-based PWM-VSI overmodulation strategies: analysis, comparison, and design," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 13, pp. 674–689, July 1998.
- [41] A. M. Hava, S.-K. Sul, R. J. Kerkman, and T. A. Lipo, "Dynamic overmodulation characteristics of triangle intersection PWM methods," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 35, pp. 896–907, July/Aug. 1999.

- [42] A. M. Hava, R. J. Kerkman, and T. A. Lipo, "Simple analytical and graphical methods for carrier-based PWM-VSI drives," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 14, pp. 49–61, Jan. 1999.
- [43] J. Holtz, "Pulsewidth modulation—a survey," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 39, pp. 410–420, Oct. 1992.
- [44] J. Holtz, "Pulsewidth modulation for electronic power conversion," *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, pp. 1194–1214, Aug. 1994.
- [45] M. A. Jabbar, A. M. Khambadkone, and Z. Yanfeng, "Space-vector modulation in a two-phase induction motor drive for constant-power operation," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 51, pp. 1081–1088, Oct. 2004.
- [46] C. B. Jacobina, A. M. Nogueira Lima, E. R. C. da Silva, R. N. C. Alves, and P. F. Seixas, "Digital scalar pulse-width modulation: a simple approach to introduce nonsinusoidal modulating waveforms," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 16, pp. 351–359, May 2001.
- [47] G. B. Kliman and A. B. Plunkett, "Development of a modulation strategy for a PWM inverter drive," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 15, pp. 72–79, Jan. 1979.
- [48] H. Lu, W. Qu, X. Cheng, Y. Fan, and X. Zhang, "A novel PWM technique with two-phase modulation," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 22, pp. 2403–2409, Nov. 2007.
- [49] J. M. D. Murphy and M. G. Egan, "A comparison of PWM strategies for inverter-fed induction motors," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 19, pp. 363–369, May 1983.
- [50] G. Narayanan and V. T. Ranganathan, "Extension of operation of space vector PWM strategies with low switching frequencies using different overmodulation algorithms," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 17, pp. 788–798, Sept. 2002.
- [51] G. Narayanan, V. T. Ranganathan, D. Zhao, H. K. Krishnamurthy, and R. Ayyanar, "Space vector based hybrid PWM techniques for reduced current ripple," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, pp. 1614–1627, Apr. 2008.
- [52] O. Ojo, "The generalized discontinuous PWM scheme for three-phase voltage source inverters," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 51, pp. 1280–1289, Dec. 2004.
- [53] Z. Shu, J. Tang, Y. Guo, and J. Lian, "An efficient SVPWM algorithm with low computational overhead for three-phase inverters," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 22, pp. 1797–1805, Sept. 2007.

- [54] V. T. Somasekhar, S. Srinivas, and K. K. Kumar, "Effect of zero-vector placement in a dual-inverter fed open-end winding induction motor drive with alternate sub-hexagonal center PWM switching scheme," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 23, pp. 1584–1591, May 2008.
- [55] A. M. Trzynadlowski, R. L. Kirlin, and S. F. Legowski, "Space vector PWM technique with minimum switching losses and avariable pulse rate [for VSI]," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 44, pp. 173–181, Apr. 1997.
- [56] H. W. van der Broeck, H. C. Skudelny, and G. V. Stanke, "Analysis and realization of a pulse-width modulator based on voltagespace vectors," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 24, pp. 142–150, Jan./Feb. 1988.
- [57] J. R. Wells, B. M. Nee, P. L. Chapman, and P. T. Krein, "Selective harmonic control: a general problem formulation and selected solutions," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 20, pp. 1337–1345, Nov. 2005.
- [58] J.-H. Youm and B.-H. Kwon, "An effective software implementation of the space-vector modulation," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 46, pp. 866–868, Aug. 1999.
- [59] K. Zhou and D. Wang, "Relationship between space-vector modulation and three-phasecarrier-based PWM: a comprehensive analysis [three-phase inverters]," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 49, pp. 186–196, Feb. 2002.
- [60] J. Zubek, A. Abbondanti, and C. J. Norby, "Pulsewidth modulated inverter motor drives with improved modulation," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 11, pp. 695–703, Nov. 1975.
- [61] D.-W. Chung, J.-S. Kim, and S.-K. Sul, "Unified voltage modulation technique for real time three-phasepower conversion," in *Industry Applications Conference, 1996. Thirty-First IAS Annual Meeting, IAS '96., Conference Record of the 1996 IEEE*, vol. 2, (San Diego, CA, USA), pp. 921–926, Oct. 1996.
- [62] S. de Pablo, A. B. Rey, L. C. Herrero, and J. M. Ruiz, "A simpler and faster method for SVM implementation," in *Power Electronics and Applications, 2007 European Conference on*, (Aalborg,), pp. 1–9, Sept. 2007.
- [63] L. Hao, X. Xiangning, and X. Yonghai, "Study on the simplified algorithm of space vector PWM," in *Power Electronics and Drive Systems, 2003. PEDS 2003. The Fifth International Conference on*, vol. 2, pp. 877–881, Nov. 2003.

- [64] H. Hu, W. Yao, Y. Xing, and Z. Lu, "A generalized algorithm of n-level space vector PWM suitable for hardware implementation," in *Power Electronics Specialists Conference, 2008. PESC 2008. IEEE*, (Rhodes), pp. 4472–4478, June 2008.
- [65] G. Narayanan and V. T. Ranganathan, "Triangle-comparison approach and space vector approach to pulsewidth modulation in inverter fed drives," in *Journal of the Indian Institute of Science*, vol. 80, pp. 409–427, Sept. 2000.
- [66] Z. Peroutka and T. Glasberger, "Comparison of methods for continuous transition of space vector PWM into six-step mode," in *Power Electronics and Motion Control Conference, 2006. EPE-PEMC 2006. 12th International*, (Portoroz), pp. 925–930, Aug./Sept. 2006.
- [67] D. Novotny and T. Lipo, *Vector control and dynamics of AC drives*. New York: Oxford University Press, 1996.
- [68] F. D. Rosa, *Harmonics And Power Systems*. CRC Press, 2006.
- [69] S. Yamamura, *Spiral Vector Theory of AC Circuits and Machines*. New York: Oxford University Press, 1992.
- [70] R. Krishnan, *Electric Motor Drive, Modeling, Analysis, and Control*. Prentice-Hall, 2001.
- [71] J. Restrepo, V. Guzmán, M. Giménez, A. Bueno, and J. M. Aller, "Parallelogram based method for space vector pulse width modulation," *Rev.fac.ing.univ. Antioquia*, no. 52, pp. 161–171, 2010.
- [72] J. Arrillaga, C. P. Arnild, and B. J. Harker, *Computer modelling of electrical power system*. New York: Jhon Wiley, 1983.
- [73] H. Akagi, E. H. Watanabe, M. Aredes, I. of Electrical, and E. Engineers., *Instantaneous power theory and applications to power conditioning*. Wiley-IEEE, 2007.
- [74] IEC, *IEC 61000-3-2 Limits for Harmonic Currents Emissions*. International Electrotechnical Commission Standard, 2004.
- [75] IEC, *IEC 61000-4-15 Testing and measurement techniques – Flickermeter Functional and Desing Specifications*. International Electrotechnical Commission Standard, 1997.
- [76] IEC, *IEC 61000-4-30 Testing and measurement techniques – Power quality measurement methods*. International Electrotechnical Commission Standard, 2003.
- [77] I. F II, "IEEE Recommended Practices and Requirements for Harmonic Control in Electrical Power Systems," 2002.

- [78] B. Bose, *Adjustable speed ac drive systems*. IEEE, 1981.
- [79] *The power Electronics Handbook. Industrial Electronics Series*. Timothy Skvarenina, 2002.
- [80] *Power System Blockset for Use with Simulink. User Guide Version 2*. MATH WORKS Inc., 2004.
- [81] A. Bueno, *Sistema Integrado de Accionamiento de Máquinas de Inducción con Bajo Impacto Armónico al Sistema de Potencia*. Universidad Simón Bolívar, 2003.
- [82] Gaudry, *Rectificadores, Tiristores y Triacs*. Biblioteca Técnica Philips.
- [83] L. Zhong, M. Rahman, W. Hu, and K. Lim, “Analysis of direct torque control in permanent magnet synchronous motor drives,” *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 12, no. 3, pp. 528–536, 2002.
- [84] J. Rodríguez, J. Dixon, J. Espinoza, J. Pontt, and P. Lezana, “PWM regenerative rectifiers: state of the art,” *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 1, pp. 5–22, 2005.
- [85] J. Kolar, H. Ertl, and F. Zach, “Design and experimental investigation of a three-phase high power density high efficiency unity power factor PWM (VIENNA) rectifier employing a novel integrated power semiconductor module,” in *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 1996. APEC’96. Conference Proceedings 1996., Eleventh Annual*, vol. 2, pp. 514–523, IEEE, 2002.

Parte XI

Apéndices

Vectores Espaciales

A.1. Definición

Tradicionalmente en el análisis de sistemas de potencia se ha utilizado las transformaciones modales tales como: componentes simétricas, Clark, Park, entre otras. Estas transformaciones polifásicas permiten desacoplar las ligazones entre las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema de potencia simétricos y que adicionalmente, pueden presentar componentes con simetría cíclica. En sistemas de potencia balanceados, conectados en estrella con neutro aislado o en delta, las componentes de secuencia cero pueden ser despreciadas, debido a que en esta condición son cero. Las componentes de secuencia positiva y negativa tienen un comportamiento similar, en especial en sistemas simétricos, y una es la compleja conjugada de la otra. Durante las últimas décadas, la transformación de vectores espaciales ha sido utilizada ampliamente en el control dinámico de máquinas eléctricas. Definiendo la transformación de vectores espaciales como:

$$\vec{x} \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} = x_\alpha(t) + jx_\beta(t) = x(t) e^{j\xi(t)} \quad (\text{A.1})$$

El coeficiente $\sqrt{2/3}$ es necesario para mantener la invarianza de potencia entre el sistema de coordenadas primitivas y el de vectores espaciales. Este coeficiente viene dado por la transformación hermitiana de componentes simétricas ($\sqrt{1/3}$) y el $\sqrt{2}$ para producir en vectores espaciales la misma potencia activa instantánea que el sistema original debido al efecto de la secuencia negativa en sistemas balanceados. En la figura A.1 se muestra una interpretación gráfica de la transformación a vectores espaciales.

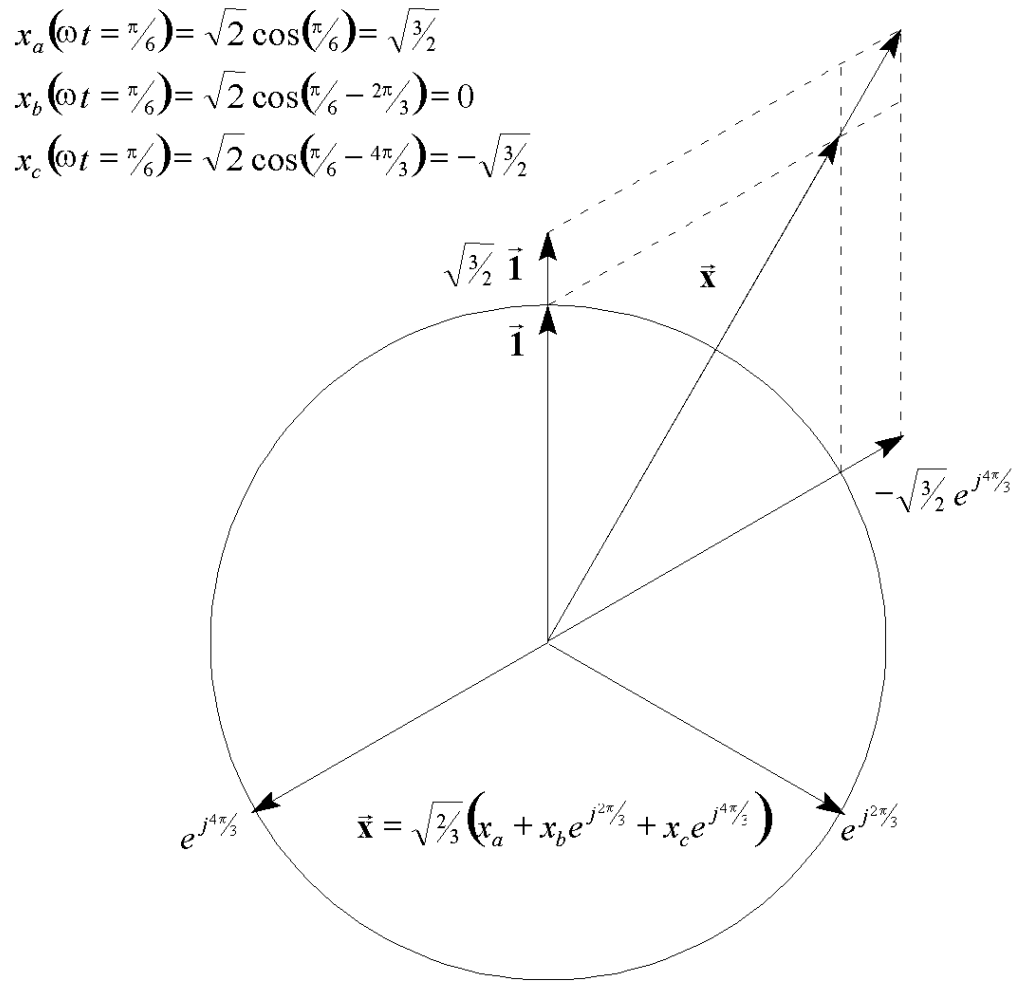


Figura A.1: Interpretación gráfica de la transformación de vectores espaciales

A.2. Potencia Activa y Reactiva Instantánea

En sistemas de potencia trifásicos la potencia activa instantánea $p(t)$ se calcula por la superposición de la potencia activa instantánea por cada una de las fases del sistema.

$$p(t) = v_a(t) i_a(t) + v_b(t) i_b(t) + v_c(t) i_c(t) \quad (\text{A.2})$$

La definición convencional de la potencia aparente S , esta basada en la capacidad del equipo en función de la tensión y corriente nominal en condición de operación balanceada ($\sqrt{3}V_{\text{línea-línea}} I_{\text{línea}}$). La potencia reactiva Q en sistemas trifásicos se define como la relación entre la potencia aparente y la activa a través del Teorema de Pitágoras ($\sqrt{S^2 - P^2}$). Este concepto es utilizado por los ingenieros para el diseño y evaluación de los sistemas de potencia. Sin embargo, bajo condiciones no balanceadas de operación o ante la presencia de armónicos en las tensiones o corrientes del sistema esta definición se corrige, introduciendo los conceptos de factor de potencia de desplazamiento (DPF) y de factor de distorsión armónica total (THD). A finales de la década de los noventa Kazibwe introduce los procedimientos para la realización de medidas de la potencia reactiva y los costos asociados a esta potencia en los sistemas eléctricos.

Una mejor y más precisa definición de la potencia activa, reactiva y aparente instantánea en sistemas de potencia trifásicos se puede obtener al utilizar la teoría de los vectores espaciales.

Recordando la definición del fasor de potencia aparente.

$$\tilde{S} = \tilde{V} \tilde{I}^* = V e^{j\alpha} \cdot I e^{-j\beta} = V I e^{j(\alpha-\beta)} = V I e^{j\gamma} = P + jQ \quad (\text{A.3})$$

Una expresión similar puede ser obtenida al utilizar los vectores espaciales de tensión y corriente.

$$\vec{s}(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{i}(t)^* = p(t) + jq(t) \quad (\text{A.4})$$

donde:

$$\vec{v}(t) \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{i}(t)^* \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo las expresiones de los vectores espaciales de tensión y corriente en la ecuación (A.4) se obtiene la expresión de potencia instantánea en coordenadas primitivas ABC .

$$\begin{aligned}\vec{s}(t) = p(t) + jq(t) = [v_a(t)i_a(t) + v_b(t)i_b(t) + v_c(t)i_c(t)] \\ + j\frac{\sqrt{3}}{3}[v_{bc}(t)i_a(t) + v_{ca}(t)i_b(t) + v_{ab}(t)i_c(t)]\end{aligned}\quad (A.7)$$

Esta expresión de potencia instantánea (A.7) es válida en cualquier condición de operación, para sistemas de potencia de tres o cuatro hilos, para régimen transitorio y estado estacionario, condición de operación balanceada y no balanceada y ante formas de ondas sinusoidales o no sinusoidales. La parte real ecuación (A.7) coincide con la definición clásica de la potencia trifásica instantánea (A.2). Por otra parte, la parte imaginaria de la ecuación (A.7) define un concepto de la potencia reactiva instantánea que en algunos casos coincide con la definición clásica de potencia reactiva. Para un sistema de potencia trifásico balanceado en estado estacionario y alimentado por formas de onda sinusoidales, la potencia activa y reactiva instantánea son invariantes en el tiempo, esto se debe a que el vector espacial de tensión (A.5) y corriente (A.6) poseen una amplitud y un ángulo relativo entre ellos constante en el tiempo. En esta condición la definición clásica de potencia activa y reactiva coincide con la expresión (A.7) mientras que para condiciones de alimentación no sinusoidal y sistemas desbalanceados las definiciones clásicas y vectoriales de la potencia son diferentes.

Sustituyendo la expresión de la potencia aparente instantánea (A.4) en la definición del factor de potencia, se obtiene el factor de potencia instantáneo como:

$$fp(t) = \frac{p(t)}{|\vec{s}(t)|}\quad (A.8)$$

La expresión (A.8) al igual que la (A.7) es válida en cualquier condición de operación, para sistemas de tres o cuatro hilos.

A continuación, se presentan tres casos de la aplicación de la definición de potencia instantánea vectorial comparada con la definición clásica de potencia.

A.2.1. Operación Balanceada y Desbalanceada:

Considerando un sistema de potencia trifásico tres hilos, alimentado por un sistema de tensiones sinusoidales balanceados de valor efectivo $1p.u.$, aplicado a un par de cargas balanceadas conectadas en delta con valor de: $(1,0 + j1,0p.u.)$ y $(0,8 + j0,6p.u.)$ por rama. Para el caso desbalanceado se aplicara un factor de 1,0, 1,05 y 0,95 a cada rama de la carga respectivamente. En las figuras A.2 y A.3 se presenta una comparación entre los resultados de potencia activa y reactiva instantánea calculada a partir de la definición clásica y los cálculos obtenidos al utilizar la definición de potencia instantánea vectorial de la expresión A.7. Se puede observar en las figuras A.2 y A.3 que el

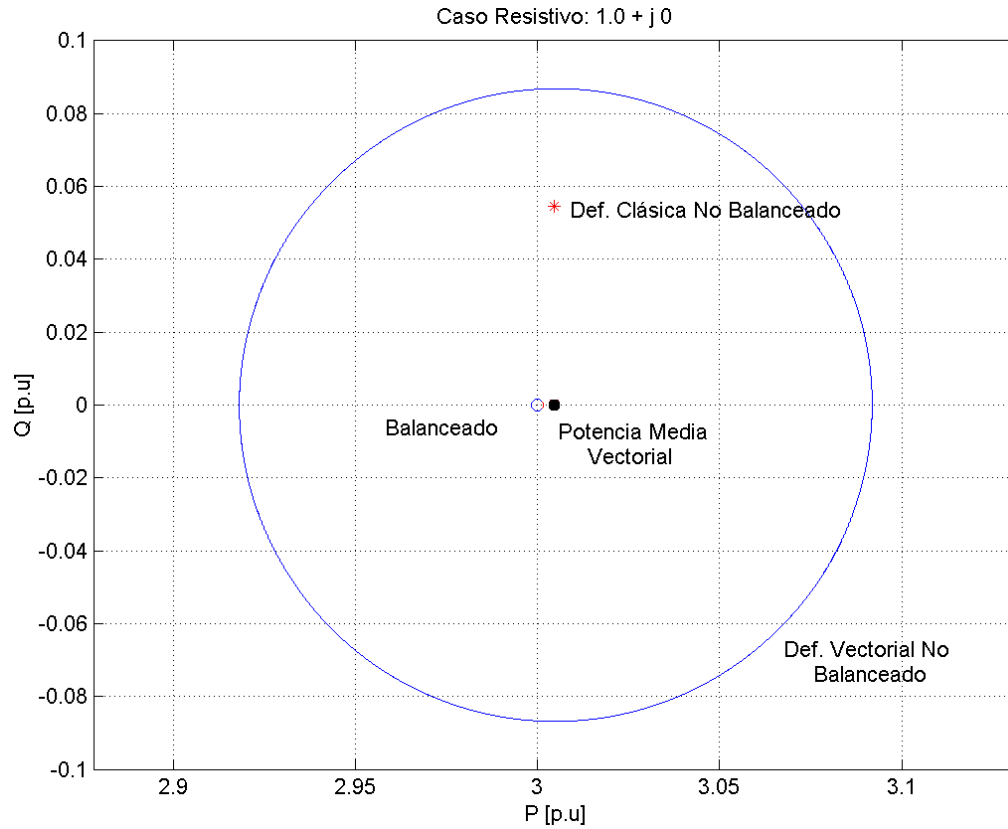


Figura A.2: Definición clásica y vectorial de la potencia para carga puramente resistiva en condición de operación balanceada y desbalanceada.

cálculo de potencia por la definición clásica como la vectorial coincide perfectamente en condición balanceada de operación, mientras que para la condición desbalanceada sólo reproduce la potencia activa. El oscilograma del vector espacial de potencia instantánea permite visualizar la variación en el tiempo de la potencia activa y reactiva. El centro de gravedad del oscilograma representa la potencia activa y reactiva promedio de la carga.

A.2.2. Operación Armónica:

En este caso analizaremos la potencia activa y reactiva entregada por un inversor trifásico de un pulso por semiciclo, sin control por ancho de pulso, aplicado a una carga conectada en delta de impedancia a frecuencia fundamental de $0,8 + j0,6$ en p.u. La tensión $v_{ab}(t)$ aplicada por el inversor a la carga puede ser descrita a través de series de Fourier de la siguiente forma:

$$v_{ab}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{\frac{3}{2}}}{(2n-1)\pi} \cdot \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{6}\right) \cdot \sin\left((2n-1) \cdot \left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\right) \quad (\text{A.9})$$

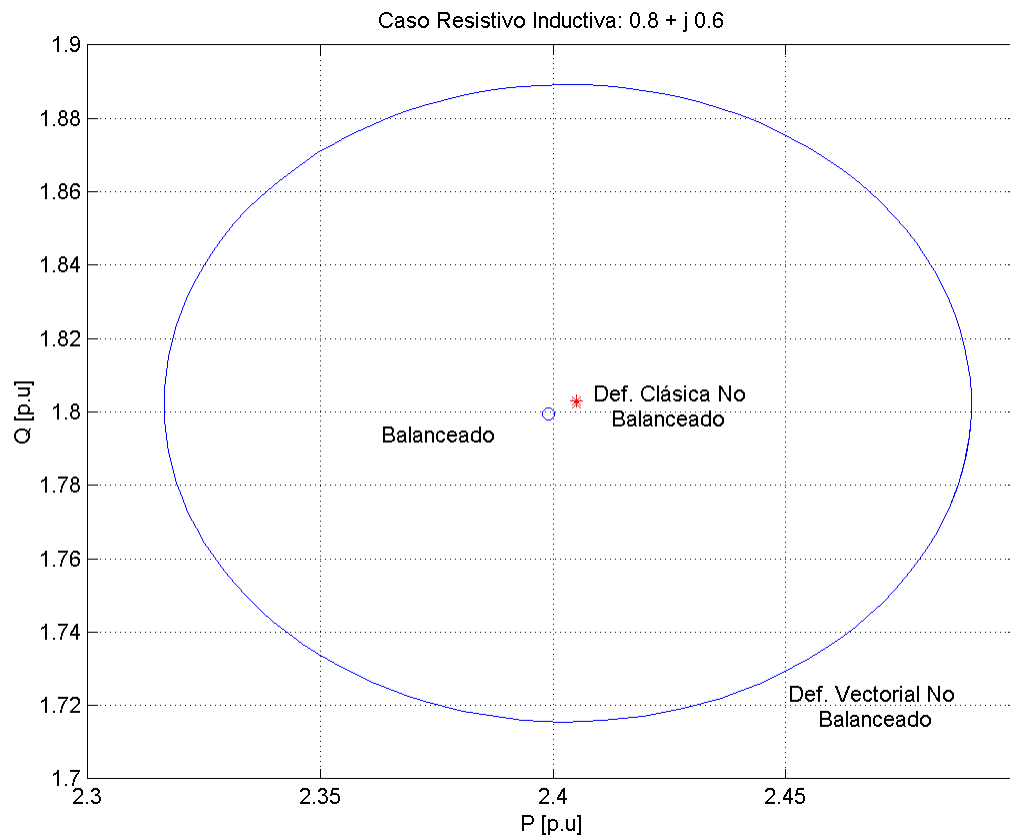


Figura A.3: Definición clásica y vectorial de la potencia para carga resistiva inductiva en condición de operación balanceada y desbalanceada.

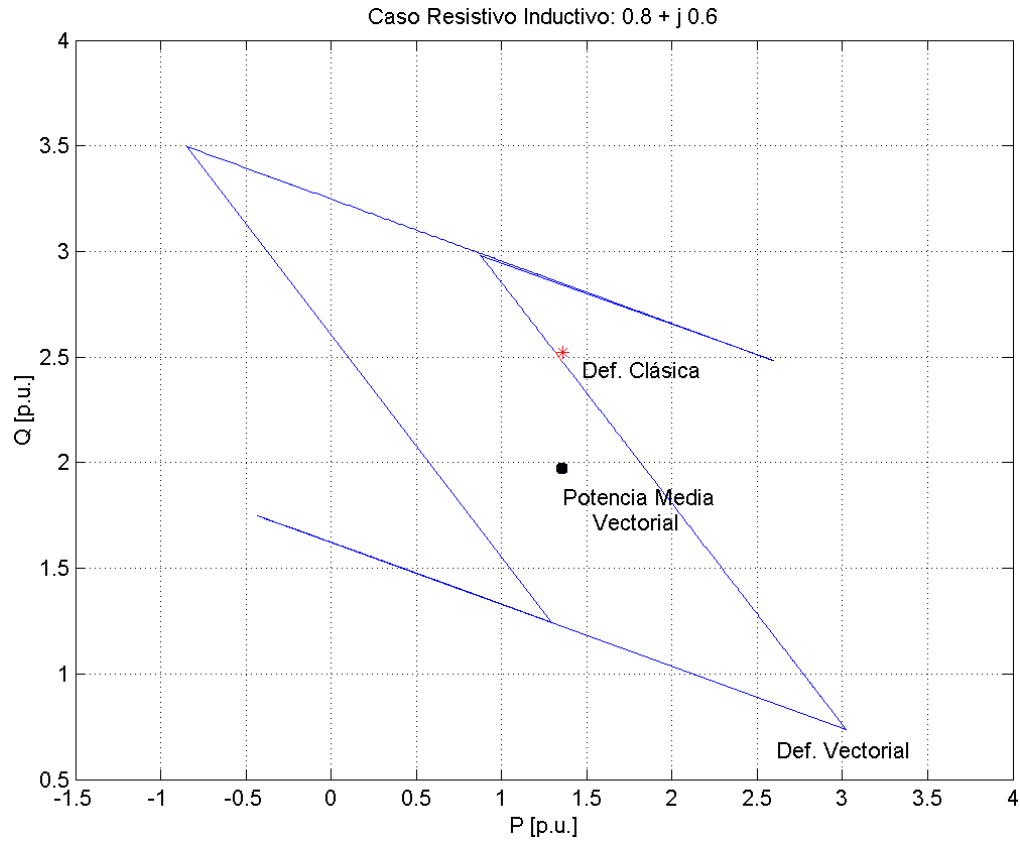


Figura A.4: Definición clásica y vectorial de la potencia para carga resistiva inductiva alimentada por un inversor trifásico sin control por ancho de pulso.

Las tensiones $v_{bc}(t)$ y $v_{ca}(t)$ pueden representarse a través de la expresión A.9 considerando la fase relativa en atraso de $2\pi/3$ y $4\pi/3$ respectivamente. En la figura A.4 se presenta los resultados del cálculo de la potencia activa y reactiva utilizando las dos definiciones. Se puede destacar que para ambas definiciones la potencia promedio activa coincide perfectamente mientras que la potencia reactiva difiere. La potencia media vectorial coincide con el centro geométrico de su oscilograma.

A.2.3. Operación Transitoria:

En la operación normal de sistema de potencia se presentan diferentes condiciones de operación transitorias tales como: arranque de motores, energización de transformadores y operaciones de apertura y cierre de líneas de transmisión, durante estas maniobras las tensiones y corrientes aplicadas presentan distorsiones originando que sus formas de onda no sean sinusoidales. Por ejemplo, consideremos el arranque de un motor de inducción trifásico de jaula de ardilla a plena tensión desde un sistema de tensiones sinusoidales balanceado de frecuencia fundamental. El motor se encuentra cargado en el eje a par nominal. En la figura A.5 se presenta, la potencia activa y reactiva instantánea durante el proceso de arranque del convertidor. La definición clásica de potencia no puede ser aplicada en esta condición de operación, debido a que requiere la evaluación de los valo-

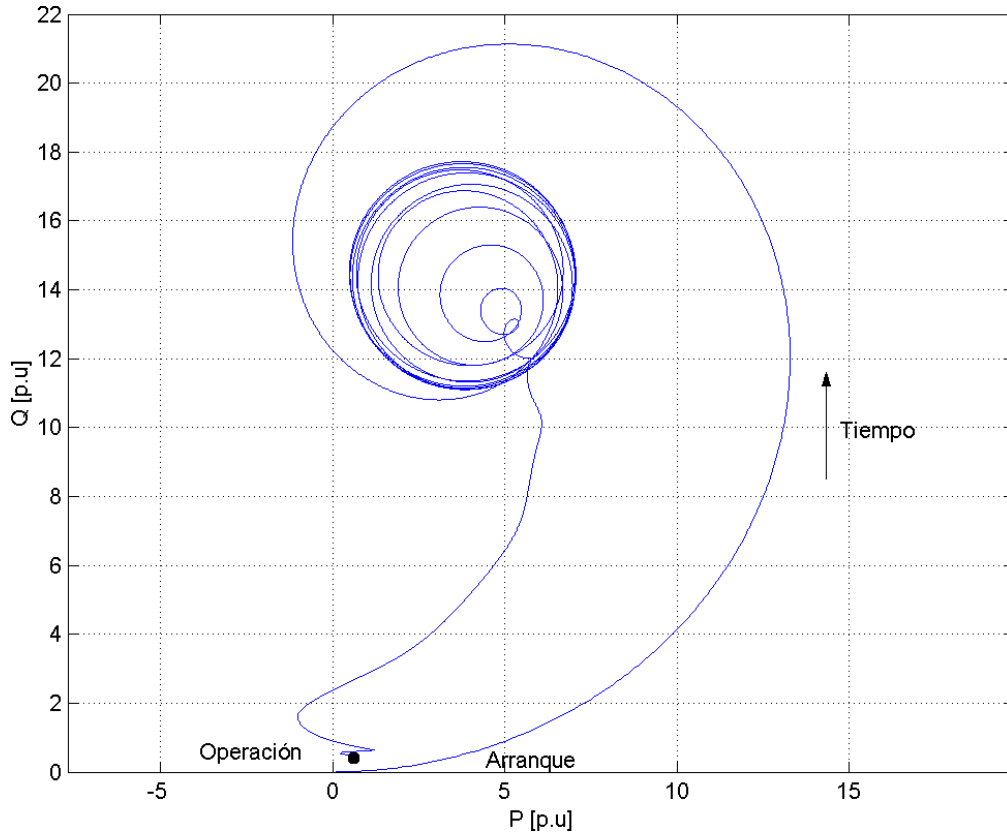


Figura A.5: Vector espacial de potencia durante un arranque a plena tensión de una máquina de inducción.

res efectivos de tensión y corriente en las bobinas que conforman el estator. Una de las principales ventajas de la definición de la potencia a través de vectores espaciales, es la posibilidad de utilizarla para estimar los parámetros del modelo de la máquina de inducción en régimen dinámico de operación.

A.2.4. Interpretación Física:

Una interpretación física de la expresión de potencia instantánea (A.7) se puede obtener al considerar, la relación existente entre la fuerza electromotriz e , y la intensidad de campo eléctrico \vec{E} por una parte y de la intensidad de campo magnético \vec{H} y la corriente i por otra. El producto vectorial de estas dos intensidades de campo en cada punto del espacio y del tiempo define el vector de Pointing $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Este vector espacio-temporal representa el flujo de potencia transferida por unidad de área debido a los campos electromagnéticos. Por ejemplo, en el entre hierro de las máquinas eléctricas rotatorias el vector de Pointing \vec{S} en cada punto del espacio y del tiempo, tiene dos componentes una en sentido axial y otra tangencial. La componente axial determina la potencia activa transferida entre el estator y el rotor, mientras que la tangencial representa la potencia que fluye en el entre hierro para mantener el campo electromagnético rotatorio. En líneas de transmi-

sión trifásicas el fenómeno es similar, la potencia activa instantánea corresponde a la componente longitudinal del vector de Pointing mientras que la potencia reactiva corresponde a la componente tangencial o rotatoria de este vector. Debido a que la corriente i esta relacionada con la intensidad de campo magnético \vec{H} a través de la ley de Amper y la fuerza electromotriz e se obtiene de la integral de la intensidad de campo eléctrico \vec{E} , es razonable pensar que la potencia activa instantánea $p(t)$ esta relacionada con la componente radial del vector de Pointing \vec{S} , y la potencia reactiva instantánea $q(t)$ con la componente tangencial de este vector.

Circuitos de Primer y Segundo Orden

B.1. Circuito de Primer Orden

Los circuitos de primer orden presentan una ecuación diferencial de la forma:

$$g(t) = A \frac{dx(t)}{dt} + Bx(t) \quad (\text{B.1})$$

Para solucionar la ecuación diferencial de la expresión (B.1), se debe encontrar los modos naturales de oscilación del sistema que son la solución de la ecuación homogénea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A \frac{dx(t)}{dt} &= -Bx(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} &= -\frac{B}{A}x(t) \\ \frac{dx(t)}{x(t)} &= -\frac{B}{A}dt \\ \int \frac{dx(t)}{x(t)} &= -\int \frac{B}{A}dt \\ \ln(x(t)) &= -\frac{B}{A}t + Cte \\ e^{\ln(x(t))} &= e^{(-\frac{B}{A}t + Cte)} \\ x_h(t) &= e^{-\frac{B}{A}t} e^{Cte} = ke^{-\frac{B}{A}t} \\ x_h(t) &= ke^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\tau = \frac{A}{B} \quad (\text{B.3})$$

donde:

τ : Es la constante de tiempo del circuito. Para los circuitos RC y RL la constante de tiempo son $\tau = RC$ y $\tau = L/R$ respectivamente.

La solución particular de la ecuación diferencial de la expresión (B.1) debe poseer la misma forma que la función farsante $g(t)$ y debe satisfacer la ecuación diferencial. La solución particular se puede obtener de la siguiente tabla de soluciones:

Tabla B.1: Forma de las soluciones particulares para ecuaciones diferenciales

Forma de la Excitación $g(t)$	Forma de la Solución Particular $x_p(t)$
K_0	A
$K_0 t$	$At + B$
$K_0 + K_1 t$	$At + B$
$K_0 + K_1 t + K_2 t^2$	$At^2 + Bt + C$
$K_0 e^{-bt}$ ($b \neq \frac{1}{\tau}$)	Ae^{-bt}
$K_0 e^{-\frac{1}{\tau}t}$	$At \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t}$
$K_0 \sin(bt)$	$A \sin(bt) + B \cos(bt)$
$K_0 \cos(bt)$	$A \sin(bt) + B \cos(bt)$

Los coeficientes de la solución particular se determinan al sustituir la forma de la solución en la ecuación diferencial e igualando termino a termino. La solución total a la ecuación diferencial de la expresión (B.1) es la suma de la solución homogénea y particular. Los coeficientes de la solución homogénea se determinan a partir de las condiciones iniciales del circuito.

B.2. Circuito de Segundo Orden

Los circuitos de segundo orden presentan una ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$g(t) = A \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + Cx(t) \quad (\text{B.4})$$

Para resolver la ecuación diferencial, al igual que el caso anterior es necesario encontrar los modos naturales de oscilación del sistema mediante la solución de la ecuación característica de la expresión (B.4).

$$As^2 + Bs + C = 0 \quad (\text{B.5})$$

La ecuación característica (B.5) puede ser resuelta utilizando la solución o resolvente de la ecuación de segundo grado o cuadrática de la siguiente forma:

$$s_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (\text{B.6})$$

Los modos naturales de oscilación o la solución homogénea de la expresión (B.4), depende de la forma de las raíces s_1, s_2 . Estas raíces pueden ser de tres formas: reales y diferentes, reales e iguales o complejas conjugadas.

$$\begin{aligned} x_h(t) &= k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} && \rightarrow (s_1 \neq s_2) \in \mathbb{R} \\ x_h(t) &= k_1 e^{-\sigma t} + k_2 t e^{s_2 t} && \rightarrow (s_1 = s_2) \in \mathbb{R} \\ x_h(t) &= e^{\sigma t} (k_1 \cos(\omega t) + k_2 \sin(\omega t)) && \rightarrow (s_{1,2} = \sigma \pm j\omega) \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

La solución particular a la ecuación diferencial (B.4) a igual que los valores de las constantes k_n , se obtienen mediante el mismo procedimiento que para el caso de ecuaciones diferenciales de primer orden. Algunos autores denominan las soluciones homogéneas de la ecuación diferencial de segundo orden, de acuerdo a su respuesta al escalón ($u(t)$) como:

$$\begin{aligned} \text{Sobreamortiguado:} & \quad (s_1 \neq s_2) \in \mathbb{R} \\ \text{Críticamente amortiguado:} & \quad (s_1 = s_2) \in \mathbb{R} \\ \text{Subamortiguado:} & \quad (s_{1,2} = \sigma \pm j\omega) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Modelo de Sistemas Lineales en Espacio de Estados

C.1. Descripción general

El modelo de sistemas lineales en espacio de estado consiste en presentar las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema como un sistema diferencial de primer orden.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}\tag{C.1}$$

donde:

x_i	Corresponde a las variables de estado “ i ”.
a_{ij}	Son coeficientes constantes.
$f(t)$	La función forzante

Escribiendo el sistema de ecuaciones diferenciales (C.1) en forma matricial, se obtiene:

$$p\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}\tag{C.2}$$

donde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = f(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En la representación matricial se denomina:

A	Matriz de transición de estados
x	Vector de variables de estado
B	Matriz de entradas

C.2. Ejemplo

Encontrar el espacio de estado de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \quad (\text{C.3})$$

Para escribir la ecuación diferencial (C.3) en espacio de estado es necesario definir dos variables de estado a fin de poder escribir el sistema mediante ecuaciones de primer orden.

Definiendo:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

La ecuación diferencial (C.3), se puede escribir como ecuaciones de primer orden utilizando las definiciones de la expresión (C.4) como:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 + ax_2 + bx_1 = f(t) \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Reescribiendo el sistemas de ecuaciones diferencial de la expresión (C.5), en forma matricial se obtiene el modelo de la expresión (C.3) en espacio de estados.

$$p \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot f(t) \quad (\text{C.6})$$

Fundamentos de Electricidad

D.1. Aspectos Generales

En este capítulo se realizara un resumen de los conceptos básicos de electricidad necesarios para los diferentes temas que se abordaran a lo largo de los diferentes capítulos de conversión de energía eléctrica a través de puentes electrónicos de potencia.

Entre los conceptos a repasar se tienen:

- Potencia instantánea para sistemas eléctricos y físicos.
- Valor medio y efectivo de una señal.
- Concepto y utilización de fasor.
- Definición de impedancia.
- Leyes de Kirchhoff.
- Método de mallas y nodos.
- Teorema de Thévening, Norton y máxima transferencia de potencia.
- Régimen sinusoidal permanente y sistemas eléctricos monofásicos.
- Potencia activa y reactiva de un sistema eléctrico.
- Sistemas eléctricos trifásicos.

D.2. Potencia Instantánea

La potencia instantánea de un puerto eléctrico o mecánico se calcula como el producto instantáneo de la variable entre y la variable a través del puerto. En el caso de electricidad la variable entre corresponde a la tensión, mientras que la variable a través corresponde a la corriente. En los sistemas mecánicos las definiciones de estas variables son Velocidad para la variable entre y Fuerza o Par para la variable a través. El concepto de variable entre y a través está íntimamente ligado con la forma de realizar la medición de estas. En el caso de la *variable entre* que requiere un punto o patrón de referencia para realizar la medición, este es el caso de la tensión que se mide con respecto a dos puntos.

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ p(t) &= v(t)F(t) \\ p(t) &= \omega(t)\tau(t) \end{aligned} \tag{D.1}$$

Donde:

$v(t)$:	Tensión.
$i(t)$:	Corriente.
$v(t)$:	Velocidad lineal.
$F(t)$:	Fuerza.
$\omega(t)$:	Velocidad angular.
$\tau(t)$:	Par.

D.3. Valor Medio

El valor medio de una señal periódica $g(t)$ corresponde al valor de corriente continua de la señal y es el promedio ponderado en un periodo de los valores de esta. Se calcula como:

$$G_{DC} = G_0 = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \tag{D.2}$$

D.4. Valor Efectivo

El valor efectivo o eficaz de una señal es conocido también como valor cuadrático medio o *rms*. El valor eficaz de una señal periódica se basa en el concepto de potencia media o promedio entregada.

En el caso de circuitos eléctricos, con una tensión continua aplicada sobre los terminales de una resistencia, la potencia media se calcula como:

$$P_0 = \frac{V_{DC}^2}{R} \quad (D.3)$$

Para el caso de una tensión periódica aplicada sobre los terminales de la resistencia, la tensión eficaz o el valor eficaz de la señal se define como la tensión que proporciona la misma potencia media que la tensión de continua. La tensión eficaz se puede calcular utilizando la siguiente expresión.

$$P_0 = \frac{V_{rms}^2}{R} \quad (D.4)$$

Si calculamos la potencia media en una resistencia a partir de la expresión (D.1) y (D.2), se obtiene:

$$P_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v(t)}{R} dt = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt \right] \quad (D.5)$$

Igualando las expresiones de potencia media de las expresiones (D.4) y (D.5) se obtiene:

$$P_0 = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt \right] \quad (D.6)$$

donde la expresión de la tensión eficaz o *rms* es:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} \quad (D.7)$$

El valor efectivo o eficaz de una señal es la raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la señal, expresión que en inglés da lugar a *rms* (root mean square).

$$G_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T g(t)^2 dt} \quad (D.8)$$

Por ejemplo el valor efectivo de una señal sinusoidal de la forma: $g(t) = A \sin(\omega t + \eta)$ es:

$$G_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A \sin(\omega t + \eta))^2 dt} \quad (D.9)$$

Aplicando la identidad del ángulo doble en la expresión (D.9) se obtiene:

$$G_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[A^2 \left(\frac{1 - \cos(2(\omega t + \eta))}{2} \right) \right] dt} \quad (D.10)$$

$$G_{rms} = A \sqrt{\frac{1}{4\pi} ([\omega t - \sin(2(\omega t + \eta))] - [\omega t - \sin(2(\omega t + \eta))])} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

D.5. Fasor

Un fasor es la representación a través de un número complejo de una magnitud sinusoidal que varía en el tiempo. Para una función sinusoidal $g(t)$ de la forma $g(t) = A \sin(\omega t + \eta)$ se puede escribir en función del valor efectivo, de la fase de la función $g(t)$ y de la ecuación de Euler como:

$$g(t) = \sqrt{2} \Im \left[\frac{A}{\sqrt{2}} e^{j(\omega t + \eta)} \right] = \sqrt{2} \Im \left[\left(\frac{A}{\sqrt{2}} e^{j\eta} \right) e^{j\omega t} \right] = \sqrt{2} \Im \left[\left(\frac{A}{\sqrt{2}} \angle \eta \right) e^{j\omega t} \right] = \sqrt{2} \Im [\tilde{G} e^{j\omega t}] \quad (D.11)$$

donde el fasor es:

$$\tilde{G} = G_{rms} e^{j\eta} = G_{rms} \angle \eta$$

Para funciones cosenoidales la representación es similar pero se utiliza la parte real del número complejo.

D.6. Impedancia

Es la relación que existe entre el fasor de tensión y corriente en los terminales de un dispositivo.

$$Z = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = R + jX \quad (D.12)$$

Donde:

R : Resistencia.

X : Reactancia.

D.6.1. Reactancia Inductiva

Si alimentamos un inductor con una corriente sinusoidal de la forma $i(t) = I \sin(\omega t)$ la tensión entre sus terminales viene dada por:

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = L\omega I \cos(\omega t) = L\omega I \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{D.13})$$

Calculando los fasor de tensión y corriente en la bobina se obtiene la impedancia.

$$Z = \frac{L\omega I_{rms} \angle \frac{\pi}{2}}{I_{rms}} = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L = j\omega L \quad (\text{D.14})$$

donde:

$$X_L = \omega L$$

D.6.2. Reactancia Capacitiva

Si alimentamos un capacitor con una tensión sinusoidal de la forma $v(t) = V \sin(\omega t)$ la corriente que circula por el, viene dada por:

$$i_c(t) = C \frac{dv}{dt} = C\omega V \cos(\omega t) = C\omega V \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{D.15})$$

Calculando los fasor de tensión y corriente en el capacitor se obtiene la impedancia.

$$Z = \frac{V_{rms}}{C\omega V_{rms} \angle \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega C} e^{j\frac{\pi}{2}} = -jX_C = -j \frac{1}{\omega C}$$

donde:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

D.7. Leyes de Kirchhoff Fasoriales

En un nodo de un circuito eléctrico, la suma algebraica de las corrientes es igual a cero.

$$\sum_{i=1}^N \tilde{I}_m = 0 \quad (\text{D.16})$$

La suma algebraica de las "N" fuerzas electromotrices de una malla de un circuito eléctrico, es igual a la suma algebraica de las "M" caídas de tensión correspondientes a cada uno de los elementos pasivos en la malla.

$$\sum_{i=1}^N \tilde{E}_i = \sum_{i=1}^M Z_i \cdot \tilde{I}_i \quad (\text{D.17})$$

D.8. Régimen Sinusoidal Permanente

Este método nos permite encontrar la respuesta en régimen permanente de circuitos eléctricos alimentados con fuentes sinusoidales, utilizando los conceptos de fasor e impedancia. En la figura D.1, se muestra un circuito resistivo, inductivo y capacitivo serie alimentado por una fuente de tensión sinusoidal.

Para encontrar la corriente en régimen permanente o estacionario que circula por el circuito de la figura D.1, ante una alimentación sinusoidal de la forma: $v_f(t) = \sqrt{2}V \sin(\omega t + \eta)$, se calculará el fasor de corriente en función del fasor de tensión y la impedancia del circuito utilizando la ley de Ohm.

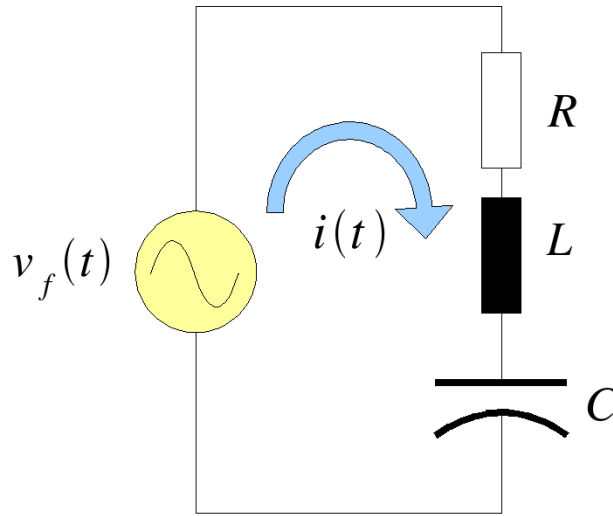


Figura D.1: Circuito *RLC* Serie

Se calcula el fasor de tensión utilizando la definición de la ecuación (D.11) en función del valor efectivo de la senoide y de la fase de la onda:

$$\tilde{V} = V_{rms} \angle \eta \quad (\text{D.18})$$

Calculamos la impedancia total del circuito para la frecuencia angular ω que corresponde a la frecuencia de alimentación de la sinusoidal:

$$Z = R + j(X_L - X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z| e^{j\varphi} = |Z| \angle \varphi \quad (\text{D.19})$$

donde:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + j(X_L - X_C)^2} = \sqrt{\Re(Z)^2 + \Im(Z)^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\Im(Z)}{\Re(Z)}\right)$$

Utilizando la definición de impedancia de la expresión (D.12), se puede calcular el fasor de corriente en el circuito.

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Z} = \frac{V_{rms} \angle \eta}{|Z| \angle \varphi} = \frac{V_{rms}}{|Z|} \angle (\eta - \varphi) = I_{rms} \angle (\eta - \varphi) \quad (D.20)$$

Con el fasor de corriente y la definición del fasor de la expresión (D.11), se puede encontrar la corriente en el dominio del tiempo que circula por el circuito.

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{V_{rms}}{|Z|} \sin(\omega t + \eta - \varphi) \quad (D.21)$$

D.9. Potencia Aparente, Activa y Reactiva en Sistemas Sinusoidales

En los circuitos lineales alimentados por generadores sinusoidales, todas las tensiones y corrientes en régimen permanente son sinusoidales. La potencia instantánea y media se puede calcular a partir de las expresiones (D.1) y (D.2). Para cualquier elemento del circuito supongamos que la tensión y corriente son de la forma:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{2} V_{rms} \sin(\omega t + \psi) \\ i(t) &= \sqrt{2} I_{rms} \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (D.22)$$

La potencia instantánea es:

$$p(t) = v(t)i(t) = \left(\sqrt{2} V_{rms} \sin(\omega t + \psi)\right) \left(\sqrt{2} I_{rms} \sin(\omega t + \phi)\right) \quad (D.23)$$

Utilizando la identidad trigonométrica:

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)) \quad (D.24)$$

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{2}{2} V_{rms} I_{rms} [\cos(\omega t + \psi - \omega t - \phi) - \cos(\omega t + \psi + \omega t + \phi)] \\ p(t) &= V_{rms} I_{rms} [\cos(\psi - \phi) - \cos(2\omega t + \psi + \phi)] \end{aligned} \quad (D.25)$$

La potencia media es:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{V_{rms} I_{rms}}{T} \int_0^T [\cos(\psi - \phi) - \cos(2\omega t + \psi + \phi)] dt \\ P &= V_{rms} I_{rms} \cos(\psi - \phi) \end{aligned} \quad (D.26)$$

La potencia compleja \tilde{S} se define como:

$$\tilde{S} = \tilde{V} \tilde{I}^* = V_{rms} e^{j\psi} (I_{rms} e^{-j\phi})^* = V_{rms} e^{j\psi} I_{rms} e^{j\phi} = S e^{j(\psi - \phi)} = P + jQ \quad (D.27)$$

La magnitud del número complejo que define la potencia se denomina potencia aparente y es expresada en unidades de volta-amperes [VA].

$$S = V_{rms} I_{rms} \quad (D.28)$$

La parte real de la potencia compleja es la correspondiente a la potencia activa promedio. Esta potencia promedio es la que realiza el trabajo en el circuito y sus unidades son los vatios [W].

$$P = \Re(\tilde{S}) = V_{rms} I_{rms} \cos(\psi - \phi) \quad (D.29)$$

La parte imaginaria de la potencia compleja es la correspondiente a la potencia reactiva promedio. Esta potencia promedio es la necesaria para mantener los campos magnéticos y/o eléctricos en el circuito y sus unidades son los volta-amperes-reactivos [var].

$$Q = \Im(\tilde{S}) = V_{rms} I_{rms} \sin(\psi - \phi) = \sqrt{S^2 - P^2} \quad (D.30)$$

El factor de potencia es una medida de la cantidad de potencia la cual es capaz de transferir energía o trabajo en el circuito, en relación a la potencia total o aparente del mismo circuito. El factor de potencia se considera en "retraso" o "inductivo" si la Q es positiva. Si la Q es negativa el factor de potencia se considera en "adelanto" o "capacitivo".

$$fp = \frac{P}{S} \quad (D.31)$$

A nivel industrial, comercial y residencial se busca que el factor de potencia sea lo más cercano a uno posible con la finalidad de que la energía producida sea utilizada al máximo en el proceso de realización de trabajo.

D.10. Método de Mallas en Forma Matricial

La forma matricial para la ley de Ohm para circuitos exclusivamente con fuentes de tensión independientes e impedancias se escribe como:

$$[\tilde{\mathbf{V}}] = [\mathbf{Z}] \cdot [\tilde{\mathbf{I}}] \quad (\text{D.32})$$

La forma expandida de la ecuación D.32, es:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_2 \\ \vdots \\ \tilde{V}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \vdots \\ \tilde{I}_N \end{bmatrix} \quad (\text{D.33})$$

El elemento Z_{11} (fila 1, columna 1) es la suma de todas las impedancias a través de las cuales pasa la corriente \tilde{I}_1 de la malla, de manera similar Z_{22}, \dots, Z_{NN} , llevan signo positivo.

El elemento Z_{12} (fila 1, columna 2) es la suma de todas las impedancias a través de las cuales pasan la corriente de malla \tilde{I}_1 y \tilde{I}_2 .

El signo de Z_{12} es "+" si las dos corrientes están en la misma dirección y el signo es "-" si están en dirección opuesta. De modo análogo los elementos Z_{21}, Z_{23}, Z_{32} , etc., son la suma de las impedancias comunes a las dos corrientes de malla indicadas por los subíndices, con los signos determinados como se describió antes para Z_{12} . La matriz \mathbf{Z} es simétrica por lo tanto:

$$Z_{ij} = Z_{ji} \quad (\text{D.34})$$

La tensión \tilde{V}_1 del vector $\tilde{\mathbf{V}}$ corresponde a la suma de todas las fuentes de fuerza electromotriz que impulsan corriente de malla \tilde{I}_1 . Una tensión se toma positiva si \tilde{I}_1 pasa de "-" a "+", es decir, hay una "subida"; de lo contrario se considera negativa. Cada elemento del vector de corriente (\tilde{I}_i) identifica la corriente en cada una de las mallas.

La corriente en cada malla se puede calcular resolviendo la ecuación (D.32) como:

$$[\tilde{\mathbf{I}}] = [\mathbf{Z}]^{-1} \cdot [\tilde{\mathbf{V}}] \quad (\text{D.35})$$

D.11. Método de Nodos en Forma Matricial

La forma matricial para la ley de Ohm para admitancias, tensiones y corrientes es:

$$[\tilde{\mathbf{I}}_{\text{barra}}] = [\mathbf{Y}_{\text{barra}}] \cdot [\tilde{\mathbf{V}}_{\text{barra}}] \quad (\text{D.36})$$

Las admitancias son el inverso de las impedancias.

$$Y_i = \frac{1}{Z_i} \quad (\text{D.37})$$

La forma expandida de la ecuación (D.36), es:

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_{\text{barra}_1} \\ \tilde{I}_{\text{barra}_2} \\ \vdots \\ \tilde{I}_{\text{barra}_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \cdots & Y_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & Y_{N3} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{V}_{\text{barra}_1} \\ \tilde{V}_{\text{barra}_2} \\ \vdots \\ \tilde{V}_{\text{barra}_N} \end{bmatrix} \quad (\text{D.38})$$

El coeficiente Y_{11} se llama admitancia propia del nodo o barra "1" y corresponde a la suma de todas las admitancias conectadas a la barra "1". De forma análoga las admitancias Y_{22}, \dots, Y_{NN} , son las admitancias propias de las barras 2, \dots , N respectivamente y se obtienen sumando todas las admitancias conectadas a los nodos 2, \dots , N .

El coeficiente Y_{12} es la coadmitancia de las barras 1 y 2, y es la suma de todas las admitancias o nexos que unen a ambas barras. Y_{12} tiene signo negativo. De forma análoga, Y_{23} , Y_{13} , en general Y_{ij} para $i \neq j$ tiene signo negativo. La matriz de admitancias $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ es simétrica por tanto:

$$Y_{ij} = Y_{ji} \quad (\text{D.39})$$

La intensidad de corriente $\tilde{I}_{\text{nodo}_1}$ es la suma de todas las corrientes de fuente que pasan por el nodo "1". Una corriente que entra en el nodo tiene signo positivo, la que sale del nodo se le asigna signo negativo. Las intensidades $\tilde{I}_{\text{nodo}_2}, \dots, \tilde{I}_{\text{nodo}_N}$ son la suma de las corrientes que pasan por los nodos 2, \dots , N , respectivamente.

La tensión $\tilde{V}_{\text{barra}_1}$ del vector $\tilde{\mathbf{V}}_{\text{barra}}$ corresponde a la tensión entre la barra "1" y la referencia. La tensión en cada barra con respecto a la referencia se puede calcular resolviendo la ecuación (D.36) como:

$$[\tilde{\mathbf{V}}_{\text{barra}}] = [\mathbf{Y}_{\text{barra}}]^{-1} \cdot [\tilde{\mathbf{I}}_{\text{barra}}] \quad (\text{D.40})$$

La inversa de la matriz $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ se denomina matriz de impedancia de barra (Z_{Bus}). Los elementos de la diagonal principal de esta matriz ($Z_{\text{bus}_{ii}}$) corresponde a las impedancias de Thévenin entre el nodo "i" y el de referencia.

$$[\mathbf{Z}_{\text{bus}}] = [\mathbf{Y}_{\text{barra}}]^{-1} \quad (\text{D.41})$$

D.12. Teorema de Thévening y Norton

Cualquier red lineal de dos terminales se puede remplazar con un circuito equivalente de Thévening que consiste en un fuente de tensión y una impedancia en serie. El voltaje se llama "*Tensión equivalente de Thévening*" (\tilde{V}_{th}) y la impedancia es Z_{th} . Por otra parte, también cualquier red lineal de dos terminales se puede remplazar con un circuito equivalente de Norton que consiste en un fuente de corriente y una impedancia en paralelo. La corriente se llama "*Corriente equivalente de Norton*" (\tilde{I}_N) y la impedancia es Z_{th} . En ambos teoremas la impedancia equivalente es la misma.

La tensión equivalente de Thévening (\tilde{V}_{th}) corresponde a la tensión que aparece entre los terminales "*a y b*" cuando el circuito se encuentra abierto. La corriente equivalente de Norton (\tilde{I}_N) es la corriente que circula entre los terminales "*a y b*" cuando estos se encuentran en cortocircuito. En la figura D.2, se presenta un equivalente Thévening y Norton de una red eléctrica.

$$Z_{th} = \frac{\tilde{V}_{th}}{\tilde{I}_N} \quad (\text{D.42})$$

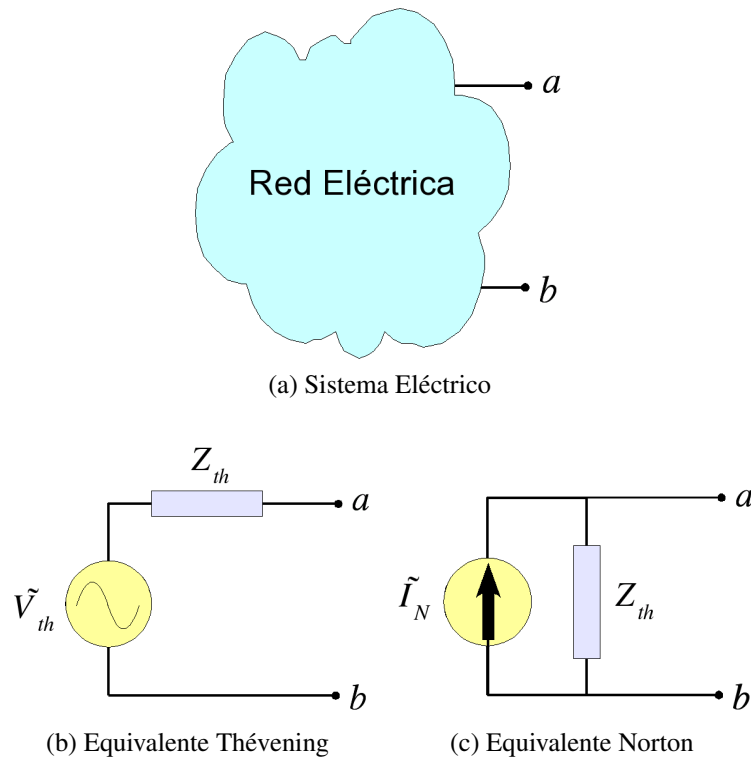


Figura D.2: Equivalente de Thévening de una red eléctrica

D.13. Teorema de Máxima Transferencia de Potencia

Para obtener máxima transferencia de potencia a una impedancia de carga conectada entre los terminales "a" y "b" de una red eléctrica, se requiere utilizar el equivalente Thévening de la red. En la figura D.3, se presenta un esquema del circuito.

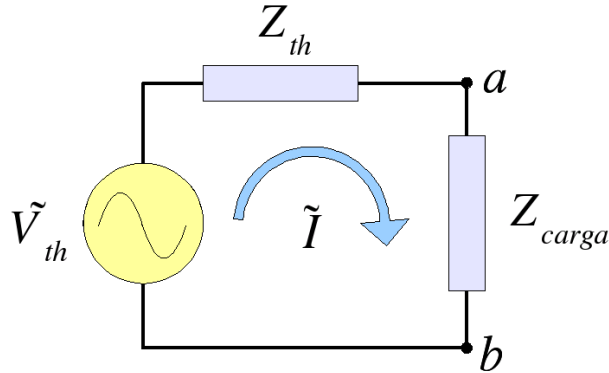


Figura D.3: Circuito equivalente de Thévening con una impedancia de carga

Donde:

$$Z_{th} = R_{th} + jX_{th} \quad (D.43)$$

$$Z_{carga} = R_{carga} + jX_{carga} \quad (D.44)$$

La potencia aparente entregada a la carga es:

$$S_{carga} = Z_{carga} \cdot |\tilde{I}|^2 = P_{carga} + jQ_{carga} = R_{carga} \cdot |\tilde{I}|^2 + jX_{carga} \cdot |\tilde{I}|^2 \quad (D.45)$$

Entonces la potencia activa entregada a la carga es:

$$P = R_{carga} \cdot |\tilde{I}|^2 \quad (D.46)$$

La corriente \tilde{I} del circuito de la figura D.3, se puede calcular utilizando la ley de Ohm como:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_{th}}{Z_{th} + Z_{carga}} = \frac{\tilde{V}_{th}}{(R_{th} + R_{carga}) + j(X_{th} + X_{carga})} \quad (D.47)$$

Sustituyendo la expresión (D.47) en la ecuación (D.46), se obtiene:

$$P = R_{carga} \cdot \frac{|\tilde{V}_{th}|^2}{(R_{th} + R_{carga})^2 + (X_{th} + X_{carga})^2} \quad (D.48)$$

El máximo de potencia se obtiene derivando la expresión de potencia (D.48) con respecto a la resistencia de la carga (R_{carga}) e igualando a cero. Se puede eliminar el término $(X_{th} + X_{carga})^2$ haciendo que $X_{carga} = -X_{th}$. Entonces la ecuación (D.48), se reduce ha:

$$P = R_{carga} \cdot \frac{|\tilde{V}_{th}|^2}{(R_{th} + R_{carga})^2} \quad (D.49)$$

Derivando se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial R_{carga}} = \frac{|\tilde{V}_{th}|^2 (R_{th} - R_{carga})}{(R_{th} + R_{carga})^3} \quad (D.50)$$

El valor de R_{carga} que anula la expresión (D.50) es:

$$R_{carga} = R_{th} \quad (D.51)$$

En conclusión para obtener máxima transferencia de potencia en una impedancia de carga se requiere que:

$$Z_{carga} = Z_{th}^* \quad (D.52)$$

D.14. Sistemas Eléctricos Trifásicos

Los sistemas eléctricos trifásicos se caracterizan por tener magnitudes de tensión y corriente iguales en las diferentes fases que lo componen y presentar un desfase entre ellas igual a $2\pi/3$, además debe presentar una secuencia de operación, bien positiva (abc) o negativa (acb) y la suma de las tensiones línea a línea de todas las fases es cero ($v_{ab}(t) + v_{bc}(t) + v_{ca}(t) = 0$).

Existen dos formas de conectar las cargas en un sistema trifásico. La conexión estrella en donde las tres ramas posee un punto común en las tres fases denominado "*neutro*" el cual puede ser aislado si no presenta conexión, o puesto a tierra sólidamente a través de un conductor o a través de un resistencia o reactancia. La conexión delta las tres ramas se conectan en serie. En la figura D.4, se presenta el esquema de una fuente trifásica conectada en estrella y delta denotando sus corrientes y tensiones de rama y fase.

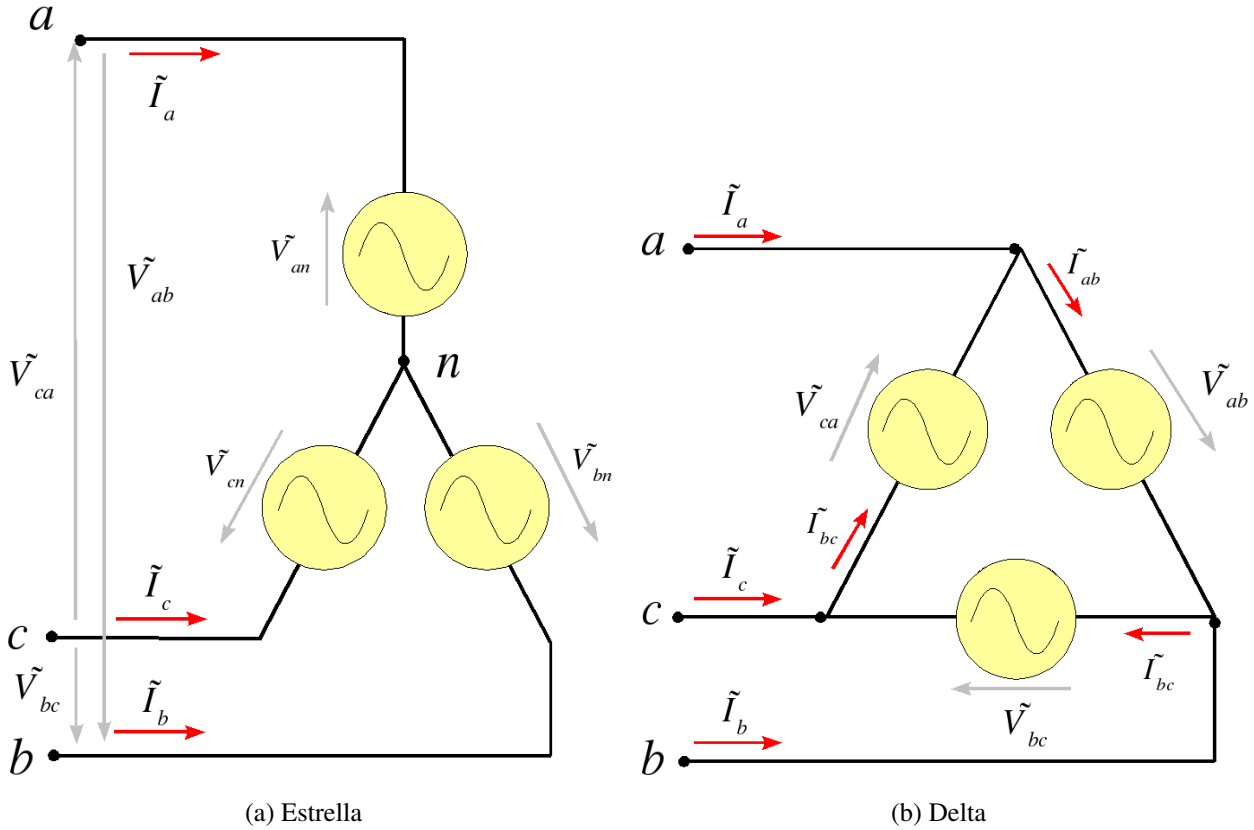


Figura D.4: Esquema de una fuente de tensión trifásica

D.14.1. Conexión Estrella

Por ejemplo un sistema de tensiones balanceado en estrella de secuencia positiva con sus respectivos fasor, posee las siguientes tensiones por fase:

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= \sqrt{2}V \sin(\omega t) &\Rightarrow \tilde{V}_{an} &= Ve^{j0} \\ v_{bn}(t) &= \sqrt{2}V \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) &\Rightarrow \tilde{V}_{bn} &= Ve^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ v_{cn}(t) &= \sqrt{2}V \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) &\Rightarrow \tilde{V}_{cn} &= Ve^{-j\frac{4\pi}{3}} \end{aligned} \quad (D.53)$$

Las tensiones línea a línea se pueden calcular a partir de las tensiones de fase utilizando los fasores.

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{ab} &= \tilde{V}_a - \tilde{V}_b = V \left(e^{j0} - e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) = \sqrt{3}Ve^{j\frac{\pi}{6}} &\Rightarrow v_{ab}(t) &= \sqrt{2}\sqrt{3}V \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ \tilde{V}_{bc} &= \tilde{V}_b - \tilde{V}_c = V \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right) = \sqrt{3}Ve^{-j\frac{\pi}{2}} &\Rightarrow v_{bc}(t) &= \sqrt{2}\sqrt{3}V \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ \tilde{V}_{ca} &= \tilde{V}_c - \tilde{V}_a = V \left(e^{-j\frac{4\pi}{3}} - e^{j0} \right) = \sqrt{3}Ve^{-j\frac{5\pi}{6}} &\Rightarrow v_{ca}(t) &= \sqrt{2}\sqrt{3}V \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned} \quad (D.54)$$

Para encontrar las tensiones línea a línea a partir de las tensiones de fase en un sistema trifásico basta con multiplicar la magnitud de la tensión por $\sqrt{3}$ y sumar a la fase de la sinusoidal $\pi/6$.

$$\tilde{V}_{ij} = \left(\sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}} \right) \cdot \tilde{V}_{in} \quad (\text{D.55})$$

En la conexión estrella las corrientes de cada fase es igual a la corriente de la respectiva rama. La impedancia de la estrella se puede definir a partir de la ley de Ohm como:

$$Z_Y = \frac{\tilde{V}_{in}}{\tilde{I}_i} \quad (\text{D.56})$$

D.14.2. Conexión Delta

Por ejemplo un sistema de corrientes balanceado en delta de secuencia positiva con sus respectivo fasor, posee las siguientes corrientes por rama:

$$\begin{aligned} i_{ab}(t) &= \sqrt{2}I \sin(\omega t) &\Rightarrow \tilde{I}_{ab} &= I e^{j0} \\ i_{bc}(t) &= \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) &\Rightarrow \tilde{I}_{bc} &= I e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ i_{ca}(t) &= \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) &\Rightarrow \tilde{I}_{ca} &= I e^{-j\frac{4\pi}{3}} \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

De los nodos de la figura D.4b se puede calcular las corrientes en las ramas como:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_a &= \tilde{I}_{ab} - \tilde{I}_{ca} = I \left(e^{j0} - e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right) = \sqrt{3}I e^{-j\frac{\pi}{6}} &\Rightarrow i_a(t) &= \sqrt{2}\sqrt{3}I \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \\ \tilde{I}_b &= \tilde{I}_{bc} - \tilde{I}_{ab} = I \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{j0} \right) = \sqrt{3}I e^{-j\frac{5\pi}{6}} &\Rightarrow i_b(t) &= \sqrt{2}\sqrt{3}I \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) \\ \tilde{I}_c &= \tilde{I}_{ca} - \tilde{I}_{bc} = I \left(e^{-j\frac{4\pi}{3}} - e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) = \sqrt{3}I e^{j\frac{\pi}{2}} &\Rightarrow i_c(t) &= \sqrt{2}\sqrt{3}I \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

Para encontrar las corrientes de línea a partir de las corrientes de rama en un sistema trifásico basta con multiplicar la magnitud de la corriente por $\sqrt{3}$ y restar a la fase de la sinusoidal $\pi/6$.

$$\tilde{I}_i = \left(\sqrt{3} e^{-j\frac{\pi}{6}} \right) \cdot \tilde{I}_{ij} \quad (\text{D.59})$$

En la conexión delta las tensiones línea a línea son iguales a las tensiones de la respectiva rama. La impedancia de la delta se puede definir a partir de la ley de Ohm como:

$$Z_\Delta = \frac{\tilde{V}_{ij}}{\tilde{I}_{ij}} \quad (\text{D.60})$$

D.14.3. Equivalente Delta Estrella

La conexión delta se puede modelar como una estrella con el neutro aislado utilizando las relaciones (D.55) y (D.59).

$$Z_{\Delta} = \frac{\tilde{V}_{ij}}{\tilde{I}_{ij}} = \frac{\left(\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}\right) \cdot \tilde{V}_{in}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{j\frac{\pi}{6}}\right) \cdot \tilde{I}_i} = 3 \cdot \frac{\tilde{V}_{in}}{\tilde{I}_i} = 3 \cdot Z_Y \quad (\text{D.61})$$

D.14.4. Potencia Trifásica

Para un sistema de tensiones y corrientes trifásicas balanceadas y de secuencia positiva de la forma:

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= \sqrt{2}V \sin(\omega t) \\ v_{bn}(t) &= \sqrt{2}V \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{cn}(t) &= \sqrt{2}V \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.62})$$

$$\begin{aligned} i_a(t) &= \sqrt{2}I \sin(\omega t - \beta) \\ i_b(t) &= \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \beta\right) \\ i_c(t) &= \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \beta\right) \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$

La potencia instantánea en el sistema trifásico se calcula a partir de la potencia instantánea de cada una de las fases como:

$$p(t) = v_{an}(t) \cdot i_a(t) + v_{bn}(t) \cdot i_b(t) + v_{cn}(t) \cdot i_c(t) \quad (\text{D.64})$$

Sustituyendo las expresiones (D.62) y (D.63) en la ecuación (D.64) obtenemos:

$$\begin{aligned} p(t) &= 2VI \sin(\omega t) \sin(\omega t - \beta) + 2VI \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \beta\right) \\ &\quad + 2VI \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \beta\right) \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

Simplificando la expresión (D.65) con la identidad trigonométrica (D.24), obtenemos:

$$\begin{aligned} p(t) &= VI \cos(\beta) - VI \cos(2\omega t - \beta) + VI \cos(\beta) - VI \cos\left(2\omega t - \beta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ &\quad + VI \cos(\beta) - VI \cos\left(2\omega t - \beta - \frac{8\pi}{3}\right) \\ p(t) &= 3VI \cos(\beta) \end{aligned} \quad (\text{D.66})$$

La potencia promedio de un circuito trifásico es:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = 3VI \cos(\beta) \quad (\text{D.67})$$

Del resultado de la expresión (D.66), la potencia instantánea de un circuito trifásico balanceado es constante e igual a tres veces la potencia promedio de un circuito monofásico equivalente.

La potencia compleja en un sistema eléctrico trifásico se expresa en función la de potencia de una fase o en función de la tensión línea a línea y de la corriente de línea como:

$$\tilde{S}_{3\Phi} = 3\tilde{S}_{1\Phi} = 3\tilde{V}_{in} (\tilde{I}_i)^* = \sqrt{3}\tilde{V}_{ij} (\tilde{I}_i)^* = P + jQ \quad (\text{D.68})$$

Para un sistema balanceado y equilibrado la potencia compleja es:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{3\Phi} &= 3\tilde{S}_{1\Phi} = 3\tilde{V}_{in} (\tilde{I}_i)^* = 3Ve^{j0} (Ie^{-j\beta})^* = 3V I e^{j\beta} \\ \tilde{S}_{3\Phi} &= 3VI (\cos(\beta) + j \sin(\beta)) = P + jQ \end{aligned} \quad (\text{D.69})$$

Otra forma de obtener la potencia instantánea para circuitos de tres hilos es decir, con neutro aislado es:

$$p(t) = v_{ab}(t) \cdot i_a(t) - v_{bc}(t) \cdot i_c(t) \quad (\text{D.70})$$

si desarrollamos la expresión (D.70), obtenemos:

$$\begin{aligned} p(t) &= (v_a(t) - v_b(t)) \cdot i_a(t) - (v_b(t) - v_c(t)) \cdot i_c(t) (i_a(t) + i_c(t)) \\ p(t) &= v_a(t) \cdot i_a(t) + v_c(t) \cdot i_c(t) - v_b(t) \end{aligned} \quad (\text{D.71})$$

De la condición de neutro aislado:

$$\begin{aligned} i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) &= 0 \\ i_b(t) &= -(i_a(t) + i_c(t)) \end{aligned} \quad (\text{D.72})$$

Sustituyendo el resultado de la expresión (D.72) en la ecuación de potencia instantánea D.71, se obtiene la misma expresión de (D.64).

$$p(t) = v_a(t) \cdot i_a(t) + v_b(t) \cdot i_b(t) + v_{cn}(t) \cdot i_c(t) \quad (\text{D.73})$$

Circuitos Magnéticos

E.1. Aspectos Generales

En los circuitos eléctricos, la conexión entre elementos pasivos se realiza por medio de materiales conductores. Estos materiales obligan a la corriente a seguir trayectorias determinadas, obedeciendo las leyes de Kirchhoff. Cuando se estudia los dispositivos electromagnéticos y electromecánicos tales como los transformadores y las máquinas eléctricas, se plantea un problema similar, con la canalización y concentración de altas densidades de flujo magnético en trayectorias específicas, esto se logra con la utilización de materiales ferro magnéticos. Un circuito magnético está conformado generalmente por una estructura de hierro, sobre la cual se bobinan uno o más arrollados por donde circulan corrientes. Esta corriente al circular por los devanados dan lugar a los flujos magnéticos que aparecen en el sistema. En la figura E.1, se presenta un esquema de un circuito magnético con entre hierro.

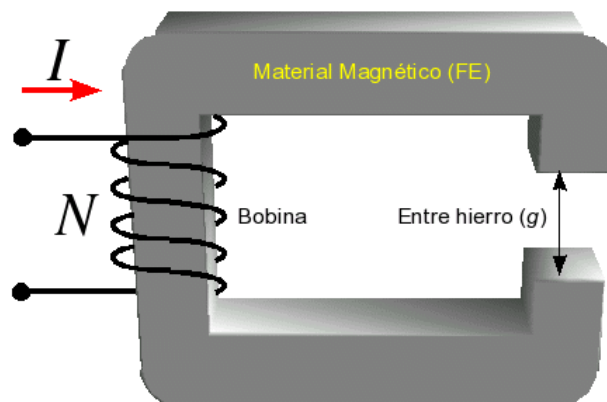


Figura E.1: Esquema de un circuito magnético con entre hierro

El cálculo preciso de los flujos magnéticos en un circuito magnético es laboriosa y requiere un alto consumo de tiempo computacional, además de la utilización correcta de las ecuaciones de Maxwell y de la condición de contorno entre los diferentes medios analizados. Sin embargo, para la mayoría

de las aplicaciones de los circuitos magnéticos en Electrotecnia, estos pueden ser resueltos de forma aproximada.

El comportamiento de un circuito magnético viene dado fundamentalmente por la ley de Gauss del campo magnético ($\nabla \cdot B = 0$) y por el hecho de que en los materiales ferro magnéticos la permeabilidad es elevada y muy superior a la del vacío ($\mu \gg \mu_0$). Estas condiciones corresponden, en el caso de circuitos eléctricos, a la consideración que en un medio conductor en donde no exista carga eléctrica atrapada la divergencia de la densidad de corriente es cero ($\nabla \cdot J = 0$). Esto se debe a que la conductividad del conductor (σ) es muy elevada en comparación con la de los materiales aislantes y dieléctricos. Esta similitud hace que se pueda aplicar a los circuitos magnéticos todos los teoremas de redes analizados en los cursos de teoría de circuitos eléctricos, aunque la resolución es algo más laboriosa, debido al carácter no lineal del núcleo ferro magnético.

E.2. Materiales Magnéticos

Las propiedades magnéticas macroscópicas de un material lineal, homogéneo e isotrópico se definen en función de su valor de permeabilidad magnética (μ), que es un coeficiente que expresa la proporcionalidad entre la intensidad del campo magnético (H) y la densidad de campo magnético (B).

$$B = \mu H \quad (\text{E.1})$$

Generalmente la permeabilidad magnética del medio (μ) se expresa en función de la permeabilidad magnética del vacío (μ_0) como:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad (\text{E.2})$$

donde:

μ_r es la permeabilidad magnética del medio respecto al vacío.

μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío ($4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$).

Los materiales magnéticos presentan saturación o variación de la permeabilidad a partir de un valor de densidad de campo magnético. Este punto se le conoce como codo de saturación y oscila entre los 1,0 a 1,2 Teslas. En la figura E.2 se presenta la característica de permeabilidad para el acero magnético M-27 utilizado en la fabricación de transformadores.

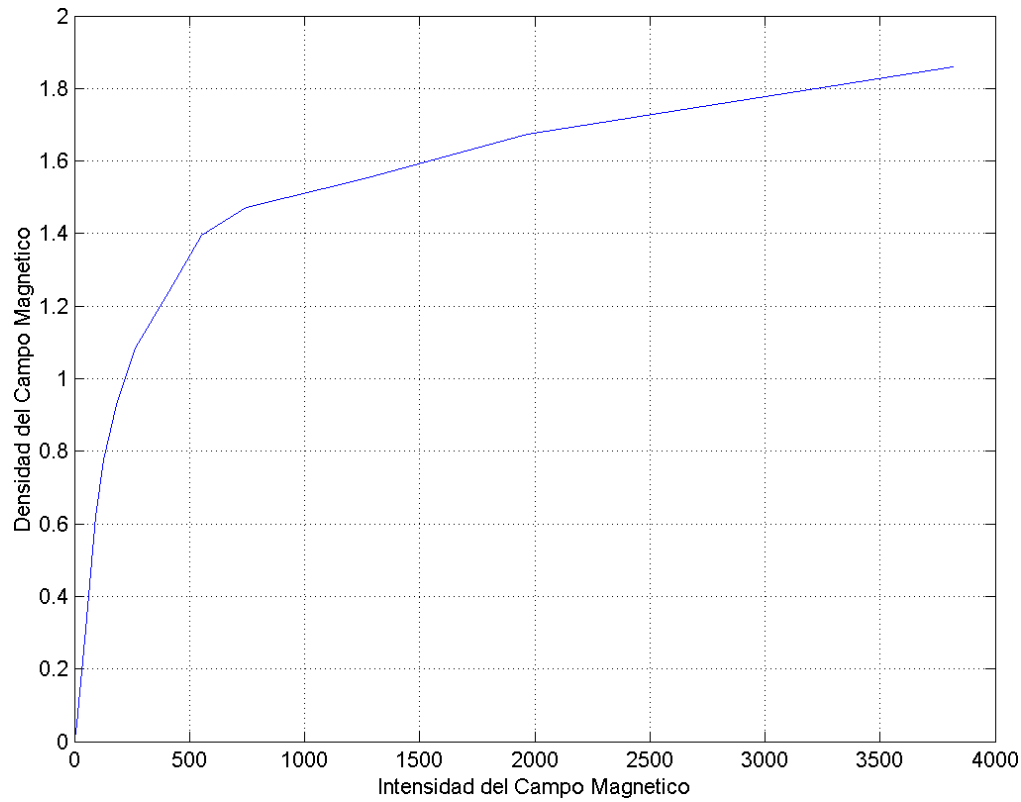


Figura E.2: Característica de magnetización del material M-27

E.3. Leyes de los Circuitos Magnéticos

La descripción exacta del campo magnético requiere el uso de las ecuaciones de Maxwell, las condiciones de contorno entre los medios y el conocimiento preciso de las relaciones entre la intensidad de campo magnético y su densidad en los medios donde se establece el campo. Como en el análisis de los circuitos magnéticos las frecuencias de excitación involucradas son relativamente bajas (frecuencia industrial), se puede emplear con suficiente exactitud las aproximaciones de campo cuasi estacionario, es decir, se pueden despreciar las corrientes de desplazamiento de las ecuaciones de Maxwell, obteniendo:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \sum i = Ni = FMM \quad (E.3)$$

La expresión (E.3), nos indica que la circulación del campo magnético \mathbf{H} en un camino cerrado γ es igual a la suma de corrientes que atraviesan la superficie circunscrita por el camino. Si existen N espiras llevando cada una la corriente i , la suma de corrientes será igual al producto Ni . Este producto se denomina "*Fuerza Magnetomotriz*" (FMM) y sus unidades son los amper-vueltas (Av). La fuerza magnetomotriz es la causa que se establezca un campo magnético en un circuito, de un

modo análogo al de la fuerza electromotriz causa en un circuito eléctrico el establecimiento de una corriente.

En la mayoría de las situaciones prácticas que se suelen dar en el estudio de las máquinas eléctricas, el camino γ elegido para aplicar la ley de Ampere (E.3), coincide con la trayectoria media seguida por las líneas de campo magnético \mathbf{H} . Por otro parte, si el material es homogéneo e isotrópico, la magnitud de \mathbf{H} es la misma en todo el recorrido, de ahí que la expresión (E.3), se pueda escribir de forma escalar como:

$$Hl = FMM = Ni \quad (\text{E.4})$$

donde:

l representa la longitud magnética media de las líneas de \mathbf{H} .

Otro concepto importante que se debe recordar es el de flujo magnético Φ que atraviesa una superficie S , que viene definido por:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{E.5})$$

Las unidades del flujo magnético son los Webers (Wb). En la práctica la inducción magnética es prácticamente constante en la sección transversal de los núcleos ferro magnéticos y además tiene la misma dirección que el vector de superficie, por esto la expresión (E.5), se puede escribir como:

$$\Phi = BS \quad (\text{E.6})$$

Sustituyendo los resultados de las expresiones (E.1) y (E.6) en la ecuación (E.4), se obtiene:

$$FMM = Ni = \frac{Bl}{\mu} = \Phi \frac{l}{\mu S} \quad (\text{E.7})$$

Si denominamos *reluctancia magnética* \mathfrak{R} a:

$$\mathfrak{R} \equiv \frac{l}{\mu S} \quad (\text{E.8})$$

Al inverso de la reluctancia magnética se le conoce como permeanza y se denota con la letra: \wp .

$$\wp = \frac{1}{\mathfrak{R}} \quad (\text{E.9})$$

La permeanza magnética tiene unidades de Henrios, sustituyendo la definición (E.8) en la expresión (E.7), se obtiene:

$$FMM = Ni = \Phi \Re \quad (E.10)$$

La expresión (E.10), es fundamental para el estudio de los circuitos magnéticos y se le conoce como **ley de Hopkinson**, o ley de Ohm de los circuitos magnéticos, por su analogía con la ley de Ohm de las redes eléctricas.

$$e = Ri \quad (E.11)$$

Como se deduce de las expresiones anteriores, existe una gran analogía entre los circuitos eléctricos y magnéticos. Esto hace posible el estudio de los circuitos magnéticos, utilizando las mismas técnicas de análisis empleadas en los circuitos eléctricos. Sin embargo, existen diferencias en ambos circuitos que no permiten que las técnicas que se utilizan en el análisis de los circuitos eléctricos tengan la misma exactitud en el estudio de los circuitos magnéticos. Esto se debe a que la corriente en un circuito eléctrico esta limitada al material conductor y la fuga son despreciables en los circuitos magnéticos el flujo no se limita al material ferro magnético sino existe una proporción que circula por el aire, que se conoce como flujo de dispersión. Este flujo de dispersión oscila entre un diez a quince por ciento del flujo total. Otro aspecto importante a considerar es la expresión de las líneas de flujo a circular por espacios de aire entre dos piezas magnéticas conocidos como **entre hierro**.

En la tabla E.1, se presentan los parámetros equivalentes entre los circuitos eléctricos y magnéticos, así como sus unidades en el sistema internacional de medida.

Tabla E.1: Parámetros equivalentes entre los circuitos eléctrico y magnéticos

Circuito eléctrico			Circuito magnético		
e	Fuerza electromotriz	(V)	FMM	Fuerza magnetomotriz	(Av)
\mathbf{J}	Densidad de corriente	(A/m)	\mathbf{B}	Densidad de campo magnético	(T)
σ	Conductividad	(S/m)	μ	Permeabilidad magnética	(H/m)
\mathbf{E}	Campo eléctrico	(V/m)	\mathbf{H}	Intensidad de campo magnético	(Av/m)
i	Corriente eléctrica	(A)	Φ	Flujo magnético	(Wb)

En la figura E.3, se representa el análogo eléctrico del circuito magnético de la figura E.1. En la tabla E.2, se presentan las analogías entre las leyes de los circuitos eléctricos y los magnéticos.

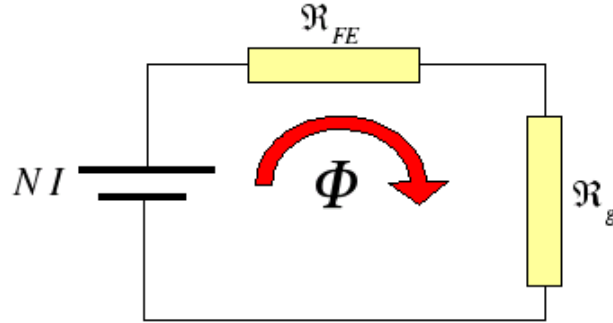


Figura E.3: Análogo eléctrico del circuito magnético de la figura E.1.

Tabla E.2: Leyes equivalentes entre los circuitos eléctricos y magnéticos

Circuito eléctrico	Circuito magnético
Primera ley de Kirchhoff: $\sum i = 0$	Primera ley de Kirchhoff: $\sum \Phi = 0$
Segunda ley de Kirchhoff: $\sum e = \sum Ri$	Segunda ley de Kirchhoff: $\sum FMM = \sum \mathfrak{R}\Phi$ $\sum FMM = \sum Hl$
Resistencia: $R = \frac{l}{\sigma S}$	Reluctancia: $\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S}$
Resistencia en serie: $R_T = \sum R_i$	Reluctancia en serie: $\mathfrak{R}_T = \sum \mathfrak{R}_i$
Resistencia en paralelo: $\frac{1}{R_T} = \sum \frac{1}{R_i}$	Reluctancia en paralelo: $\frac{1}{\mathfrak{R}_T} = \sum \frac{1}{\mathfrak{R}_i}$

El enlace de flujo de un circuito magnético (λ) se define como:

$$\lambda = N\Phi = Li \quad (\text{E.12})$$

De la expresión (E.12), se puede calcular la inductancia del circuito como:

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\Phi}{i} \quad (\text{E.13})$$

Si se sustituye la expresión (E.10), en la ecuación (E.13), se obtiene el valor de la inductancia en función de los parámetros geométricos del circuito y características del material.

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = N^2 \wp = \frac{N^2 \mu S}{l} \quad (\text{E.14})$$

E.4. Excitación Sinusoidal

Si alimentamos el circuito magnético de la figura E.1, con una tensión sinusoidal de la forma $v(t) = \sqrt{2}V_{rms} \cos(\omega t)$, se puede determinar el flujo en el material magnético utilizando la ley de Faraday como:

$$v(t) = \sqrt{2}V_{rms} \cos(\omega t) = \frac{d\lambda}{dt} = N \frac{d\Phi}{dt} \quad (E.15)$$

Integrando la expresión (E.15), se obtiene el flujo como:

$$\Phi = \frac{1}{N} \int \sqrt{2}V_{rms} \cos(\omega t) dt = \frac{\sqrt{2}V_{rms}}{N\omega} \sin(\omega t) \quad (E.16)$$

De la expresión (E.16), se obtiene el valor pico del flujo como:

$$\Phi_{max} = \frac{\sqrt{2}V_{rms}}{N2\pi f} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{V_{rms}}{Nf} = \frac{1}{4,44} \frac{V_{rms}}{Nf} \quad (E.17)$$

Como el circuito posee área transversal constante (A_t), entonces:

$$\Phi_{max} = B_{max}A_t \quad (E.18)$$

Sustituyendo la ecuación (E.18) en la expresión (E.17), se obtiene:

$$V_{rms} = 4,44 \Phi_{max} Nf = 4,44 B_{max} A_t Nf = 4,44 f \lambda_{max} \quad (E.19)$$

El resultado de la expresión (E.19), indica que al variar la tensión efectiva de alimentación sinusoidal de un circuito magnético, es necesario variar en la misma proporción la frecuencia de alimentación a fin de mantener el flujo y la densidad de campo magnético constante.

E.4.1. Ejemplo

Los materiales magnéticos presentan saturación o variación de la permeabilidad a partir de un valor de densidad de campo magnético. Este punto se le conoce como codo de saturación y oscila entre los 1.0 a 1.2 Teslas. En la figura E.4a se presenta la característica de permeabilidad para el acero magnético M-27 utilizado en la fabricación de transformadores. En la figura E.4b se presenta la característica de permeabilidad del material magnético M-27 en escala semilogarítmica para la intensidad de campo magnético.

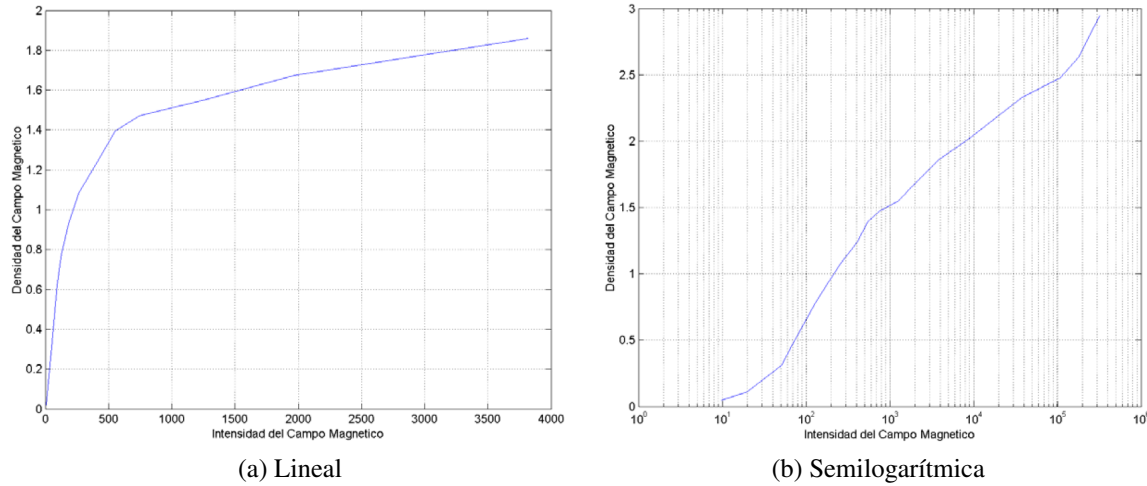


Figura E.4: Característica H vs B para el material M-27

A partir de la característica de permeabilidad del material se puede encontrar la curva de magnetización del material. Esta curva está definida por la relación entre la fuerza magnetomotriz y el flujo magnético en el material. Recordando:

$$\phi = B \cdot A_T \quad (\text{E.20})$$

$$FMM = N \cdot i = H \cdot l_{media} \quad (\text{E.21})$$

donde:

A_T	Área transversal.
l_{media}	Longitud media del material.
N	Numero de vueltas.

Para un circuito magnético el área transversal y la longitud está definido por la geometría de núcleo o acero magnético. El número de vueltas está definido por la bobina del circuito. Considerando estos dos aspectos y teniendo presente las expresiones (E.20) y (E.21) se puede determinar que la corriente en el circuito es directamente proporcional a la intensidad del campo magnético y el flujo magnético a la densidad del campo. En la figura E.5 se presenta la curva de magnetización del material M-27.

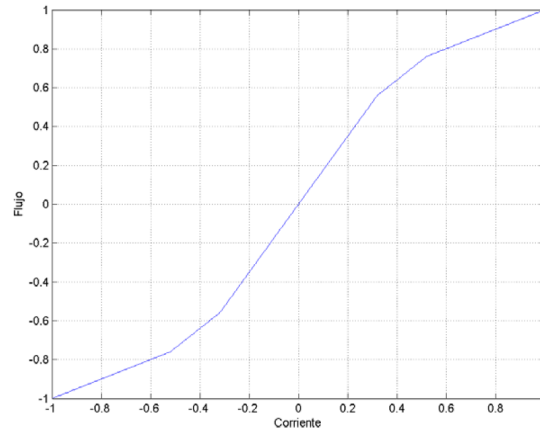


Figura E.5: Curva de magnetización del acero magnético M-27

Alimentando la bobina del circuito magnético con una tensión sinusoidal de la forma $v(t) = K \cdot \cos(\omega t)$, podemos encontrar el flujo en el circuito magnético utilizando la ley de Faraday.

$$v(t) = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \phi(t) = \int v(\tau) \cdot d\tau \quad (\text{E.22})$$

Sustituyendo la expresión de la tensión en la ecuación (E.22), se obtiene al flujo magnético en el núcleo del circuito como:

$$\phi(t) = \frac{K}{\omega} \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (\text{E.23})$$

Conocido el flujo magnético del núcleo del circuito y con la curva de magnetización de la figura E.5, se puede determinar la corriente que circula por la bobina para cada instante de tiempo. En la figura E.6 se presenta las formas de onda de la tensión y flujo magnético normalizados y la corriente resultante al considerar la curva de magnetización de la figura E.5.

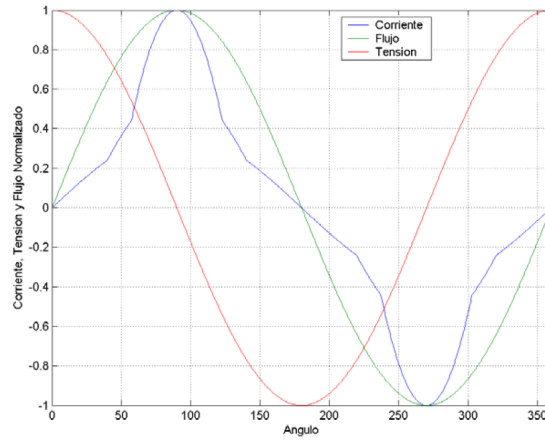


Figura E.6: Corriente en de excitación del circuito magnético ante una alimentación en tensión sinusoidal

En la figura E.7, se presenta el espectro armónico de la corriente, luego de descomponerla mediante series de Fourier.

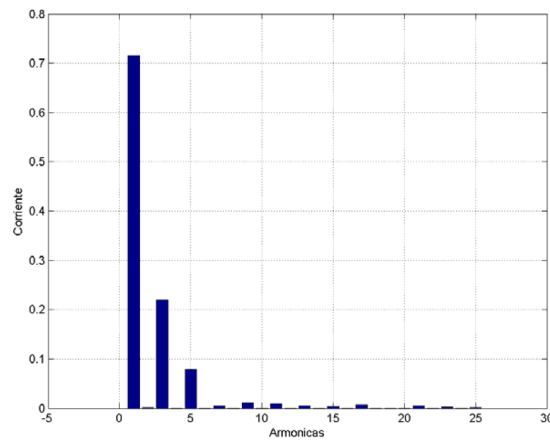


Figura E.7: Espectro armónico de la corriente

Del espectro armónico de la corriente se puede obtener una aproximación de la corriente del circuito analítica si consideramos las armónicas más significativas ($n = 1, 3, 5, 7$).

$$i(t) \approx 0,7151 \cdot \text{sen}(\omega t) - 0,2195 \cdot \text{sen}(3\omega t) + 0,07595 \cdot \text{sen}(5\omega t) + 0,0046 \cdot \text{sen}(7\omega t) \quad (\text{E.24})$$

En la figura E.8, se presenta el Oscilograma obtenido al evaluar la expresión (E.24) en el tiempo.

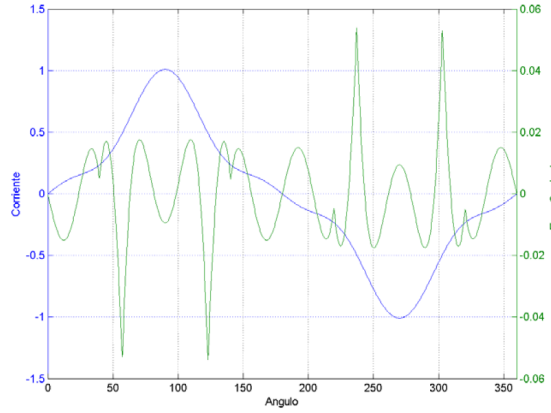


Figura E.8: Oscilograma de Corriente a partir de la Serie de Fourier y su respectivo error

E.5. Transformador Ideal

Un circuito magnético con por lo menos dos bobinas, como el mostrado en la figura E.9, es alimentado por la bobina 1 por una tensión sinusoidal de la forma $e_1(t) = \sqrt{2}V_{rms} \cos(\omega t)$. De la expresión (E.16), el flujo magnético resultante en el circuito es:

$$\Phi(t) = \frac{\sqrt{2}V_{rms}}{N_1 \omega} \sin(\omega t) \quad (\text{E.25})$$

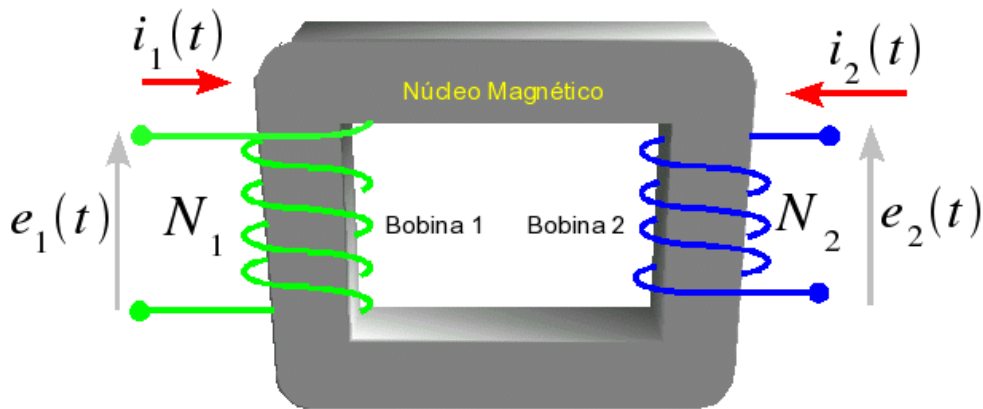


Figura E.9: Esquema del circuito magnético de un transformador de dos devanados

El flujo por ley de Faraday induce una tensión sobre la bobina 2 de la forma:

$$e_2(t) = N_2 \frac{d\Phi(t)}{dt} = N_2 \frac{\sqrt{2}V_{rms}}{N_1} \cos(\omega t) \quad (\text{E.26})$$

Realizando el cociente entre las dos tensiones, se obtiene:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{E.27})$$

La expresión (E.27), nos indica que la relación entre las tensiones inducidas en las dos bobinas del circuito es igual la relación entre el número de vueltas de ambas bobinas. El cociente entre el número de vueltas de la bobina 1 y el número de vueltas de la bobina 2, se denomina "*relación de transformación*".

$$a = \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{E.28})$$

Por otra parte los amper vuelta de la bobina 1 deben ser iguales a los amper vuelta de la bobina 2, debido a que comparten el mismo circuito magnético.

$$i_1(t) N_1 = \Re_{eq} \Phi(t) = i_2(t) N_2 \quad (\text{E.29})$$

De la expresión (E.29), se obtiene:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a} \quad (\text{E.30})$$

Funciones Trigonométricas

En este anexo se presentan, las funciones e identidades trigonométricas más utilizadas en la resolución de problemas en Electrónica de Potencia.

F.1. Funciones Seno

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(\pi \pm \theta) = \mp \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) = -\cos(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(2k\pi \pm \theta) = \pm \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) \pm \cos(a) \operatorname{sen}(b)$$

$$\operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen}(a) \cos(a)$$

$$\operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b) = 2 \left[\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \right]$$

$$\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) = 2 \left[\operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \right]$$

$$\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\operatorname{sen}(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)]$$

F.2. Funciones Coseno

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\cos(2k\pi \pm \theta) = \cos(\theta)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b)$$

$$\cos(2a) = 1 - 2(\operatorname{sen}(a))^2 = 2(\cos(a))^2 - 1$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \left[\cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) \right]$$

$$\cos(a) - \cos(b) = 2 \left[\operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2} \right) \right]$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\cos(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)]$$

F.3. Integrales

$$\int \operatorname{sen}(n(a)) da = -\frac{\cos(n(a))}{n}$$

$$\int \cos(n(a)) da = \frac{\operatorname{sen}(n(a))}{n}$$

$$\int \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + C$$

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + C$$

$$\int (\operatorname{sen}(n(a)))^2 da = \frac{a}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2n(a))}{4n}$$

$$\int \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx = -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((m-n)x)}{2(m-n)} + C$$

$$\int \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{\operatorname{sen}((m-n)x)}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}((n+m)x)}{n+m} + C$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen}(bx) - b \cos(bx)) + C$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \operatorname{sen}(bx)) + C$$

$$\int \operatorname{sen}(x) e^{jnx} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{j(n-1)x}}{n-1} - \frac{e^{j(n+1)x}}{n+1} \right] + C$$

$$\int \cos(x) e^{jnx} dx = -\frac{j}{2} \left[\frac{e^{j(n-1)x}}{n-1} + \frac{e^{j(n+1)x}}{n+1} \right] + C$$

Transformada de Laplace

G.1. Definición

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (\text{G.1})$$

G.2. Tabla de Transformada de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}(f)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s-a}$
$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n = 0, 1, \dots)$
$\text{sen}(at) \cdot u(t)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos(at) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\sinh(at) \cdot u(t)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh(at) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$f'(t)$	$s\mathcal{L}(f) - f(0)$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}(f)$
$f''(t)$	$s^2 \mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$
$\delta(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$
$\frac{(t-\tau)^n}{n!} e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot u(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\frac{t^q}{\Gamma(q+1)} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^{q+1}}$
$u(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$
$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$e^{-\alpha t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\text{sen}(\omega t + \varphi) \cdot u(t)$	$\frac{s \text{sen}(\varphi) + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \text{sen}(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
$\sqrt[n]{t} \cdot u(t)$	$s^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \cdot u(t)$	$-\frac{t_0}{s} (\ln(t_0 s) + \gamma)$
$J_n(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega^n (s + \sqrt{s^2 + \omega^2})^{-n}}{\sqrt{s^2 + \omega^2}}$
$I_n(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega^n (s + \sqrt{s^2 - \omega^2})^{-n}}{\sqrt{s^2 - \omega^2}}$

Donde:

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

Rutina de Integración Numérica de Paso Fijo (Ode1)

```
1 function [tout, yout] = ode1(yfun, t0, tfinal, y0, paso)
2 %ODE23 Solve differential equations, low order method.
3 % ODE23 integrates a system of ordinary differential equations using
4 % 2nd and 3rd order Runge-Kutta formulas.
5 % [T,Y] = ODE23('yprime', T0, Tfinal, Y0) integrates the system of
6 % ordinary differential equations described by the M-file YPRIME.M,
7 % over the interval T0 to Tfinal, with initial conditions Y0.
8 % [T, Y] = ODE23(F, T0, Tfinal, Y0, TOL, 1) uses tolerance TOL
9 % and displays status while the integration proceeds.
10 %
11 % INPUT:
12 % F - String containing name of user-supplied problem description.
13 % Call: yprime = fun(t,y) where F = 'fun'.
14 % t - Time (scalar).
15 % y - Solution column-vector.
16 % yprime - Returned derivative column-vector; yprime(i) = dy(i)/dt.
17 % t0 - Initial value of t.
18 % tfinal- Final value of t.
19 % y0 - Initial value column-vector.
20 % tol - The desired accuracy. (Default: tol = 1.e-3).
21 % trace - If nonzero, each step is printed. (Default: trace = 0).
22 %
23 % OUTPUT:
24 % T - Returned integration time points (column-vector).
25 % Y - Returned solution, one solution column-vector per tout-value.
26 %
27 % The result can be displayed by: plot(tout, yout).
```

```

28 %
29 % See also ODE45, ODEDEMO.
30
31 % C.B. Moler, 3-25-87, 8-26-91, 9-08-92.
32 % Copyright (c) 1984-94 by The MathWorks, Inc.
33
34 % Initialization
35 %pow = 1/3;
36 %if nargin < 5, tol = 1.e-3; end
37 %if nargin < 6, trace = 0; end
38
39 t = t0;
40 hmax = (tfinal - t)/paso;
41 h = paso;
42 y = y0(:);
43 chunk = round(hmax);
44 tout = zeros(chunk,1);
45 yout = zeros(chunk,length(y));
46 k = 1;
47 tout(k) = t;
48 yout(k,:) = y.';
49
50 while (t < tfinal)
51
52     % Compute the slopes
53     s1 = feval(yfun, t, y); s1 = s1(:);
54     %s2 = feval(yfun, t+h, y+h*s1); s2 = s2(:);
55     %s3 = feval(yfun, t+h/2, y+h*(s1+s2)/4); s3 = s3(:);
56     t = t + h;
57     % y = y + h*(s1 + 4*s3 + s2)/6;
58     y=y+h*s1;
59     k = k+1;
60     if k > length(tout)
61         tout = [tout; zeros(chunk,1)];
62         yout = [yout; zeros(chunk,length(y))];
63     end
64     tout(k) = t;
65     yout(k,:) = y.';
66
67 tout = tout(1:k);

```

```
68 yout = yout(1:k,:);  
69 end
```