

Fonctions de Bessel

3.1 Introduction

La fonction de Bessel est parmi les plus fameuses fonctions connues en physique, elle a été introduite pour la première fois en 1817 par Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), pour décrire la propagation des ondes électromagnétiques dans des tubes cylindriques conducteurs. Cette fonction apparait naturellement comme solution de l'équation de Helmholtz bidimensionnelle exprimée en coordonnées polaires (dite équation de Bessel) rencontrée dans un grand nombre de problèmes de physique et de mécanique.

3.2 Fonction de Bessel de première espèce

L'équation de Bessel d'ordre ν est de la forme générale :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (3.1)$$

La solution générale de cette équation est une combinaison linéaire de deux solutions particulières à définir.

Cherchons une solution sous la forme :

$$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^{p+\alpha} \quad (3.2)$$

Avec α est un nombre réel à déterminer. Le calcul de la première et la dérivée de (3.2), donne :

$$y'(x) = x^{\alpha-2} \sum_{p=0}^{+\infty} (p+\alpha) a_p x^{p+1} \quad (3.3)$$

$$y''(x) = x^{\alpha-2} \sum_{p=0}^{+\infty} \{(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha p + p(p-1))\} a_p x^p \quad (3.4)$$

On injecte les trois dernières expressions dans l'équation (3.1), on obtient :

$$x^{\alpha-2} \sum_{p=0}^{+\infty} \{(\alpha+p)^2 - \nu^2\} a_p x^p + \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^{p+2} = 0 \quad (3.5)$$

Ce qui entraine que la quantité entre les deux accolades $\{\}$ doit être nul quelque soit la variable x . On a alors :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \{(\alpha+p)^2 - \nu^2\} a_p x^p + \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^{p+2} = 0 \quad (3.6)$$

Après d'expliciter les deux premiers termes de la première série et effectuer le changement de variable $p+2 = p'$ dans la deuxième série, ensuite, on remplace p' par p , l'équation (3.6) devient sous la forme :

$$\{\alpha^2 - \nu^2\} a_0 x^0 + \{(\alpha+1)^2 - \nu^2\} a_1 x^1 + \sum_{p=2}^{+\infty} [\{(\alpha+p)^2 - \nu^2\} a_p + a_{p-2}] x^p = 0 \quad (3.7)$$

Les monômes $0, x^1, x^2, \dots$ sont linéairement indépendants, alors leurs coefficients soient nuls et on écrit :

$$(\alpha^2 - \nu^2) a_0 = 0 \quad (3.8)$$

$$\{(\alpha+1)^2 - \nu^2\} a_1 = 0 \quad (3.9)$$

$$\{(\alpha+p)^2 - \nu^2\} a_p + a_{p-2} = 0; \quad \text{pour } p = 2, 3, 4, \dots \quad (3.10)$$

D'après la relation (3.9) et si $a_0 \neq 0$, la constante α peut prendre les deux valeurs possibles $+\nu$ ou $-\nu$ avec $\nu > 0$. On distingue alors deux cas :

— Premier cas : $\alpha = +\nu$

Dans ce cas, et d'après la relation ((3.10)) on a :

$$\{(\alpha+p)^2 - \nu^2\} = p(2\nu + p) > 0 \quad (3.11)$$

Ce qui entraine $a_1 = 0$ dans la relation ((3.9)) et par conséquent, tous les coefficients d'indice impair sont nuls ($a_{2r+1} = 0, r = 0, 1, 2, \dots$). Cela est évident d'après la relation de récurrence ((3.10)). Le reste des coefficients d'indices pairs a_{2r} peut être déterminé en fonction de a_0 via la relation :

$$a_{2r} = a_0 \frac{(-1)^r \Gamma(1+\nu)}{2^{2r} r! \Gamma(r+\nu+1)} \quad (3.12)$$

En effet D'après la relation (3.10), on remplace p par $2r$, on obtient :

$$a_{2r} = -\frac{a_{2r-2}}{4r(\nu+r)}, r = 1, 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

Dans ce qui suit, on explicite l'expression de a_{2r} pour différentes valeurs de $r = 1, 2, 3, \dots$, on écrit alors :

$$\begin{aligned} r = 1 & \quad a_2 = a_0 \frac{(-1)^1}{4(\nu+1)} \\ r = 2 & \quad a_2 = a_0 \frac{(-1)^2}{2^{2 \times 2} \times 2 \times (\nu+1)(\nu+2)} \\ r = 3 & \quad a_2 = a_0 \frac{(-1)^3}{2^{2 \times 3} \times 3 \times 2 \times (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} \\ r = 4 & \quad a_2 = a_0 \frac{(-1)^4}{2^{2 \times 4} \times 3 \times 2 \times (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)} \end{aligned}$$

D'après les dernières expressions, on peut exprimer le terme générale pour r donné, sous la forme :

$$a_{2r} = a_0 \frac{(-1)^r}{2^{2r} r! (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3) \dots (\nu+r)} \quad (3.14)$$

Sachant que pour r entier positif, on a :

$$\Gamma(\nu+r+1) = (\nu+r) \dots (\nu+3)(\nu+2)(\nu+1)\Gamma(\nu+1) \quad (3.15)$$

Donc la relation (3.14) devient :

$$a_{2r} = a_0 \frac{(-1)^r \Gamma(\nu+1)}{2^{2r} r! \Gamma(\nu+r+1)} \quad (3.16)$$

Après le remplacement de p par $2r$ et la substitution de (3.16) dans l'expression (3.2), on trouve :

$$y(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} a_0 \frac{(-1)^r \Gamma(\nu+1)}{2^{2r} r! \Gamma(\nu+r+1)} x^{2r+\nu} \quad (3.17)$$

En vue que a_0 est une constante arbitraire, de plus, la sommation dans (3.2) est indépendante de ν , donc on peut le mettre sous la forme :

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

En tenant compte de cette dernière relation, l'expression (3.17) devient alors :

$$y(x) = J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \quad (3.18)$$

$J_\nu(x)$ représente la première solution particulière de l'équation de Bessel (3.1). Si ν est un nombre entier n , (3.18) devient :

$$y(x) = J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! (\nu+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \quad (3.19)$$

Deuxième cas : $\alpha = -\nu$

La relation (3.10) prend la forme :

$$p(p - 2\nu)a_p + a_{p-2} = 0 \quad (3.20)$$

si p est pair, $p = 2r$, on a $4r(r - \nu)a_{2r} + a_{2r-2} = 0$.

si p est impair, $p = 2r + 1$, on a :

$$(2r + 1) \{2(r - \nu) + 1\} + a_{2r-1} = 0$$

$$(1 - 2\nu)a_1 = 0 \quad (d'après(1.9))$$

Pour $\nu \neq \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$. Tous les coefficients d'indice impairs seront nuls car $\{2(r - \nu) + 1\} \neq 0$. Dans ce cas, on procède d'un raisonnement analogue au cas précédent $\alpha = \nu$, on arrive à la relation :

$$y(x) = J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(r - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \quad (3.21)$$

Supposons que ν ne soit pas égale à un nombre entier. D'après l'étude de la fonction Gamma (Γ) en premier chapitre, on voit que $\Gamma(1 + r - \nu)$ et $\Gamma(r + \nu + 1)$ gardent une valeur finie quelque soit r fini. Dans ces conditions, on aura les limites : $\lim_{x \rightarrow 0} J_{\nu}(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} J_{-\nu}(x) = +\infty$. Ce qui montre que $J_{\nu}(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ sont linéairement indépendantes. La solution générale de l'équation de Bessel (3.1) est alors une combinaison linéaire de J_{ν} et $J_{-\nu}$ et elle s'écrit :

$$y(x) = AJ_{\nu}(x) + BJ_{-\nu}(x) \quad (3.22)$$

Où A et B sont deux constantes réelles.

3.2.1 Fonction Bessel pour un nombre entier

Dans le cas où $\nu = n$, avec n entier, la relation (3.21) devient :

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(r - n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \quad (3.23)$$

D'après la propriété de la fonction Γ :

$$\frac{1}{\Gamma(r - n + 1)} = 0, \quad si \quad r - n < 0$$

L'équation (3.23) :

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{r=n}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! (r - n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \quad (3.24)$$

Posons $r' = r - n$, il vient :

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{r'=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{r'+n}}{r'!(r'+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r'+2n} \quad (3.25)$$

Comme le nom de l'indice de sommation n'a pas d'importance, on écrit finalement la relation (3.25) sous la forme :

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r'!(r+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \\ &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Selon la relation (3.19), on peut établir la relation entre J_{-n} et J_n et on écrit :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (3.27)$$

Ce qui montre que pour un ordre entier de l'équation de Bessel, les deux solutions particulières J_{-n} et J_n deviennent linéairement dépendantes. Il faut donc, chercher une autre solution particulière linéairement indépendante de J_n , pour obtenir l'intégrale générale et qui est dite fonction de Bessel de seconde espèce.

3.3 Fonction de Bessel de deuxième espèce ou fonction de Neumann

La fonction de Neumann notée $Y_\nu(x)$ ou $N_\nu(x)$ est une fonction de la variable x et d'ordre ν . Elle est définie comme une combinaison linéaire des deux fonctions $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ sous la forme :

$$Y_\nu(x) = \frac{(\cos\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} \quad (3.28)$$

Il est évident que $Y_\nu(x)$ est une solution particulière de l'équation de Bessel (3.1). La particularité de cette nouvelle fonction, c'est qu'elle se présente sous forme indéterminée $\frac{0}{0}$ lorsque ν devient un nombre entier n . Pour lever cette indétermination, on applique la règle d'Hospital en considérant x fixe et ν variable.

On écrit :

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{\partial[(\cos\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]}{\partial\nu}}{\frac{\partial\sin\pi\nu}{\partial\nu}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} + (-1)^{n+1} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu} \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

On va calculer maintenant la limite des dérivées contenues dans l'équation(3.29). A partir de (3.18), on déduit :

$$\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} = J_\nu(x) \log \frac{x}{2} - \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu + r + 1)} \frac{\Gamma'(\nu + r + 1)}{\Gamma(\nu + r + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2r} \quad (3.30)$$

Où Γ' ici représente $\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}$. Les propriétés de la fonction Γ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} \Gamma(\nu + r + 1) &= (n + r)! \\ \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\Gamma'(\nu + r + 1)}{\Gamma(\nu + r + 1)} &= -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r + n} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ce qui conduit à :

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} = J_n(x) \left(\log \frac{x}{2} + \gamma \right) - \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! (n + r)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r + n} \right) \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \quad (3.32)$$

Notons que, dans cette dernière relation, le premier terme correspondant à $r = 0$ et $n = 0$, doit être nul et ça vient du fait que $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$ ce qui entraîne que la quantité $\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r+n} \right]$ égale à zéro quand $r = 0$ et $n = 0$ à la fois. On a de même :

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} = -J_{-n}(x) \left(\log \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(r - \nu + 1)} \frac{\Gamma'(r - \nu + 1)}{\Gamma(r - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \quad (3.33)$$

Lorsque $\nu \rightarrow n$, la sommation cette dernière expression sera découpée en deux, l'une correspond à $(r - n) \geq 0$ et l'autre correspond à $(r - n) < 0$, et dans ce dernier cas, on utilise la propriété :

$$\frac{1}{\Gamma(-p + 1)} \frac{\Gamma'(-p + 1)}{\Gamma(-p + 1)} = (-1)^p (p - 1)!, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (3.34)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} &= -J_{-n}(x) \left(\log \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^n}{r!} (n - r - 1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} \\ &\quad + \sum_{r=n}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! (r - n)!} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r - n} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} \end{aligned} \quad (3.35)$$

En effectuant le changement $r - n = r'$ dans la dernière sommation, puis on remplace r' par r , on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} &= -J_{-n}(x) \left(\log \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^n}{r!} (n - r - 1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} \\ &\quad + \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{r+n}}{(r + n)! r!} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \end{aligned} \quad (3.36)$$

On injecte l'expression des deux dérivées (3.32) et (3.36) dans l'expression (3.22) et on utilise en même temps la relation (3.27), on trouve en définitive :

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) &= Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{x}{2} + \gamma \right) J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n - r - 1)!}{r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{r+n}}{r! (r + n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r + n} \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Qui représente explicitement la deuxième solution particulière de l'équation de Bessel (3.1) dans le cas où l'ordre ν est un nombre entier. On a pour $n = 0$:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{x}{2} + \gamma \right) J_0(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2r} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} \right] \quad (3.38)$$

En conclusion, la solution générale de l'équation (3.1) est une combinaison linéaire des deux solutions particulières $Y_\nu(x)$ et $J_\nu(x)$ quelque soit l'ordre ν et on écrit :

$$y(x) = AY_\nu(x) + BJ_\nu(x) \quad (3.39)$$

où A et B sont deux constantes réelles.

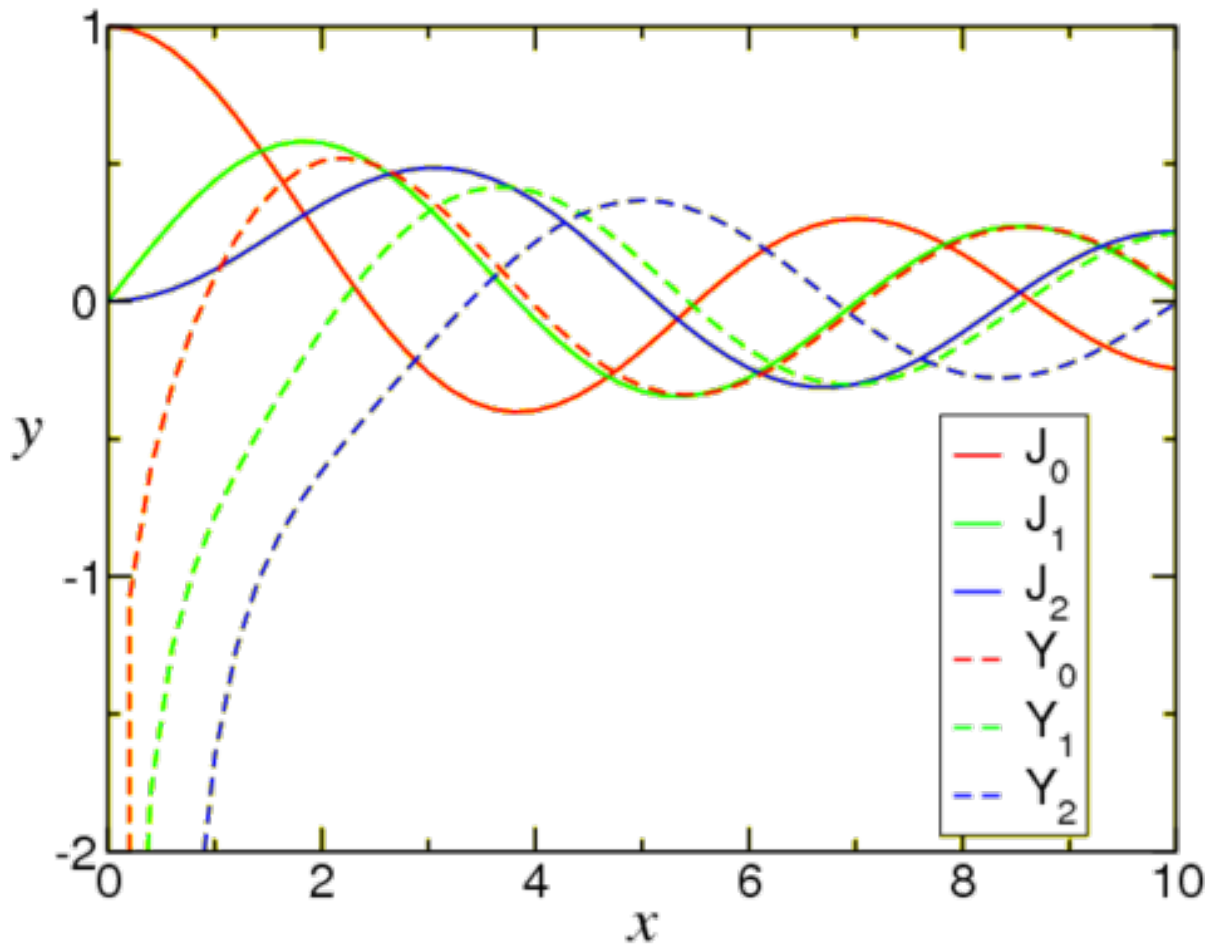


FIGURE 3.1 – représentation graphique de quelques fonctions Bessel de premier et seconde espèce.

3.4 Fonctions de Hankel ou Fonctions de Bessel de troisième espèce

Les fonctions de Hankel des premier et deuxième types notées respectivement $H_\nu^1(x)$ et $H_\nu^2(x)$, sont deux autres solutions particulières de la l'équation de Bessel (3.1). Elles sont définies par :

$$\begin{aligned} H_\nu^1(x) &= J_\nu(x) + iY_\nu(x) \\ H_\nu^2(x) &= J_\nu(x) - iY_\nu(x) \end{aligned} \quad (3.40)$$

et la solution générale prend la forme :

$$y(x) = CH_\nu^1(x) + DH_\nu^2(x) \quad (3.41)$$

Où C et D sont des constantes arbitraires.

3.5 Relation de récurrence

Partant de l'expression (3.18) de $J_\nu(x)$, on a alors :

$$\begin{aligned} x^\nu J_\nu(x) &= \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu + r + 1) 2^{2r+\nu}} x^{2r+2\nu} \\ \frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) &= \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r (2r + 2\nu)}{r! \Gamma(\nu + r + 1) 2^{2r+\nu}} x^{2r+2\nu-1} \\ &= x^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma((\nu - 1) + r + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \\ &= x^\nu J_{\nu-1}(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad (3.42)$$

On a de même :

$$\begin{aligned}
 x^{-\nu} J_{\nu}(x) &= \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu + r + 1) 2^{2r+\nu}} x^{2r} \\
 \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_{\nu}(x)) &= \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r (2r)}{r! \Gamma(\nu + r + 1) 2^{2r+\nu}} x^{2r-1} \\
 &= 2 \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{(r-1)! \Gamma(\nu + r + 1) 2^{2r+\nu}} x^{2r-1} \\
 &= 2 \sum_{r'=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{r'+1}}{(r')! \Gamma(r' + (\nu + 1) + 1) 2^{2r'+2+\nu}} x^{2r'+1} \quad (\text{avec } r' = r - 1) \\
 &= -x^{-\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{r'=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{r'+1}}{(r')! \Gamma(r' + (\nu + 1) + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r'} \\
 &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)
 \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_{\nu}(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \quad (3.43)$$

D'un autre coté on a :

$$\frac{d}{dx} (x^{\nu} J_{\nu}(x)) = \nu x^{\nu-1} J_{\nu}(x) + x^{\nu} J'_{\nu}(x) \quad (3.44)$$

Et

$$\frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_{\nu}(x)) = -\nu x^{-\nu-1} J_{\nu}(x) + x^{-\nu} J'_{\nu}(x) \quad (3.45)$$

Après la soustraction membre à membre les deux équations (3.42) et (3.44) ((3.43) et (3.45)) , en multipliant le résultat par $x^{-\nu}(x^{\nu})$, on trouve :

$$x J'_{\nu}(x) = \nu J_{\nu}(x) - x J_{\nu+1}(x) \quad (3.46)$$

$$x J'_{\nu}(x) = -\nu J_{\nu}(x) + x J_{\nu-1}(x) \quad (3.47)$$

Par addition et soustraction membre à membre des dernières équations, on obtient respectivement les deux relations de récurrences :

$$J'_{\nu}(x) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)] \quad (3.48)$$

$$2\nu J_{\nu}(x) = x [J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)] \quad (3.49)$$

En particulier, lorsque $\nu = 0$ dans (3.48), il vient :

$$J'_0(x) = -J_1(x) \quad (3.50)$$

Les dernières relations (de (3.42) à (3.50)) sont encore vérifiées par la fonction de Neumann $Y_\nu(x)$. (on laisse le lecteur de vérifier ça).

3.6 Fonction de Bessel pour un ordre demi entier

On sait que le développement (3.18) est valable pour n'importe valeur de ν , donc il est possible de donner l'expression de $J_\nu(x)$ pour $\nu = \frac{1}{2}$ et on écrit :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(r + \frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \quad (3.51)$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \Gamma(r + \frac{3}{2}) &= (r + \frac{1}{2}) \Gamma(r + \frac{1}{2}) \\ &= (r + \frac{1}{2}) \frac{(2r)! \sqrt{\pi}}{2^{2r} r!} \\ &= \frac{(2r+1)! \sqrt{\pi}}{2^{2r+1} r!} \end{aligned} \quad (3.52)$$

On injecte cette dernière relation dans (3.51), on obtient :

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^r}{(2r+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \\ &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \\ &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x \end{aligned} \quad (3.53)$$

On établirait de la manière précédente la relation :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x \quad (3.54)$$

En appliquant n fois l'opérateur $-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$ sur $x^{-\nu} J_{n+\nu}(x)$ et à l'aide (3.43), On peut montrer facilement que tous les $J_{n+\nu}(x)$, peuvent exprimer en terme de $J_\nu(x)$, et on écrit :

$$x^{-\nu-n} J_{\nu+n}(x) = (-1)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n (x^{-\nu} J_\nu(x)) \quad (3.55)$$

Et pour $\nu = \frac{1}{2}$, on a alors :

$$J_{\frac{1}{2}+n}(x) = x^{n+\frac{1}{2}} (-1)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)\right) \quad (3.56)$$

À l'aide de la relation (3.53), on obtient finalement :

$$J_{\frac{1}{2}+n}(x) = (-1)^n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right) \quad (3.57)$$

3.7 Forme intégrale

On rappelle l'expression de la fonction Béta (voir le chapitre 1)

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad , \quad B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} t \cos^{2y-1} t \, dt$$

On en déduit que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t \cos^{2\nu} t \, dt = \frac{1}{2} B(k + \frac{1}{2}, \nu + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(k + \nu + 1)} \quad (3.58)$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{1}{\Gamma(k + \nu + 1)} = \frac{2}{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t \cos^{2\nu} t \, dt \quad (3.59)$$

On remplace $\frac{1}{\Gamma(k + \nu + 1)}$ dans la série qui représente J_ν (équation (3.18)), on obtient :

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{2}{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t \cos^{2\nu} t \, dt \\ &= 2 \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu} t \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{\sin^{2k} t}{\Gamma(k + \frac{1}{2})} \right\} dt \end{aligned}$$

Où on a permuté l'intégration sur t et la sommation sur k . Sachant que $\Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{(2k)! \sqrt{\pi}}{2^{2k} k!}$

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu} t \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{2^{2k} k!}{(2k)!} \sin^{2k} t \right\} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu} t \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin t)^{2k} \right\} dt \end{aligned}$$

L'expression entre $\{\}$ n'est que le développement de $\cos(x \sin t)$, on écrit :

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu} t \cos(x \sin t) \, dt$$

En faisant dans cette dernière intégrale le changement de variable

$$u = \sin t \quad , \quad dt = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad (\cos t)^{2\nu} = (1-u^2)^\nu$$

On obtient :

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^1 (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(xu) \, du$$

En particulier :

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}} \, du \quad , \quad J_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^1 \cos(xu) \sqrt{1-u^2} \, du$$

3.8 Développement en série des fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel constituent un système de fonctions orthogonales dans l'intervalle $]0, a]$ par rapport à la fonction poids \sqrt{x} et elles vérifient :

$$\int_0^a x J_\nu(\lambda_n x) J_\nu(\lambda_m x) dx = \delta_{nm} \quad (3.60)$$

Avec $J_\nu(\lambda_m) = 0$ c'est à dire que les nombres λ_n sont les zéros de la fonction de Bessel d'ordre ν . Ainsi toute fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $]0, a]$ et telle que $\sqrt{x}f(x)$ est absolument intégrable, admet pour développement :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\nu n} J_\nu(\lambda_n x) \quad (3.61)$$

Où les coefficients du développement sont déterminés via l'expression :

$$a_{\nu n} = \frac{1}{N_{\nu n}^2} \int_0^a x f(x) J_\nu(\lambda_n x) dx \quad (3.62)$$

Avec

$$N_{\nu n}^2 = \int_0^a x J_\nu^2(\lambda_n x) dx = \frac{a^2}{2} \left[J_\nu'^2(\lambda_n a) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_n^2 a^2}\right) J_\nu^2(\lambda_n a) \right] \quad (3.63)$$

3.9 Fonctions de Bessel modifiées I_ν , K_ν

Ce sont les solutions particulières de l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{z}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)y(z) = 0 \quad (3.64)$$

Qui peut être obtenue par un simple changement de variable $x = iz$ dans l'équation (3.1). Selon (3.39), la solution générale de (3.64) sera donc une combinaison linéaire de $Y_\nu(iz)$ et $J_\nu(iz)$, et on écrit :

$$\begin{aligned} y(z) &= AY_\nu(iz) + BJ_\nu(iz) \\ &= C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ici ν est un nombre réel quelconque et C_1 , C_2 , sont des constantes arbitraires. Les deux fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ sont respectivement appelées les fonctions de Bessel modifiées (ou parfois les fonctions de Bessel hyperboliques) du premier et du deuxième type et sont définies comme :

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \quad (3.66)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_{+\nu}(z)}{\sin \pi \nu} \quad \nu \notin \mathbb{N} \quad (3.67)$$

Notons que le facteur $i^{-\nu}$ est introduit dans (3.66) pour avoir une fonction réelle si x est réel. Lorsque $\nu \neq n$, n un nombre entier et lorsque $\nu = n$, la limite est utilisée. Ceux-ci sont choisis pour avoir une valeur réelle pour les arguments réels et positifs z . Le développement en série pour $I_\nu(z)$ est donc analogue à celle de $J_\nu(x)$, mais sans l'alternance $(-1)^n$ facteur. En particulier, si ν réduit à un nombre entier n :

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz) = i^{-n} (-1)^n J_{-n}(iz) = i^{-n} (-1)^n \frac{1}{i^n} I_{-n}(z)$$

D'où :

$$I_n(z) = I_{-n}(z) \quad (3.68)$$

On peut déduire aussi :

$$I_n(-z) = (-1)^n I_n(z) \quad (3.69)$$

Quand ν est différent d'un nombre entier, les deux solutions $I_\nu(z)$ et $I_{-\nu}(z)$ deviennent linéairement indépendantes et la solution générale (3.70) de l'équation (3.64) se réduit à :

$$y(z) = \alpha I_\nu(z) + \beta I_{-\nu}(z) \quad (3.70)$$

3.9.1 Propriétés des fonctions I_ν, K_ν

La linéarité de ces fonctions avec celles de Bessel J_ν et Y_ν permet de déduire les principales propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [z^\nu I_\nu(z)] &= z^\nu I_{\nu-1}(z) \\ \frac{d}{dz} [z^{-\nu} I_\nu(z)] &= z^{-\nu} I_{\nu+1}(z) \\ \frac{d}{dz} I_0(z) &= I_1(z) \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} I_\nu(z) \\ I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) &= 2 \frac{d}{dz} I_\nu(z) \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [z^\nu K_\nu(z)] &= -z^\nu K_{\nu-1}(z) \\ \frac{d}{dz} [z^{-\nu} K_\nu(z)] &= -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z) \\ \frac{d}{dz} K_0(z) &= -K_1(z) \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned}
K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) &= -\frac{2\nu}{z} K_{\nu}(z) \\
K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) &= -2\frac{d}{dz} K_{\nu}(z)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

3.10 Exercices résolus

Exercice 1 :

Établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
J_{\frac{3}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \\
H_{\frac{1}{2}}^1(x) &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix}, \quad H_{\frac{1}{2}}^2(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-ix} \\
I_{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sinh(x), \quad I_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cosh(x)
\end{aligned}$$

Solution :

En utilisant la relation (3.18)

$$\begin{aligned}
J_{\frac{3}{2}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\frac{3}{2} + k + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k + \frac{3}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \frac{1}{2} + 2)} \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2^{2k+1} k!}{(2k+3)(2k+1)!} \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k+2)}{(2k+3)!} x^{2k+2} (\text{multiplier et diviser par } (2k+2)) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} (2k)}{(2k+1)!} x^{2k} (\text{on a chang } k \text{ par } k-1) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} [(2k+1) - 1]}{(2k+1)!} x^{2k} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} x^{2k} - \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\cos x + \frac{\sin x}{x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\frac{1}{2}}^1(x) &= J_{\frac{1}{2}}(x) + iY_{\frac{1}{2}}(x) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [\sin x - i\cos x] \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\frac{1}{2}}^2(x) &= J_{\frac{1}{2}}(x) - iY_{\frac{1}{2}}(x) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [\sin x + i \cos x] \\
&= i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-ix}
\end{aligned}$$

D'après la définition (3.66), on a :

$$\begin{aligned}
I_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2n}}{n! \Gamma(\frac{1}{2} + n + 1)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2n}}{n! (\frac{1}{2} + n) \Gamma(\frac{1}{2} + n)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2n} 2^{2n} n!}{n! (\frac{1}{2} + n) (2n)! \sqrt{\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sinh(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2n}}{n! \Gamma(\frac{1}{2} + n)} \\
&= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} 2^{2n} n!}{n! (2n)! \sqrt{\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cosh x
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

D'après les propriétés de la fonction Bessel, établir les relations suivantes :

- (a) $J_5(x) = -\frac{12}{x} \left(\frac{16}{x^2} - 1 \right) J_0(x) + \left(\frac{384}{x^4} - \frac{72}{x^2} + 1 \right) J_1(x)$
- (b) $\int J_1(x) dx = -J_0(x) + cte$
- (c) $\int J_3(x) dx = J_0(x) - \frac{4}{3} J_1(x) + c$

Solution :

(a) tout en basant sur la relation de récurrence (3.49), on écrit :

$$\begin{aligned}
 J_5(x) &= \frac{8}{x} J_4(x) - J_3(x) \\
 &= \frac{8}{x} \left[\frac{6}{x} J_3(x) - J_2(x) \right] - J_3(x) \\
 &= \left(\frac{48}{x^2} - 1 \right) J_3(x) - \frac{8}{x} J_2(x) \\
 &= \left(\frac{48}{x^2} - 1 \right) \left(\frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x) \right) - \frac{8}{x} J_2(x) \\
 &= \left(\frac{192}{x^3} - \frac{12}{x} \right) J_2(x) - \left(\frac{48}{x^2} - 1 \right) J_1(x) \\
 &= \frac{12}{x} \left(\frac{16}{x^2} - 1 \right) \left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x) \right] - \left(\frac{48}{x^2} - 1 \right) J_1(x) \\
 &= \frac{12}{x} \left(\frac{16}{x^2} - 1 \right) J_0(x) + \left(\frac{348}{x^4} - \frac{72}{x^2} + 1 \right) J_1(x)
 \end{aligned}$$

(b) En intégrant la relation (3.50), on trouve sans peine le résultat.

(c) on a :

$$\begin{aligned}
 \int J_3(x) dx &= \int x^2 [x^{-2} J_3(x)] dx \\
 x^2 &= u, \quad x^{-2} J_3(x) dx = dv, \quad , \quad 2x dx = du, \quad v = -x^{-2} J_2(x) \text{ (selon (3.43))} \\
 &= -J_2(x) + 2 \int x^{-1} J_2(x) dx = -J_2(x) - 2x^{-1} J_1(x) + c \quad (3.43) \text{ pour } \nu = 1 \\
 &= J_0(x) - \frac{2}{x} J_1(x) - \frac{2}{x} J_1(x) + c \quad \text{relation (3.49)} \\
 &= J_0(x) - \frac{4}{x} J_1(x) + c
 \end{aligned}$$

Exercice 3

Montrer que :

$$J_{-\nu}(x) J'_\nu(x) - J'_{-\nu}(x) J_\nu(x) = \frac{c}{x}$$

où c est une constante. **Solution**

Les deux fonctions $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ vérifient respectivement les équations différentielles de Bessel :

$$\begin{aligned}
 J''_\nu(x) + \frac{1}{x} J'_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) J_\nu(x) &= 0 \\
 J''_{-\nu}(x) + \frac{1}{x} J'_{-\nu}(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) J_{-\nu}(x) &= 0
 \end{aligned}$$

En multipliant la première par $J_{-\nu}(x)$ et la deuxième par $J_\nu(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 J''_\nu(x) J_{-\nu}(x) + \frac{1}{x} J'_\nu(x) J_{-\nu}(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) J_\nu(x) J_{-\nu}(x) &= 0 \\
 J''_{-\nu}(x) J_\nu(x) + \frac{1}{x} J'_{-\nu}(x) J_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) J_{-\nu}(x) J_\nu(x) &= 0
 \end{aligned}$$

En soustrayant la première équation de la deuxième, on trouve :

$$\begin{aligned}
 J''_{-\nu}(x)J_{-\nu}(x) - J''_{-\nu}(x)J_{\nu}(x) + \frac{1}{x} [J'_{\nu}(x)J_{-\nu}(x) - J'_{-\nu}(x)J_{\nu}(x)] &= 0 \\
 J_{-\nu}(x) [xJ'_{\nu}(x)]' + J'_{-\nu}(x)xJ'_{\nu}(x) - J'_{-\nu}(x)xJ'_{\nu}(x) - J_{\nu}(x) [xJ'_{-\nu}(x)]' &= 0 \\
 [J_{-\nu}(x)xJ'_{\nu}(x) - J_{\nu}(x)xJ'_{-\nu}(x)]' &= 0 \\
 J_{-\nu}(x)xJ'_{\nu}(x) - J_{\nu}(x)xJ'_{-\nu}(x) &= c \\
 J_{-\nu}(x)J'_{\nu}(x) - J_{\nu}(x)J'_{-\nu}(x) &= \frac{c}{x}
 \end{aligned}$$

Exercice 4 :

1) Calculer l'intégrale suivante :

$$W = \int_0^{+\infty} x^{\nu} J_{\nu}(ax) e^{-bx} dx$$

2) Dédurre que :

1. $\int_0^{+\infty} J_0(ax) e^{-bx} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
2. $\int_0^{+\infty} J_n(ax) dx = \frac{1}{a}$ (n est un entier positif)
3. $\int_0^{+\infty} \frac{J_n(x)}{x} dx = \frac{1}{n}$ (n est un entier positif non nul)

Solution :

Suite à la définition (3.18), on a :

$$\begin{aligned}
 J_{\nu}(ax) &= \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu + r + 1)} \left(\frac{ax}{2}\right)^{2r+\nu} \\
 &= \left(\frac{a}{2}\right)^{\nu} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu + r + 1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2r} x^{2r+\nu}
 \end{aligned}$$

On injectant cette dernière dans l'intégrale et en intervertissant sommation et intégration, on obtient :

$$W = \left(\frac{a}{2}\right)^{\nu} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(\nu + r + 1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2r} \int_0^{+\infty} e^{-bx} x^{2r+2\nu} dx$$

D'après la définition de la fonction Γ , on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-bx} x^{2r+2\nu} dx = \frac{\Gamma(2\nu + 2r + 1)}{b^{2\nu+2r+1}}$$

et d'après la formule de duplication, on a :

$$\frac{\Gamma(2\nu + 2r + 1)}{\Gamma(\nu + r + 1)} = \frac{2^{2\nu+2r}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\nu + r + \frac{1}{2}\right)$$

En tenant compte les deux dernières relations, W s'écrit :

$$W = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{a^\nu}{b^{2\nu+1}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \Gamma(\nu + r + \frac{1}{2}) \left(\frac{a}{b}\right)^{2r}$$

Le développement limite de $(1+x)^\alpha$ permet d'écrire :

$$(1+x)^{-\nu-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{\Gamma(\nu + r + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} x^r$$

et par conséquent :

$$(a^2 + b^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} = \frac{1}{b^{2\nu+1}} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{\Gamma(\nu + r + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{a}{b}\right)^{2r}$$

Ce qui nous permet d'établir :

$$W = \int_0^{+\infty} x^\nu J_\nu(ax) e^{-bx} dx = \frac{(2a)^\nu \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} (a^2 + b^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$$

2)

1. il suffit de prendre $\nu = 0$ dans l'intégrale W , on trouve :

$$W = \int_0^{+\infty} J_0(ax) e^{-bx} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

d'où le résultat.

2. On montre le résultat par récurrence, tout d'abord, on le vérifie pour $n = 0$ et $n = 1$. Ensuite, on suppose que la relation est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n + 2$. Pour $n = 0$ et d'après la dernière relation, il est clair que pour $b = 0$, on aura : $\int_0^{+\infty} J_0(ax) e^{-bx} dx = \frac{1}{a}$ Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} J_1(ax) dx &= - \int_0^{+\infty} \frac{dJ_0(ax)}{d(ax)} dx, \quad (J'_0 = -J_1) \\ &= -\frac{1}{a} J_0(ax) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Puisque $J_0(+\infty) = 0$ et $J_0(0) = 1$. On suppose que le résultat est vrai pour n i.e.

$$\int_0^{+\infty} J_n(ax) dx = \frac{1}{a}$$

Et en intégrant la relation de récurrence (3.48) entre 0 et $+\infty$, on obtient :

$$J_n(x) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] dx$$

Le premier membre est nul pour n entier strictement positif, on a alors :

$$\int_0^{+\infty} J_{n+1}(x)dx = \int_0^{+\infty} J_{n-1}(x)dx$$

En remplaçant x par bx et n par $n+1$ on obtient :

$$\int_0^{+\infty} J_{n+2}(x)dx = \int_0^{+\infty} J_n(x)dx = \frac{1}{a}$$

D'où le résultat.

3. En revenant à la relation de récurrence (3.49), on l'intègre entre 0 et $+\infty$, on obtient :

$$2n \int_0^{+\infty} \frac{J_n(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} J_{n+1}(x)dx + \int_0^{+\infty} J_{n-1}(x)dx$$

or d'après le résultat précédent, on a :

$$\int_0^{+\infty} J_{n+1}(x)dx = \int_0^{+\infty} J_{n-1}(x)dx = 1$$

Donc,

$$2n \int_0^{+\infty} \frac{J_n(x)}{x} dx = 2$$

Alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_n(x)}{x} dx = \frac{1}{n}$$

D'où le résultat.

Exercice 5 :

Trouver dans ce qui suit, la solution générale des équations différentielles du second ordre par réduction à l'équation de Bessel.

1. $xy'' + y' + xy = 0$
2. $xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0, (z = \sqrt{x})$
3. $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{16x^2}\right)y = 0, (z = \sqrt{x})$
4. $xy'' - y' + xy = 0, (y(x) = xu(x))$
5. $y'' + xy = 0, \left(y = u\sqrt{x}, \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z\right)$
6. $4x^2y'' + 4xy' + (x - \nu^2)y = 0, (z(x) = \sqrt{x})$
7. $xy'' + (1 + 2n)y' + xy = 0, (y(x) = x^{-n}u(x))$

$$8. x^2 y'' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) y = 0, \quad (y(x) = (\sqrt{x}u(x)))$$

Solution :

1. $xy'' + y' + xy = 0$ Par division cette équation par x , on remarque qu'elle n'est que la fonction de Bessel d'ordre zéro $\nu = 0$, donc la solution générale s'écrit : $y(x) = AJ_0(x) + BY_0(x)$.

$$2. xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0, \quad (z = \sqrt{x})$$

$$y' = \frac{dz}{dx} \frac{dy}{dz} = \frac{1}{2z} \frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{dz}{dx} \frac{dy'}{dz} = -\frac{1}{4z^3} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{4z^2} \frac{d^2y}{dz^2}$$

On remplace ces dernières expression dans l'équation donnée, on trouve :

$$-z^2 \frac{1}{4z^3} \frac{dy}{dz} + z^2 \frac{1}{4z^2} \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2z} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{4}y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + y(z) = 0$$

La dernière équation présente l'équation Bessel d'ordre $\nu = 0$ dont la solution est :

$$y(z) = AJ_0(z) + BY_0(z)$$

D'où la solution générale de l'équation donnée est :

$$y(x) = AJ_0(\sqrt{x}) + BY_0(\sqrt{x})$$

3. $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{16x^2}\right)y = 0$, En tenant compte du changement de variable donné ($z = \sqrt{x}$), on aura :

$$y' = \frac{dz}{dx} \frac{dy}{dz} = \frac{1}{2z} \frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{dz}{dx} \frac{dy'}{dz} = -\frac{1}{4z^3} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{4z^2} \frac{d^2y}{dz^2}$$

L'équation donnée devient :

$$-\frac{1}{4z^3} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{4z^2} \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2z^3} \frac{dy}{dz} + \left(\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{16z^4}\right)y = 0$$

$$\frac{1}{4z^2} \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{4z^3} \frac{dy}{dz} + \left(\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{16z^4}\right)y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{(\pm 1/2)^2}{z^2}\right)y = 0$$

L'équation différentielle obtenue, est de type de Bessel d'ordre $\nu = 1/2$ dont la solution générale est :

$$y(z) = AJ_{1/2}(z) + Bj_{-1/2}(z)$$

Donc, on déduit la solution générale de l'équation donnée sous la forme :

$$y(x) = Aj_{1/2}(\sqrt{x}) + Bj_{-1/2}(\sqrt{x})$$

4. $xy'' - y' + xy = 0, \quad (y(x) = xu(x))$

$$y' = u(x) + xu'(x)$$

$$y'' = 2u' + xu''$$

En substituant les dernières expression dans l'équation donnée, on obtient :

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)u = 0$$

Qui a la forme d'une équation de Bessel d'ordre $\nu = \pm 1$ et dont la solution s'écrit :

$$u(x) = AJ_1(x) + BY_1(x)$$

On en déduit la solution générale de l'équation donnée sous la forme :

$$y(x) = AxJ_1(x) + BxY_1(x)$$

5. $y'' + xy = 0, \quad \left(y = u\sqrt{x}, \quad \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z\right)$ On commence par le changement de fonction $y = u\sqrt{x}$, on aura :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}u(x) + \sqrt{x}u'(x)$$

$$y'' = \sqrt{x}u''(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}u'(x) - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}u(x)$$

En remplaçant ça dans notre équation on trouve :

$$xu''(x) + u'(x) + \left(x^2 - \frac{x^{-1}}{4}\right)u(x) = 0$$

Après, on passe au changement de variable $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$ dans cette dernière équation, on obtient :

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z, \quad x = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}$$

$$u' = \frac{dz}{dx} \frac{du}{dz} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} \frac{du}{dz}$$

$$u'' = \frac{dz}{dx} \frac{du'}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}} \frac{du}{dz} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}} \frac{d^2u}{dz^2}$$

En remplaçant ces expressions dans la dernière équation de la fonction $u(x)$, on obtient finalement :

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{\left(\pm \frac{1}{3} \right)^2}{z^2} \right) u(z) = 0$$

On en déduit directement la solution générale de l'équation donnée donnée sous la forme :

$$y(x) = A\sqrt{x}J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + B\sqrt{x}J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$$